第二十届北京高中数学知识应用竞赛初赛试题及参考解答

2016年12月

一、(满分25分)超市里的商品都有一个识别的号码,这个号码用可由光学扫描仪读出的条形来编码,通常称为条码.例如下图所示.图中给出的识别号码是0 8 9 6 0 0 1 2 4 5 6 9.这个号码称为通用产品码(UPC),广泛用于商品编码.在大多数情况下,分配给产品的号码是一个12位数字,前11位的数字是商品项目代码,最后1位是校验码.校验码用于检验前11位商品编码的正确性.检验的原理是要保证同类商品的所有12位编码数字的和(或加权和)被某个整数整除.

0 89600 12456 9

上述商品项目代码为08960012456.所有数字和为$0+8+9+6+0+0+1+2+4+5+6=43$,若想让UPC的每位数字和可以被10整除,就要选取校验码为7,于是得到该商品的UPC为0 8 9 6 0 0 1 2 4 5 6 7.显然,在商品项目代码中,无论哪一位单个数码的改变都会改变整个编码的整除性,从而被校验码告知"编码有误".

但是最常见的商品项目代码书写错误是将其中的两个相邻数字写颠倒,譬如将上述代码写成08960012465(末两位数颠倒了).但它的校验码也是7,校验失效!因此简单求和的方法很少被采用.

对上述问题,可以通过如下的加权求和的办法修正校验.设UPC加权求和的权数为$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{12})=(3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1)$,可以算得商品项目代码0 8 9 6 0 0 1 2 4 5 6的加权和为

$3\times0+8+3\times9+6+3\times0+0+3\times1+2+3\times4+5+3\times6=8+27+3+6+2+12+5+18=81$,于是在这个加权和的方式下,若想让UPC的每位数字和被10整除,则校验码应为9,即$81+9=90$被10整除.因此,正确的UPC应是0 8 9 6 0 0 1 2 4 5 6 9.

对于错误的编码0 8 9 6 0 0 1 2 4 6 5 9,计算它的加权和为

$3\times0+8+3\times9+6+3\times0+0+3\times1+2+3\times4+6+3\times5+9=8+27+3+6+2+12+6+15+9=88$,

不能被10整除,表明该编码有误.校验成功!

(1)某商品项目代码为02100065897,请根据权数(3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1)计算它的校验码.

(2)根据权数(3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1)确定的校验码,对"相邻数字写颠倒"的错误检验绝对有效吗?请给予说明.

解 (1)设校验码为a_{12},$0\leqslant a_{12}\leqslant 9$,根据权数(3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1),可以算得商品项目代码0 2 1 0 0 0 6 5 8 9 7的加权和为

$3\times0+2+3\times1+0+3\times0+0+3\times6+5+3\times8+9+3\times7=82$,

若使得$82+a_{12}\equiv 0 \pmod{10}$,则校验码$a_{12}=8$.

(2)我们注意到,形如

$a_1a_2\cdots a_ia_{i+1}\cdots a_{12}$, $b_1b_2\cdots b_ib_{i+1}\cdots b_{12}=a_1a_2\cdots a_{i+1}a_i\cdots a_{12}$

的两条编码,差别仅在于第i和第$i+1$位数字对换了:$b_ib_{i+1}=a_{i+1}a_i$.

根据权数(3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1),UPC应满足

$3a_1+a_2+\cdots+pa_i+qa_{i+1}+\cdots+a_{12}\equiv 0$

(mod 10), (1)

其中 $pa_i + qa_{i+1} = 3a_i + a_{i+1}$(或 $a_i + 3a_{i+1}$).

如果对于编码 $b_1 b_2 \cdots b_{12}$,不能由校验码发现因仅有一对相邻数字对换出现了错误,则同样应满足

$3b_1 + b_2 + \cdots + pb_i + qb_{i+1} + \cdots + b_{12} \equiv 0$ (mod 10), (2)

其中 $pb_i + qb_{i+1} = pa_{i+1} + qa_i = 3a_{i+1} + a_i$(或 $a_{i+1} + 3a_i$).

将(1)(2)两式做差,得 $\pm 2(a_{i+1} - a_i) \equiv 0$ (mod 10),由于 a_i, a_{i+1} 都是一位数,并且 $a_i \neq a_{i+1}$,从而上式等价于 $a_{i+1} - a_i = \pm 5$.综上,两个相邻数字 a_i 和 $a_{i+1}(a_i \neq a_{i+1})$ 的对换错误能被发现的充要条件是:$|a_i - a_{i+1}| \neq 5$.

由此可知,上面给出的利用加权和来确定校验码的方法,可以通过校验码检验出商品项目代码中单个的数码出错;也可以在商品项目代码中任意两个相邻的数码的数字之差的绝对值不等于5时,通过校验码检验出是否存在一对相邻的数码出现了交换次序的错误.

二、(满分25分)若已知肝癌的发病率是0.0004,并可以通过“甲胎蛋白”的检验方法筛查肝癌.统计表明:用此方法对肝癌病人检验时,其中百分之九十五的人呈阳性(+);而用此方法对非肝癌患者检验时,百分之九十的人呈阴性(-).由此看来,这是一个不错的方法.

如果有一个人,他的检验结果呈阳性(+),那么他患肝癌的可能性有多大呢?可以通过如下计算得出:设总人数为 N,用古典概率模型,可以认为:

患肝癌的人数为 $0.0004N$,没有患肝癌的人数为 $(1-0.0004)N$;

患肝癌的人中,检验呈阳性(+)的人数是 $0.95 \times 0.0004N$;

没有患肝癌的人中,检验呈阳性(+)的人数 $(1-0.90) \times (1-0.0004)N$;

从而检验结果呈阳性(+)的总人数为

$0.95 \times 0.0004N + (1-0.90) \times (1-0.0004)N$.

因此,如果一个人检验结果呈阳性(+),此时,他确实患肝癌的可能性是

$$\frac{0.95 \times 0.0004N}{0.95 \times 0.0004N + (1-0.90) \times (1-0.0004)N} \approx 0.0038.$$

这个值不超过千分之四.请回答:

(1)看似不错的“甲胎蛋白”的检验方法,为什么在用来确诊肝癌时,可能性竟然会如此之低?是哪些因素影响了这个确诊率?

(2)为了提高确诊的可能性,你认为应该如何办?

解 (1)由于肝癌患者在总人口中的比例过小,即只占万分之四.大部分人不是肝癌患者,因此,即使在非肝癌患者中只有百分之十检验呈阳性(+),他们也占了所有检验呈阳性(+)人的绝大部分,这就造成了检验呈阳性(+)的人中,真正肝癌患者不足千分之四.

从数学上看,如果把上面的万分之四改为百分之二十,不难验证,确诊率会从0.0038提高到近似0.70.

如果改变检验方法,能够使呈阳性(+)的百分比由百分之九十五增加到百分之九十九,把呈阴性(-)的百分比由百分之九十增加到百分之九十九,容易验证,上述的确诊率仍然不足千分之四.即使把上述两个百分比都增加到百分之九十九点九,确诊率也不到百分之三十.

这表明,影响检验确诊率的一个重要因素是患者在总人口中所占的比例.

(2)虽然病人在总人口中占的比例,对确诊率的影响很大.但我们不可能去改变这个比例.它是客观存在的.

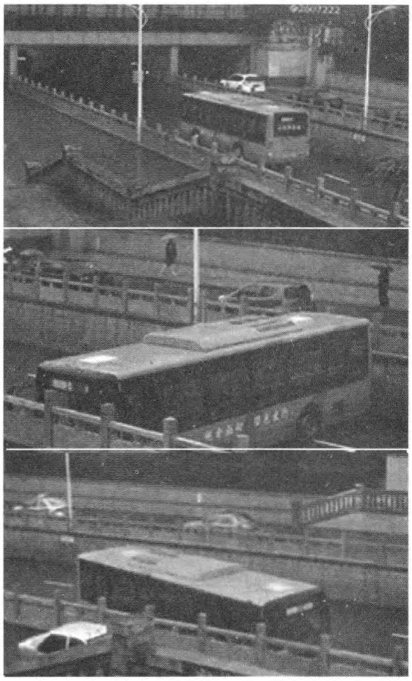
一个可取的办法是,重复检验!例如,在上面的问题中,一个非肝癌患者,检验呈阳性(+)的可能性是百分之十,两次检验结果都呈阳性(+)的可能性,就只有百分之一了,这个可能性就很小了.从而表明,如果一个人做两次检验,结果都呈阳性(+),他极可能患癌症.

和重复检验类似地是,给出不同的检验方法,用多种指标检验.如果好几个指标都不正常,和重复检验一个道理,说明他极可能患病.

三、(满分25分)2016年7月19日,河北邢台市区突降暴雨,市区多处路段积水严重,此时一公交车行驶至某路段靠近桥下时发现积水严重,情况不妙,立即掉头驶离危险路段.当时的情况如

下图所示. 获悉此事后，很多人都很惊讶，在这么窄的路上实现掉头简直不可思议！

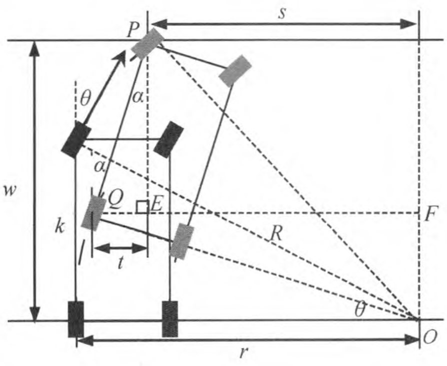
在道路很窄的情况下，汽车掉头需要慢慢的挪动，操作步骤是：①转动方向盘到极限位置（俗称“打死方向盘”）；②汽车前行至道路边缘；③向相反方向转动方向盘到极限位置；④倒车至道路边缘. 这样就完成了一次操作. 经过有限次操作，最后一次的④是使汽车实现掉头.



试回答下面的问题：

如果道路两侧只有边界线，没有围挡，汽车方向与道路垂直（即汽车横在了马路上），汽车两后轮在道路的边缘. 求在第一次操作中，车轮不得离开路面，完成了①和②之后，车辆转动的角度.

解　在第一次操作中，完成了①和②，使左前轮至道路边缘，如下图所示.



设路宽为 w，轴距为 k，外前、后轮的转弯半径分别为 R 和 r，另有 s、t 如图所示. 前轮最大扭转角度为 θ，完成了①和②的车辆转动的角度是 α.

若 $R<w$，则汽车“打死方向盘”拐弯时碰不到道路边缘，一下就转过来了. 所以这里设 $R>w$.

由下图可见，$\triangle PQE\backsim\triangle QOF$，有 $\dfrac{PQ}{PE}=\dfrac{QO}{QF}$，

即 $\dfrac{k}{\sqrt{k^2-t^2}}=\dfrac{r}{t+s}$，整理得

$$(k^2+r^2)\left(\frac{t}{k}\right)^2+2sk\,\frac{t}{k}+(s^2-r^2)=0,$$

而 $\dfrac{t}{k}=\sin\alpha$，所以有

$$\sin\alpha=\frac{-2sk+\sqrt{4s^2k^2-4(k^2+r^2)(s^2-r^2)}}{2(k^2+r^2)}$$

又 $s^2=R^2-w^2$，$r^2=R^2-k^2$，所以有

$$\sin\alpha=\frac{-k\sqrt{R^2-w^2}+\sqrt{k^2(R^2-w^2)-(k^2+R^2-k^2)[(R^2-w^2)-(R^2-k^2)]}}{k^2+R^2-k^2}$$

$$=\frac{w\sqrt{R^2-k^2}-k\sqrt{R^2-w^2}}{R^2},$$

因为 $R=\dfrac{k}{\sin\theta}$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{w\cos\theta-\sqrt{k^2-w^2\sin^2\theta}}{k}$.

设 $\dfrac{w}{k}=q$，则

$$\sin\alpha=q\cos\theta-\sqrt{1-q^2\sin^2\theta}.\qquad(※)$$

此式表示出，在第一次操作中，车轮不得离开路面，完成了①和②，车辆转动的角度与汽车前轮最大扭转角度、路面宽度和车辆长度的关系. 根据（※）式便可求得车辆转动角度.

四、（满分 25 分）圆的任何一对平行切线的距离总是相等的. 即圆在任意方向都有相同的宽度，因而圆也就是所谓的“等宽曲线”. 而具有这种性质的图形未必是圆，下图所示的自行车的轮子就是非圆等宽曲线. 著名的非圆等宽曲线是图 1 中阴影所示的鲁列斯曲边三角形，它的画法如下：先画一个等边三角形 ABC，再分别以 A、B、C 为圆心，作圆弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$，这三段弧围成的图形就是鲁列斯三角形.

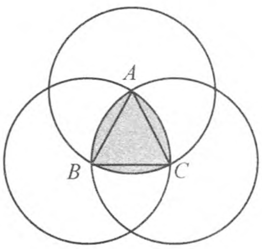


图1　鲁列斯三角形

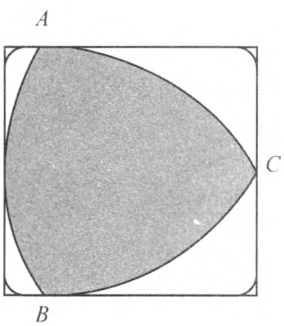


图2

鲁列斯三角形可以紧紧地嵌在一个正方形内部，即正方形的各边上都有鲁列斯三角形边缘上的点，如图2.设鲁列斯三角形的顶点 A、B、C 间距离为1cm，则正方形边长也是1cm.鲁列斯三角形三个顶点沿着正方形边界行进一周的过程中，正三角形 ABC 的外心 T 也在运动.

(1)试建立直角坐标系，给出 $T(x,\ y)$ 中 x、y 的取值范围；

(2)求 T 的轨迹方程(轨迹可以看作是几条曲线连接而成，轨迹方程也就需要用几个来表示).

解 (1)以正方形顶点为原点建立直角坐标系，如图3所示.

可知，正方形顶点坐标为 $O(0,0)$，$D(1,0)$，$E(1,1)$，$F(0,1)$.设 T 的坐标为 $(x,\ y)$，$\triangle ABC$ 的初始状态为 $\triangle A_0B_0C_0$，其中点 C_0 在 OD 边上，点 B_0 在 EF 边上，$B_0C_0\perp OD$.则 $C_0\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$A_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$，相应的 T 位于 $T_0\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2}\right)$；令鲁列斯三角形逆时针转动，$\triangle A_0B_0C_0$ 转动到 $\triangle A_1B_1C_1$，$C_1\left(\frac{1}{2},0\right)$，相应的 T 位于 $T_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$；继续转动鲁列斯三角形，$\triangle A_1B_1C_1$ 转动到 $\triangle A_2B_2C_2$，$C_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，相应的 T 位于 $T_2(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})$；再转动鲁列斯三角形，$\triangle A_2B_2C_2$ 转动到 $\triangle A_3B_3C_3$，$C_3(1,1-\frac{\sqrt{3}}{2})$，相应的 T 位于 $T_3(\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{3})$；再转动鲁列斯三角形，$\triangle A_3B_3C_3$ 就转到了 $\triangle B_0C_0A_0$，相应的 T 位于 $T_0(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})$.至此，$T$ 转了一圈.

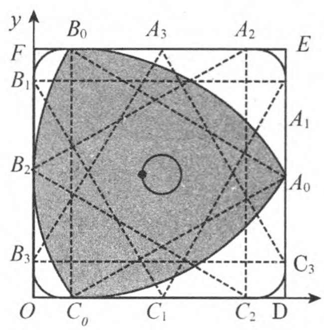


图3

可见 $1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.$T$ 的轨迹内切于由四条直线 $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 围成的正方形.

(2)$\triangle ABC$ 在由 $\triangle A_0B_0C_0$ 转动到 $\triangle A_1B_1C_1$ 过程中，设动点 $C(c,0)$，$A(1,a)$，其中 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，它既在以 C 为圆心、以 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半

径的圆上，又在以 A 为圆心、以$\frac{\sqrt{3}}{3}$为半径的圆上.

由 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 可知 a、c 满足条件 $(1-c)^2+a^2=1$，显然，$x\geqslant c$，$y\leqslant a$，所以 T 满足关系

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=\frac{1}{3}\\(x-1)^2+(y-a)^2=\frac{1}{3}\\(1-c)^2+a^2=1\end{cases}$$

得到

$$(1-x)\sqrt{\frac{1}{3}-y^2}+y\sqrt{\frac{1}{3}-(x-1)^2}=\frac{1}{6}\quad(1)$$

其中，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle ABC$ 在由$\triangle A_1B_1C_1$转动到$\triangle A_2B_2C_2$过程中，$T(x,y)$与动点 $C(c,0)$，$B(0,b)$之间有 $x\leqslant c$，$y\leqslant b$，且满足

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=\frac{1}{3}\\x^2+(y-b)^2=\frac{1}{3}\\b^2+c^2=1\end{cases}$$

得到 $$x\sqrt{\frac{1}{3}-y^2}+y\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}=\frac{1}{6}\quad(2)$$

其中，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle ABC$ 在由$\triangle A_2B_2C_2$转动到$\triangle A_3B_3C_3$过程中，外心 $T(x,y)$与动点 $A(a,1)$，$B(0,b)$之间有 $x\leqslant a$，$y\geqslant b$，且满足

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-1)^2=\frac{1}{3}\\x^2+(y-b)^2=\frac{1}{3}\\a^2+(1-b)^2=1\end{cases}$$

得到

$$x\sqrt{\frac{1}{3}-(y-1)^2}+(1-y)\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}=\frac{1}{6}\quad(3)$$

其中，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

$\triangle ABC$ 在由$\triangle A_3B_3C_3$转动到$\triangle B_0C_0A_0$过程中，$T(x,y)$与动点 $A(a,1)$、$C(1,c)$ 之间有 $x\geqslant a$，$y\geqslant c$，满足

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-1)^2=\frac{1}{3}\\(x-1)^2+(y-c)^2=\frac{1}{3}\\(1-a)^2+(1-c)^2=1\end{cases}$$

得到 $$(1-x)\sqrt{\frac{1}{3}-(y-1)^2}+(1-y)\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-(x-1)^2}=\frac{1}{6}\quad(4)$$

其中，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

综上所述，外心的轨迹是四段曲线连接而成，它们的方程分别为

(1) $(1-x)\sqrt{\frac{1}{3}-y^2}+y\sqrt{\frac{1}{3}-(x-1)^2}=\frac{1}{6}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $x\sqrt{\frac{1}{3}-y^2}+y\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $x\sqrt{\frac{1}{3}-(y-1)^2}+(1-y)\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

(4) $(1-x)\sqrt{\frac{1}{3}-(y-1)^2}+(1-y)\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-(x-1)^2}=\frac{1}{6}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$1-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$.

从方程可见，外心的轨迹是关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称的，也是关于直线 $y=\frac{1}{2}$对称的.