2017年全国高中数学联赛陕西赛区预赛

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2018)01-0024-05

第一试

一、选择题(每小题6分,共48分)

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-1$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.则$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=($　　$)$.

(A)40　(B)44　(C)45　(D)49

2. 设n为正整数,以下各组数a、b中,使$\frac{b}{a}$为既约分数的是(　　).

(A)$a=n+1,b=2n-1$

(B)$a=2n-1,b=5n+2$

(C)$a=n+1,b=3n+1$

(D)$a=3n+1,b=5n+2$

3. 在空间直角坐标系中,$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(3,4,1)$、$B(0,4,5)$、$C(5,2,0)$.则$\tan\frac{A}{2}$的值为(　　).

(A)$\sqrt{5}$　(B)$\frac{\sqrt{5}}{5}$　(C)$\sqrt{6}$　(D)$\frac{\sqrt{6}}{6}$

4. 如图1,椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$\odot O:x^2+y^2=a^2$与$y$轴正半轴交于点$B$,过点$B$的直线与椭圆$E$相切,且与$\odot O$交于另一点$A$.若$\angle AOB=60°$,则椭圆$E$的离心率为(　　).

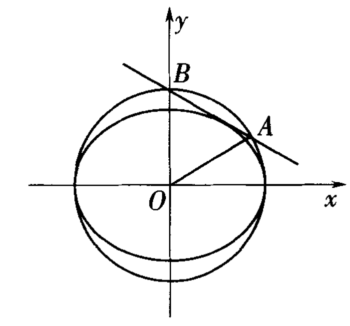

图1

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+4x+1, & x<0;\\ \frac{2}{e^x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

则$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图像上关于坐标原点O对称的点共有(　　)对.

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

6. 如图2,在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,P、Q、R分别为棱AB、AD、AA_1的中点.以$\triangle PQR$为底面作一个直三棱柱,使其另一个底面的三个顶点也均在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上.则这个直三棱柱的体积为(　　).

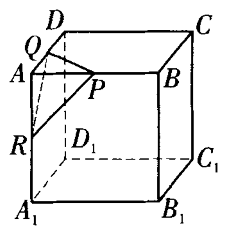

图2

(A)$\frac{3}{8}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$　(C)$\frac{3}{16}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{16}$

7. 设集合$A=\left\{n\left|\frac{n}{3}\in\mathbf{N}_+\right.\right\}$,

$B=\{y|y=x+4+\sqrt{5-x^2}\}$.

则集合$A\cap B$中元素的个数为(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

8. 设$x\geqslant y>0$.若存在实数a、b满足

$0\leqslant a\leqslant x,0\leqslant b\leqslant y$,

且　$(x-a)^2+(y-b)^2=x^2+b^2=y^2+a^2$. ①

则$\frac{x}{y}$的最大值为(　　).

(A)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(B)$\sqrt{2}$　(C)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　(D)1

二、填空题(每小题8分,共32分)

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$. 若 $f(f(x))=x$ 恒成立,则实数 a 的值为______.

10. 袋中装有两个红球、三个白球、四个黄球,从中任取四个球. 则其中三种颜色的球均有的概率为______.

11. 设 a、b、c 为互不相同的正整数. 则 $\dfrac{abc}{a+b+c}$ 的最小值为______.

12. 设方程 $xy=6(x+y)$ 的全部正整数解为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=\_\_\_\_\_\_.$$

第 二 试

一、(20 分)设 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c,

向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,b+c)$,

$\boldsymbol{n}=(\sin C-\sin B,a-b)$,

且存在实数 λ,使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$.

(1)求 $\angle C$ 的大小;

(2)若 $a+b=kc$,求实数 k 的取值范围.

二、(20 分)已知抛物线 $E:y=x^2$ 的焦点为 F,过 y 轴正半轴上一点 M 的直线 l 与抛物线 E 交于 A、B 两点,O 为坐标原点,且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$.

(1)证明:直线 l 过定点;

(2)设点 F 关于直线 OB 的对称点为 C,求四边形 $OABC$ 面积的最小值.

三、(20 分)已知函数

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c(a、b、c\in\mathbf{R})$$

在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在区间 $(0,1)$ 上单调递增,且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点,1 为其中的一个零点.

(1)求 $f(2)$ 的取值范围;

(2)试讨论直线 $l:y=x-1$ 与曲线 $C:y=f(x)$ 的公共点的个数.

四、(30 分)如图 3,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A、B 两点,直线 PQ 为两圆距离点 B 较近的公切线,且分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 切于点 P、Q. 设 QB、PB 的延长线分别与 AP、AQ 交于点 C、D. 证明:$AC\cdot BC=AD\cdot BD$.

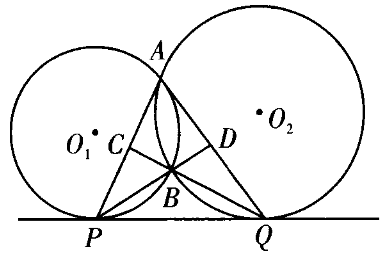

图 3

五、(30 分)设 a、b、c 为正实数,且满足 $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.

证明:$\dfrac{a^2}{1+\sqrt{bc}}+\dfrac{b^2}{1+\sqrt{ca}}+\dfrac{c^2}{1+\sqrt{ab}}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** B.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=0$;

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$.

故 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=44$.

2. D.

注意到,

$$(3n+1,5n+2)=(3n+1,2n+1)$$
$$=(n,2n+1)=(n,n+1)=1.$$

故 $\dfrac{5n+2}{3n+1}$ 为既约分数.

3. A.

由 $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$,$\overrightarrow{AC}=(2,-2,-1)$

$$\Rightarrow\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-10}{5\times3}=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{5}.$$

4. D.

因为 $|OA|=|OB|$,$\angle AOB=60^{\circ}$,所以,$\triangle AOB$ 为正三角形.

则 l_{AB} 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

于是，$l_{AB}: y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+a$.

代入椭圆方程得

$(a^2+3b^2)x^2\pm2\sqrt{3}a^3x+3a^2(a^2-b^2)=0.$

由 $\Delta=12a^6+12a^2(a^2+3b^2)(a^2-b^2)=0$

$\Rightarrow 2a^2=3b^2\Rightarrow 2a^2=3(a^2-c^2)$

$\Rightarrow a^2=3c^2\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. C.

函数 $y=f(x)$ 的图像如图 4 中的实线所示.

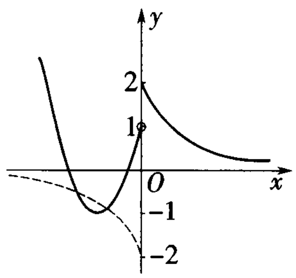

图 4

作 $y=\frac{2}{e^x}(x\geqslant0)$ 的图像关于原点 O 对称的图像(虚线)，其解析式为

$g(x)=-\frac{2}{e^{-x}}(x\leqslant0)$.

由于 $f(-1)=-1<-\frac{2}{e}=g(-1)$，于是，$f(x)=2x^2+4x+1(x<0)$ 的图像与 $g(x)=-\frac{2}{e^{-x}}(x\leqslant0)$ 的图像有两个不同的交点.

从而，$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图像上有且仅有两对点关于原点 O 对称.

6. C.

易知，直三棱柱另一个底面的三个顶点 P_1、Q_1、R_1 分别为正方形 BCC_1B_1、正方形 CDD_1C_1、正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心. 则直三棱柱 $PQR-P_1Q_1R_1$ 的侧棱 $PP_1=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $S_{\triangle PQR}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{8}$，故

$V_{\text{直三棱柱}PQR-P_1Q_1R_1}=S_{\triangle PQR}\cdot PP_1=\frac{3}{16}$.

7. B.

令 $x=\sqrt{5}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

则 $y=\sqrt{5}\sin\theta+4+\sqrt{5}\cos\theta$

$=4+\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$

$\Rightarrow 4-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant4+\sqrt{10}$.

又 $A=\{3,6,9,\cdots\}$，则 $A\cap B=\{3,6\}$，即 $A\cap B$ 中有两个元素.

8. A.

如图 5，在直角坐标系 xOy 中，作矩形 $OABC$，使得 $A(x,0)$，$B(x,y)$，$C(0,y)$.

在边 OA、AB 上分别取点 P、Q，使得 $P(a,0)$，$Q(x,y-b)$.

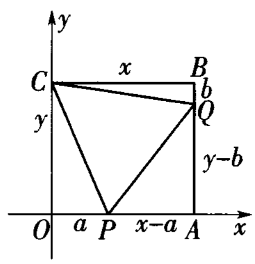

图 5

由式①得

$|PQ|=|QC|=|CP|\Rightarrow\triangle CPQ$ 为正三角形.

设 $\angle OCP=\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$.

则 $\angle BCQ=\frac{\pi}{6}-\theta$.

故 $\frac{x}{y}=\frac{|BC|}{|OC|}=\frac{|BC|}{|CQ|}\cdot\frac{|CP|}{|OC|}$

$=\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\tan\theta\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，上式等号成立.

因此，$\frac{x}{y}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

二、9. -3.

依题意，知 $\frac{a\cdot\frac{ax}{2x+3}}{2\times\frac{ax}{2x+3}+3}=x$，即

$(2a+6)x^2+9x=a^2x$.

故 $\begin{cases}2a+6=0,\\9=a^2\end{cases}\Rightarrow a=-3$.

10. $\frac{4}{7}$.

从袋中的九个球中任取四个，不同的取法共有 $C_9^4=126$ 种，其中，三种颜色的球均有的取法有 $C_2^2C_3^1C_4^1+C_2^1C_3^2C_4^1+C_2^1C_3^1C_4^2=72$ 种.

故所求概率 $P=\frac{72}{126}=\frac{4}{7}$.

11. 1.

不妨设 $a>b>c$. 则 $a\geqslant3,b\geqslant2,c\geqslant1$.

从而，$ab\geqslant6,bc\geqslant2,ca\geqslant3$.

故 $\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$

$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

$\Rightarrow\frac{abc}{a+b+c}\geqslant1$.

当 $a=3,b=2,c=1$ 时，上式等号成立.

因此，$\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值为 1.

12. 290.

原方程可化为

$(x-6)(y-6)=6^2=2^2\times3^2$.

注意到，$2^2\times3^2$ 的正约数个数为

$(1+2)(1+2)=9$

且 $\sum_{k=1}^{9}((x_k-6)+(y_k-6))$

$=2\sum_{k=1}^{9}(x_k-6)=2\times\frac{2^3-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}$

$=182$.

故 $\sum_{k=1}^{9}(x_k+y_k)=182+2\times9\times6=290$.

第二试

一、(1) 由 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$，得

$\begin{cases}\sin A=\lambda(\sin C-\sin B),\\b+c=\lambda(a-b).\end{cases}$

消去 λ 得

$(a-b)\sin A=(b+c)(\sin C-\sin B)$.

由正弦定理得

$(a-b)a=(b+c)(c-b)$,

即 $a^2+b^2-c^2=ab$.

故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

因为 $0<\angle C<\pi$，所以，$\angle C=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 的结论得

$\angle B=\frac{2\pi}{3}-\angle A$.

由已知及正弦定理得

$k=\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$

$=\frac{\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $0<\angle A<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{6}<\angle A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$.

故 k 的取值范围是 $(1,2]$.

二、(1) 设 $l:y=kx+m(m>0)$.

代入 $y=x^2$，得 $x^2-kx-m=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

则 $x_1x_2=-m$.

从而，$y_1y_2=x_1^2x_2^2=m^2$.

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=2$，所以，

$m^2-m-2=0$.

解得 $m=-1$(舍去)或 $m=2$.

故直线 l 过定点 $M(0,2)$.

(2)不妨设 $x_1>0$.

则由(1)得 $x_2=-\frac{2}{x_1}$.

由对称性得

$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}|OF||x_2|=\frac{1}{4x_1}$.

又 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle BOM}$

$=\frac{1}{2}|OM|(|x_1|+|x_2|)=x_1+\frac{2}{x_1}$,

则 $S_{四边形OABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}$

$=x_1+\frac{9}{4x_1}\geqslant 2\sqrt{x_1\cdot\frac{9}{4x_1}}=3$.

当且仅当 $x_1=\frac{9}{4x_1}$,即 $x_1=\frac{3}{2}$时,上式等号成立.

故四边形 $OABC$ 面积的最小值为 3.

三、(1)由条件知

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$.

由$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上递减,在区间$(0,1)$上递增,则$f'(0)=0$,得 $b=0$.

又$f(1)=0$,于是,$c=1-a$.

则$f(x)=-x^3+ax^2+1-a$,

$f'(x)=-3x^2+2ax$.

令$f'(x)=0$,得 $x_1=0,x_2=\frac{2a}{3}$.

因为$f(x)$在区间$(0,1)$上递增,且$f(x)$有三个零点,所以,$x_2=\frac{2a}{3}>1$,即 $a>\frac{3}{2}$.

故$f(2)=3a-7>-\frac{5}{2}$,即$f(2)$的取值范围是$\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$.

(2)由$\begin{cases}y=x-1,\\ y=-x^3+ax^2+1-a,\end{cases}$得

$(x-1)(x^2+(1-a)x+2-a)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或

$x^2+(1-a)x+2-a=0\left(a>\frac{3}{2}\right)$. ①

式①的判别式 $\Delta=a^2+2a-7\left(a>\frac{3}{2}\right)$.

当 $\Delta<0$,即$\frac{3}{2}<a<2\sqrt{2}-1$ 时,式①无实根;

当 $\Delta=0$,即 $a=2\sqrt{2}-1$ 时,式①有两个相等的实根;

当 $\Delta>0$,即 $a>2\sqrt{2}-1$ 时,式①有两个不等的实根.

而 $a=2$ 时,式①的两个根分别为 0、1.

故当$\frac{3}{2}<a<2\sqrt{2}-1$ 时,直线 l 与曲线 C 只有一个公共点;

当 $a=2\sqrt{2}-1$ 或 $a=2$ 时,直线 l 与曲线 C 有两个公共点;

当 $a>2\sqrt{2}-1$ 且 $a\neq 2$ 时,直线 l 与曲线 C 有三个公共点.

四、如图 6,联结 AB 并延长,与 PQ 交于点 M.

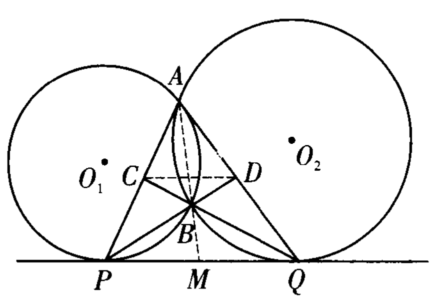

图 6

则 $MP^2=MB\cdot MA=MQ^2\Rightarrow MP=MQ$.

在$\triangle APQ$ 中,由塞瓦定理得

$\frac{AC}{CP}\cdot\frac{PM}{MQ}\cdot\frac{QD}{DA}=1\Rightarrow\frac{AC}{CP}=\frac{AD}{DQ}$

$\Rightarrow CD/\!/PQ$.

又$\angle MPB=\angle MAP$,故

$\triangle MPB\backsim\triangle MAP\Rightarrow\frac{PB}{AP}=\frac{PM}{AM}$.

类似地,$\frac{QB}{AQ}=\frac{QM}{AM}$.

因为 $PM=QM$,所以,

$\frac{PB}{AP}=\frac{QB}{AQ}\Rightarrow\frac{AP}{AQ}=\frac{PB}{QB}$.

2017 年全国高中数学联赛安徽赛区预赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005－6416(2018)01－0029－03

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 在不大于 2 017 的正整数中,被 12 整除但不被 20 整除的数共有______个.

2. 设复数 z 满足

$$\frac{1\,017z-25}{z-2\,017}=3+4\,\mathrm{i}.$$

则 $|z|=$______.

3. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, $DA=6$. 则四边形 $ABCD$ 的面积为______.

4. 设正八面体的边长为 1. 则其两个平行平面之间的距离为______.

5. 设平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}|=3,\ |2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}|=4.$$

则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 的最小值为______.

6. 已知过椭圆 $x^2+2y^2=3$ 的一个焦点作斜率为 k 的直线,与椭圆交于 A、B 两点. 若 $AB=2$,则 $|k|=$______.

7. 设 $\theta\in[0,2\pi]$ 满足对于 $x\in[0,1]$,均有

$$f(x)=2x^2\sin\theta-4x(1-x)\cos\theta+3(1-x)^2>0.$$

则 θ 的取值范围是______.

8. 设 n 为正整数. 随机选取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集 A、B. 则 $A\cap B$ 不是空集的概率为______.

二、解答题(共 86 分)

9. (21 分)如图 1,设 H 为锐角△ABC 的垂心,点 D 在直线 AC 上,$HA=HD$,四边形 $ABEH$ 为平行四边形. 证明:B、E、C、D、H 五

又 $CD/\!/PQ$,因此,

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{AC}{AD},\ \frac{PB}{QB}=\frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow AC\cdot BC=AD\cdot BD.$$

五、由柯西不等式得

$$\frac{a^2}{1+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{1+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{1+\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

故只需证明:$\dfrac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

由均值不等式及已知得

$$a+b+c=\frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\times3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{3}{2}.$$

由赫尔德不等式、均值不等式及已知得

$$(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^3$$

$$=(\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot b\cdot a}+\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{bc}\cdot c}+\sqrt[3]{a\cdot c\cdot\sqrt{ca}})$$

$$\leqslant(\sqrt{ab}+b+a)(b+\sqrt{bc}+c)(a+c+\sqrt{ca})$$

$$\leqslant\left(\frac{a+b}{2}+a+b\right)\left(b+\frac{b+c}{2}+c\right)\left(c+a+\frac{c+a}{2}\right)$$

$$=\frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)=\frac{27}{8}.$$

于是,$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant\dfrac{3}{2}$.

故 $\dfrac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\geqslant\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{3+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

因此,原不等式成立.

(刘康宁　提供)