

2017年全国高中数学联赛安徽赛区预赛

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2018)01-0029-03

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 在不大于2017的正整数中,被12整除但不被20整除的数共有_____个.

2. 设复数 z 满足

$$\frac{1017z-25}{z-2017} = 3+4i.$$

则 $|z| =$ _____.

3. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, $DA=6$. 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

4. 设正八面体的边长为1. 则其两个平行平面之间的距离为_____.

5. 设平面向量 α 、 β 满足

$$|\alpha+2\beta|=3, |2\alpha+3\beta|=4.$$

则 $\alpha \cdot \beta$ 的最小值为_____.

6. 已知过椭圆 $x^2+2y^2=3$ 的一个焦点作斜率为 k 的直线,与椭圆交于 A 、 B 两点. 若 $AB=2$,则 $|k| =$ _____.

7. 设 $\theta \in [0, 2\pi]$ 满足对于 $x \in [0, 1]$, 均有

$$f(x) = 2x^2 \sin \theta - 4x(1-x) \cos \theta + 3(1-x)^2 > 0.$$

则 θ 的取值范围是_____.

8. 设 n 为正整数. 随机选取 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的非空子集 A 、 B . 则 $A \cap B$ 不是空集的概率为_____.

二、解答题(共86分)

9. (21分) 如图1, 设 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 点 D 在直线 AC 上, $HA=HD$, 四边形 $ABEH$ 为平行四边形. 证明: B 、 E 、 C 、 D 、 H 五

又 $CD \parallel PQ$, 因此,

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AD}, \frac{PB}{QB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AC \cdot BC = AD \cdot BD.$$

五、由柯西不等式得

$$\frac{a^2}{1+\sqrt{bc}} + \frac{b^2}{1+\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{1+\sqrt{ab}}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

$$\text{故只需证明: } \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq \frac{1}{2}.$$

由均值不等式及已知得

$$a+b+c = \frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))$$

$$\geq \frac{1}{2} \times 3 \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3}{2}.$$

由赫尔德不等式、均值不等式及已知得

$$\begin{aligned} & (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})^3 \\ &= (\sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot b \cdot a} + \sqrt[3]{\sqrt{bc} \cdot c \cdot b} + \sqrt[3]{\sqrt{ca} \cdot a \cdot c})^3 \\ &\leq (\sqrt{ab} + b + a)(b + \sqrt{bc} + c)(a + c + \sqrt{ca}) \\ &\leq \left(\frac{a+b}{2} + a + b\right) \left(b + \frac{b+c}{2} + c\right) \left(c + a + \frac{c+a}{2}\right) \\ &= \frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a) = \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{故 } \frac{(a+b+c)^2}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}.$$

因此, 原不等式成立.

(刘康宁 提供)

点共圆.

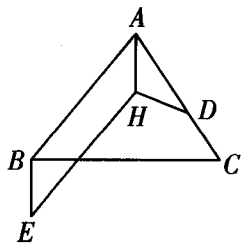


图 1

10. (21 分) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 证明:

$$0 < \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} < \frac{1}{3}.$$

11. (22 分) 设 $x, y \in [0, 1]$. 求

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1-xy}{1+y^2}}$$

的取值范围.

12. (22 分) 设递推数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 满足对于 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$a_{n+1} = |b_n - c_n|, b_{n+1} = |c_n - a_n|,$$

$$c_{n+1} = |a_n - b_n|.$$

证明: 对于任意正整数 a_1, b_1, c_1 , 存在正整数 k , 使得

$$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = b_k, c_{k+1} = c_k.$$

参 考 答 案

一、1. 60.

记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

注意到,

$$\left[\frac{2\ 017}{12} \right] - \left[\frac{2\ 017}{60} \right] = 168 - 33 = 135,$$

其中, 60 为 12 与 20 的最小公倍数.

2. 5.

设 $w = 3 + 4i$. 则

$$z = \frac{2\ 017w - 25}{w - 2\ 017} = \frac{2\ 017w - \bar{w}w}{w - 2\ 017}$$

$$= \frac{2\ 017 - \bar{w}}{2\ 017 - w} w.$$

故 $|z| = |w| = 5$.

3. $6\sqrt{10}$.

由余弦定理得

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\ &= CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos D. \end{aligned}$$

再由 A, B, C, D 四点共圆得

$$\angle B + \angle D = \pi.$$

$$\text{则 } \cos B = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2}{2(3 \times 4 + 5 \times 6)} = -\frac{3}{7}.$$

故 $S_{\text{四边形}ABCD}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B + \frac{1}{2} CD \cdot DA \sin D \\ &= \frac{1}{2} (3 \times 4 + 5 \times 6) \frac{\sqrt{40}}{7} = 6\sqrt{10}. \end{aligned}$$

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设正八面体的六个顶点的坐标为

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

则两个平行平面 $x + y + z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 之间的

$$\text{距离 } d = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

5. -170.

设 $\alpha + 2\beta = u, 2\alpha + 3\beta = v, |u| = 3, |v| = 4$.

由 $\alpha = 2v - 3u, \beta = 2u - v$, 得

$$\alpha \cdot \beta = -6|u|^2 - 2|v|^2 + 7u \cdot v.$$

当 $u \cdot v = -12$ 时,

$$\alpha \cdot \beta = -54 - 32 - 84 = -170 \text{ 为最小值.}$$

6. $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

计算知椭圆参数 $a = \sqrt{3}, b = c = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

设直线方程为 $y = k(x - c)$. 则点 A, B 的横坐标 x_1, x_2 满足

$$x^2 + 2k^2(x - c)^2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4k^2c}{1 + 2k^2}.$$

又椭圆的右准线方程为 $x = \frac{a^2}{c} = \sqrt{6}$, 再由

$$AB = \frac{c}{a} (2\sqrt{6} - x_1 - x_2),$$

解得 $|k| = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

$$7. \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right).$$

注意到, $2\sin \theta = f(1) > 0$.

设 $x \in (0, 1)$ 满足

$$2x^2 \sin \theta = 3(1-x)^2.$$

$$\text{则 } f(x) = 2x(1-x)(\sqrt{6\sin \theta} - 2\cos \theta) > 0.$$

又 $\sin \theta > 0$, 且 $\sqrt{6\sin \theta} - 2\cos \theta > 0$, 可得对于 $x \in [0, 1]$, 均有 $f(x) > 0$.

$$\text{由 } g(\theta) = \sqrt{6\sin \theta} - 2\cos \theta \text{ 在区间 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

上单调递增, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 于是, θ 的取值范围是

$$\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right).$$

$$8. \frac{4^n - 3^n}{(2^n - 1)^2}.$$

由于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 共有 2^n 个子集, 其中, C_n^k 个子集 X 满足 $|X| = k$, 2^{n-k} 个子集 Y 满足 $X \cap Y = \emptyset$ ($1 \leq k \leq n$).

故所求概率为

$$\frac{1}{(2^n - 1)^2} \sum_{k=1}^n C_n^k (2^n - 2^{n-k}) = \frac{4^n - 3^n}{(2^n - 1)^2}.$$

二、9. 由 $AH \perp BC, AH \parallel BE \Rightarrow BE \perp BC$.

由 $HC \perp AB, HE \parallel AB \Rightarrow HE \perp HC$.

于是, 点 B, E, C, H 均在以 EC 为直径的圆上.

再由 $BH \perp AD$ 及 $HA = HD$, 得 BH 垂直平分线段 AD .

则 $\angle HBD = \angle HBA$

$$= \frac{\pi}{2} - \angle BAC = \angle HCA.$$

从而, B, C, D, H 四点共圆.

因此, B, E, C, D, H 五点共圆.

10. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x > \sin x$.

事实上, 令 $f(x) = x - \sin x$. 则

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0.$$

故 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

因此, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$x > \sin x.$$

类似地, $\tan x > x$.

从而, 要证原命题, 只需证明

$$g(x) = \tan x - \sin x - 3(x - \sin x) > 0.$$

计算得

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3.$$

据均值不等式得

$$g'(x) \geq 3 \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cos x \cdot \cos x \right)^{\frac{1}{3}} - 3 = 0.$$

$$g'(x) = 0 \text{ 当且仅当 } x = \frac{\pi}{2}.$$

故 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

从而, $g(x) > g(0) = 0$.

11. 当 $x \geq y$ 时,

$$\frac{1+xy}{1+x^2}, \frac{1-xy}{1+y^2} \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow 2 \geq f(x, y) \geq \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+y^2}$$

$$\geq \frac{1+xy}{1+x^2} + \frac{1-xy}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \geq 1.$$

当 $x \leq y$ 时, 显然有

$$f(x, y) \geq \sqrt{\frac{1+xy}{1+x^2}} \geq 1, x + x^{-1} \geq y + y^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x, y)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{y-x}{x+x^{-1}}} + \sqrt{1 - \frac{x+y}{y+y^{-1}}}$$

$$\leq \sqrt{1 + \frac{y-x}{y+y^{-1}}} + \sqrt{1 - \frac{y-x}{y+y^{-1}}} \leq 2.$$

上述最后一个不等式用到了:

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 1 \text{ 时, } \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \leq 2.$$

由 $f(x, y)$ 的连续性及其

$$f(1, 1) = 1, f(0, 0) = 2,$$

知 $f(x, y)$ 的取值范围是 $[1, 2]$.

12. 对任意正整数 n , 用 A_n, B_n, C_n 分别表示 a_n, b_n, c_n 的升序排列.

2017 中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(一)

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2018)01-0032-05

第一试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知集合

$$A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}, B = \{x | x^2 - ax + 4 \geq 0\}.$$

若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是

_____.

2. 函数 $f(x) = 7\sin x + \sin 2x$ 的最大值为_____.

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$

的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 双曲线 C 与圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的一个交点为 P . 若 $\frac{|PF_1| + |PF_2|}{r}$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

4. 设 p 为素数. 若存在正整数 n , 使得 $p | (n^2 + 7n + 23)$, 则 p 的最小值为_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, AC = 4, BC = 5, I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心, P 为 $\triangle IBC$ (包括边界) 内一点. 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为_____.

6. 已知 P 是轴截面为等腰直角三角形的圆锥的顶点, PA 为圆锥的母线, B 为圆

锥底面内的动点. 则 $\frac{PA+AB}{PB}$ 的最大值为

_____.

7. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 规定 $S_0 = 0$. 若对任意的 $n \in \mathbf{Z}_+$, 均有

$$\frac{a_n}{2017} = -\frac{2017 + S_{n-1}}{n},$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{2017} 2^n a_n = \text{_____}.$$

8. 定义在集合 $\{x \in \mathbf{Z}_+ | 1 \leq x \leq 12\}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x+1) - f(x)| = 1 (x = 1, 2, \dots, 11),$$

且 $f(1), f(6), f(12)$ 成等比数列. 若 $f(1) = 1$, 则满足条件的不同函数 $f(x)$ 的个数为

_____.

二、解答题(共 56 分)

9. (16 分) 已知函数

$$f(x) = 3\lg(x+2) - \log_2 x,$$

集合 $M = \{n \in \mathbf{Z} | f(n^3 - 3n^2 - 10n + 32) \geq 0\}$.

求 M .

10. (20 分) 已知

$$\text{椭圆 } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 为右焦点, $A(-a, 0)$, $|AF|$

下面证明: 存在正整数 n , 使得 A_n, B_n, C_n 中至少有两项相等, 即

$$A_n = B_n \leq C_n \text{ 或 } A_n \leq B_n = C_n.$$

否则, 对任意正整数 n , 均有

$$A_n < B_n < C_n.$$

$$\text{故 } A_{n+1} = \min\{B_n - A_n, C_n - B_n\} > 0,$$

且 $C_{n+1} = C_n - A_n < C_n$.

$$\text{于是, } C_{n+2} = C_{n+1} - A_{n+1} < C_n.$$

从而, 对任意正整数 $k, C_{2k+1} \leq C_1 - k$.

当 $k > C_1$ 时, $C_{2k+1} < 0$, 矛盾.

因此, 存在正整数 n , 使得 A_n, B_n, C_n 中至少有两项相等. 无论 $A_n = B_n \leq C_n$ 或 $A_n \leq B_n = C_n$, 均有

$$A_{n+1} = 0, B_{n+1} = C_{n+1}.$$

$$\text{故 } a_{n+2} = a_{n+1}, b_{n+2} = b_{n+1}, c_{n+2} = c_{n+1}.$$

(陈发来 提供)