一个久考不衰的抛物线的性质

山东省实验中学　250109　关泺萌

性质　如图 1,已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$,点 $P(c,0)$,$Q(-c,0)$,过点 P 的直线与抛物线交于 A、B 两点,则 QA、QB 与 x 轴所成的锐角相等.

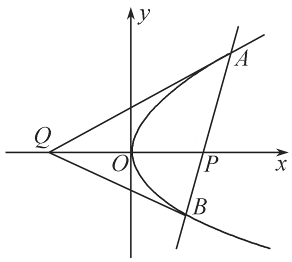

图 1

证明　当直线垂直于 x 轴时,由对称性可知 QA,QB 与 x 轴所成的锐角相等.

当直线不垂直于 x 轴时,设直线方程为:$y=k(x-c)$.

由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k(x-c),\end{cases}$ 消去 x,得 $ky^2-2py-2pck=0$.

$\Delta=4p^2+8pck^2>0$,$y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}$,$y_1y_2=-2pc$,

$$k_{QA}+k_{QB}=\frac{y_1}{x_1+c}+\frac{y_2}{x_2+c}$$

$$=\frac{c(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1}{(x_1+c)(x_2+c)}=\frac{c(y_1+y_2)+\frac{y_1y_2}{2p}(y_1+y_2)}{(x_1+c)(x_2+c)}$$

$$=\frac{(y_1+y_2)(2pc+y_1y_2)}{2p(x_1+c)(x_2+c)}=\frac{(y_1+y_2)(2pc-2pc)}{2p(x_1+c)(x_2+c)}=0.$$

所以 QA,QB 与 x 轴所成的锐角相等.

这是抛物线的一条重要性质,尽管这条性质很多同学比较熟悉.但是这条性质的精彩之处在于它既是抛物线的一个"传统"性质,又是一个"经典"的结论.所以很受各类命题人员(特别是高考命题人员)的青睐,很多高考试题是以此性质为切入点进行编拟的.

例 1　(2013 年高考陕西卷理)已知动圆过定点 $A(4,0)$,且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(Ⅰ)求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(Ⅱ)已知点 $B(-1,0)$,设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P,Q,若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线,证明直线 l 过定点.

分析　此题的(Ⅱ)实质上是上面性质的一种变式说法,或者说是换了一个新的角度来展示上面的性质.易知直线 l 恒过定点(1,0).具体解法略,以下同.

例 2　(2015 年高考新课标 Ⅰ 理)在直角坐标系 xOy 中,曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $y=kx+a(a>0)$ 交于 M、N 两点.

(Ⅰ)当 $k=0$ 时,分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(Ⅱ)y 轴上是否存在点 P,使得当 k 变动时,总有 $\angle OPM=\angle OPN$?说明理由.

分析　此题的(Ⅱ)实质上也是上面性质的一种呈现形式,只不过是把焦点轴改成了 y 轴.易知存在点 $P(0,-a)$,使得当 k 变动时,总有 $\angle OPM=\angle OPN$.

例 3　(2015 年高考福建文)已知点 F 为抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点,点 $A(2,m)$ 在抛物线 E 上,且 $|AF|=3$.

(Ⅰ)求抛物线 E 的方程;

(Ⅱ)已知点 $G(-1,0)$,延长 AF 交抛物线 E 于点 B,证明:以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆,必与直线 GB 相切.

分析　此题的(Ⅱ)中以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆,必与直线 GB 相切,说明 x 轴是 $\angle AGB$ 的角平分线.实质上还是 GA,GB 与 x 轴所成的锐角相等的一种变式说法.

例 4　(山东省实验中学 2015 年高二期末考试)在直角坐标系中,曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $y=kx+a(a>0)$ 交于 M,N 两点,点 $A(0,a)$.

(Ⅰ)当 $k=0$ 时,分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(Ⅱ)在 y 轴上是否存在异于 A 的一点 P,使得当 k 变动时,总有 $\dfrac{|PM|}{|MA|}=\dfrac{|PN|}{|NA|}$,说明理由.

分析　此题系 2015 年山东省实验中学高二期末考试题.据了解,此题得分率很低.一个主要原因是很多同学不能把"$\dfrac{|PM|}{|MA|}=\dfrac{|PN|}{|NA|}$"转化为角的平分线问题.事实上,若存在异于 A 的一点 P,使得当 k 变动时,总有 $\dfrac{|PM|}{|MA|}=\dfrac{|PN|}{|NA|}$,即说 y 轴是 $\angle APB$ 的平分线.即 PA,PB 与 y 轴所成的锐角相等.

以上几例不难看出,此文所涉及的抛物线的性质仍然是高考和各类考试的命题热点之一.当呈现在同学们面前时可能进行了某种程度的改头换面,或适当的变式与包装.只要同学们能看透变式与包装背后的本质性的东西.那么题目无论如何变幻莫测,解决起来我们总能游刃有余和得心应手.