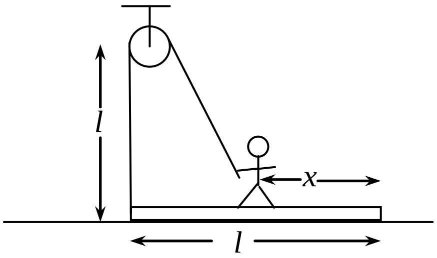
第 29 届复赛模拟赛题 第三套

答案及评分标准

满分 160 分

第一题（22 分）

一个质量为 m 的人站在长度为 l 质量为 M 的木板上，木板和地面摩擦系数为 μ。要求人在不同的位置都能将自己和木板拉离地面（木板绕着右方端点转起来，而不发生滑动，人的脚和木板之间用胶水黏起来，不会分离和华东）。问摩擦系数 μ 应当满足的关系。取 m/M=2。



【解】:

力和力矩平衡得

以右方点为支点，对木板写力矩方程：$Tl - Mg\dfrac{l}{2} - (mg - T\cos\theta)(l - l\tan\theta) = 0$ （4 分）

竖直方向受力平衡 $N + T + T\cos\theta = mg + Mg$ （3 分）

水平方向受力平衡 $f = T\sin\theta$ （3 分）

不滑动 $\mu N \geq f$ （2 分）

解得 $\mu \geq \dfrac{5\sin\theta - 4\sin\theta\tan\theta}{1 + \cos\theta - 2\sin\theta + 4\tan\theta}$ （5 分）

数值解得：

$\mu \geq \dfrac{5\sin\theta - 4\sin\theta\tan\theta}{1 + \cos\theta - 2\sin\theta + 4\tan\theta} \geq 0.455$，当 $\theta = 0.4061$ 取到（5 分）

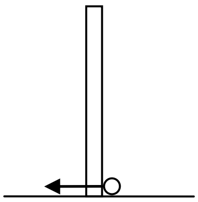
第二题（20 分）

【梯子不用时请横放】

一个梯子用完了，靠在墙上，小明同学不小心一脚踢到了梯子上，将梯子踢飞了，脚肿了不要紧，要紧的时砸到了花花草草，甚是不安。现在我们来粗略还原一下现场。为了简化问题，将梯子视为质量为 M、长度为 L 的匀质棒子，竖直靠在墙上。梯子与地面、墙面的摩擦系数忽略不计，小明同学的脚视为质量为 m 的质点。脚的初速度方向也平行于墙与地面的交线，脚踢到梯子时，碰撞点为梯子的最下方，视为完全非弹性碰撞，且碰撞时间非常短，之后由于小明疼痛难耐，脚不再与梯子接触。（均匀棒绕质心的转动惯量为 $I=ML^2/12$）

1）求小明以初速 v_0 踢完梯子瞬间梯子的运动状态。

2）若小明这一脚踢得很重，刚刚踢完，梯子就直接“飞”起来了（即接触点与地面分离），问脚的初速度至少为多少。



【解】:

（1）设撞击之后梯子的质心速度为 v_x，角速度为 ω，撞击之后脚的速度为 v_1

由动量守恒：$mv_1+Mv_x=mv_0$　　（3 分）

以地面为参照系，以初态梯子的质心为参照点写角动量守恒：

$$mv_1\frac{l}{2}+\frac{1}{12}Ml^2\omega=mv_0\frac{l}{2}$$　　（4 分）

由能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}Mv_x{}^2+\frac{1}{2}M\frac{l^2}{12}\omega^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$　　（4 分）

（这个方程也可以写成相对速度不变 $\omega r+v_x=v_1$）

解得

$$\omega=\frac{6mv_0}{(4m+M)l},\quad v_1=\frac{4mv_0}{4m+M},\quad v_x=\frac{mv_0}{4m+M}$$　（5 分）

要求开始的时候能飞起来，需 $\omega^2\frac{l}{2}>g$，所以 $v_0>\frac{(4m+M)}{6m}\sqrt{2gl}$（4 分）

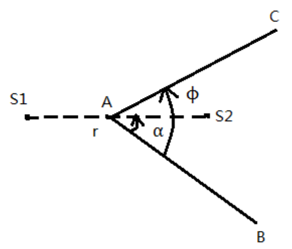
第三题（20 分）

某军用无线电技术利用干涉可以保证通讯的安全性，某指挥部的无线电发射基地设在 A 处，B、C 为两不同作战单位，可接收无线电信号，为防止泄密，指挥部希望与其中一个作战单位通讯时，另一个作战单位不能同时收到信号。因此指挥部架设了两根发射天线 S1 和 S2，可以同时发出信号，并且两天线所发出信号的相位差可在每次发射前调整，采用的无线电波波长为λ，如图所示，AB 方向线朝 AC 方向线逆时针转角$\phi<\pi$。图中 A、S1、S2 三点共线，连线长度为 r，AB 方向线沿逆时针方向到 S_1S_2 方向线的转角记为α（顺时针方向为负），A、B 间距和 A、C 间距都远大于 r 和λ。

（1）取不同的α，找出 r 可取的最小值$r_{\min}$。

（2）取$r_{\min}$，画出 S_1S_2 连线相对 AB 连线和 AC 连线的方位图，标出相应的α角旋转方向。

（3）取$r_{\min}$，对给定的发射功率，为使 B 处收到的信号最强，试求输入 S_1S_2 之间信号的相位差。



【解】:

（1） 干涉时，由于要求其中一处的信号是完全加强的，另一处是完全相消的，则两信号源发射信号到 B 的相位差与到 C 的相位差之差，应为正负半波长

$$r\cos\alpha - r\cos(\phi-\alpha) = \pm\frac{\lambda}{2}$$（4 分）

考虑到 r 为正值，得到

$$r=\frac{\lambda}{2\left|\cos\alpha-\cos(\phi-\alpha)\right|}$$

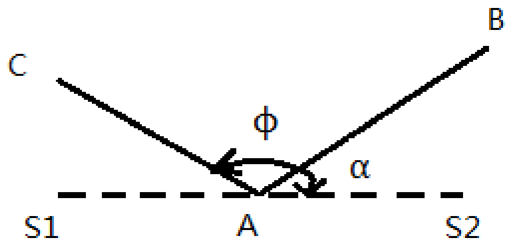
利用和差化积公式得到

$$r=\frac{\lambda}{4\sin\frac{\phi}{2}\left|\sin(\frac{\phi}{2}-\alpha)\right|}$$(4 分)

当$\alpha=\frac{\pi-\phi}{2}<0$时，有

$$r_{\min}=\frac{\lambda}{4\sin\frac{\phi}{2}}$$（2 分）

（2） 由于$\alpha<0$如图



（2 分）

（3） 此时在 B 点接收到的相位差为

$L = r\cos\alpha$ （3 分）

设 S_1 超前 θ 相位，则

$L + \frac{\theta}{2\pi}\lambda = k\lambda$ （3 分）

解得

$\theta = \frac{4k-1}{4}2\pi$ （2 分）

第四题（20 分）

三叶草

一根特殊的弹簧，原长为 0，当长度$0<x<R$时，弹力为$F=-6kx$，当长度$R<x<2R$时，弹力$\vec{F}=-k\vec{x}$。将弹簧一端连在在光滑水平桌面上的固定点上，可自由转动，另一端系着质量为 m 的小球。现在将小球拉至 $2R$ 位置，并以垂直于弹簧的初速$v_0=0.7877\sqrt{\frac{k}{m}}R$释放。

（1） 求出小球最靠近原点的时候的速度大小，以及和原点的距离。

（2） 求出从释放小球到小球第一次最靠近原点的过程中，弹簧的方向转过了多少角度。

（3） 定性描绘小球的轨迹。

【解】:

（1） 写出势能函数

$$E_p=\frac{1}{2}6kx^2(0<x<R)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}5kR^2(R<x<2R)$$ （2 分）

总能量$E=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{9}{2}kR^2$（2 分）

假设在最近点距离为b_0，由角动量守恒，此时速度为$\frac{2v_0R}{b_0}$

由能量守恒：$E=\frac{1}{2}m(\frac{2v_0R}{b_0})^2+\frac{1}{2}6k{b_0}^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{9}{2}kR^2$

解得$b_0=0.5684R$（2 分）

（2） 在$|\vec{x}|>R$和$|\vec{x}|<R$区域分别在两个正交的方向上做简谐振动。（3 分）

在$|\vec{x}|>R$区域，假设初态相位为 0，到达$|\vec{x}|=R$相位为ϕ_1

则有$(2R\cos\phi_1)^2+(0.7877R\sin\phi_1)^2=R^2$ 有$\phi_1=70.42°$，（2 分）

此时转过的角度为$\varphi_1=\arctan(\frac{0.7877\sin\phi_1}{2\cos\phi_1})=47.91°$ （2 分）

在$|\vec{x}|<R$区域，假设最近点相位为 0，反向到达$|\vec{x}|=R$相位为ϕ_2

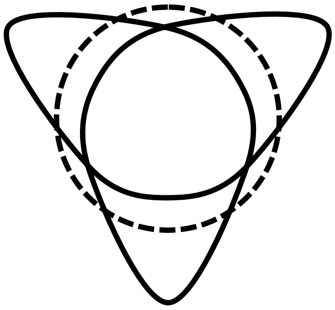
两个方向振幅分别为$b_0=0.5684R$，$a_0=\frac{v}{\sqrt{6k/m}}=\frac{2Rv_0}{b_0\sqrt{6k/m}}=1.1315R$ （2 分）

有$(b_0\cos\phi_2)^2+(a_0\sin\phi_2)^2=R^2$ 有$\phi_2=57.24°$，从$|\vec{x}|=R$到最近点转过的角度

$\varphi_2=\arctan(\frac{a_0\sin\phi_2}{b_0\cos\phi_2})=72.09°$ （2 分）

总共转过角度$\varphi_1+\varphi_2=120.00°$ （1 分）

（3） 画出三叶草（2 分）



p.s.传说中四片叶子的三叶草常常作为幸运的代表，其实仔细想想应当是变异的产物。换句话说变态产物常幸运，智障儿童欢乐多

第五题（20 分）

【某萝莉的超电磁炮】

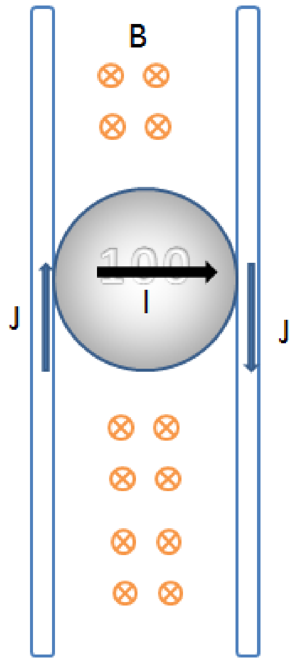
御坂美琴的绝招之一是高速射出硬币以打击目标，现在我们建立简单模型对其进行分析。

设美琴产生的高压击穿空气，产生两条很长的半径为 r，电流密度为 J 的等离子柱，中间是通有电流的半径为 R、质量为 m 的硬币，电流 I 穿过硬币，I 远小于等离子柱中的电流（如图）。

1） 若硬币最左侧所在位置的磁感应强度与硬币中心处磁感应强度的差别小于 10%，即可视为匀强磁场，试问可以将其视为匀强磁场的 r、R 之间关系。

2） 在 1）问的条件下，以硬币中心处的磁感应强度近似表示这个准均匀磁场。若美琴的能力能够使等离子柱长达 20m，沿着竖直方向分布，要求能将硬币以速度 $v=20m/s$ 发射，则等离子体柱中的电流密度至少为多少？ 取 g=9.8m/s^2, r=30mm, R=11.3mm, m=4.8g, I=10A，

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}H/m$



【解】:

1）感应强度反比于与离子柱中心的距离，

$$\frac{2}{R+r}\times110\%\geq\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2R}\geq\frac{2}{R+r}\times90\%$$

故 $r\geq2.16R$ （6 分）

2） $F=BIL=2BIR$；（3 分）

$$B=2\times\frac{\mu_0J\pi r^2}{2\pi(r+R)}$$ （3 分）

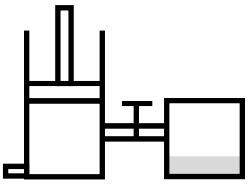
加速度 $a_{\min}=\dfrac{v^2}{2S}=10m/s^2$ （3 分）

故 $F=2\dfrac{\mu_0Jr^2}{r+R}IR=m(a_{\min}+g)$ （2 分）

解得 $J=1.5\times10^7A/m^2$ （3 分）

第六题（20 分）

如图是一个老式的蒸汽机。右边是一个体积为V_0的气缸，内部存有一些水，下方有火炉加热。左边也是一个体积为V_0的气缸，上方是一个活塞，忽略活塞质量和摩擦。活塞上方是一个传动杆，连接到机械上。蒸汽机的工作流程是这样：某时刻左右气缸内均为温度为$T_0 = 273K$的饱和水蒸气，封闭中间的阀门，将传动杆练到负载上，通过冷却器将左边活动温度迅速降到$T_1 = 243K$，然后活塞开始向下运动，拉动传动杆做功。几乎平衡之后，将左边气缸水排出，将传动杆与负载断开，打开中间的阀门，饱和蒸汽将活塞顶起来，使得左边气体积到达V_0，回到初始状态，反复循环。请计算此蒸汽机的热机效率的最大值，以及一个循环中蒸汽机做功的最大值。（大气压为p_0，$243K$的水蒸气饱和蒸气压为λp_0，水的密度远大于水蒸气密度，活塞底面积为S，水蒸气的摩尔质量为μ，普适气体常量为R，$273K$温度下，单位质量的水的汽化热为L）



【解】:

由于左侧温度始终为 343K，故压强始终为λp_0（4 分）

从而有效功为$W = Fh = (p_0 - \lambda p_0)Sh = (1-\lambda)p_0 V_0$（5 分）

每次循环，蒸汽机做功使得$n = \dfrac{P_0 V_0}{RT_0}$的液体变成气体。（4 分）

故总功$W_{总} = \mu n L = \dfrac{\mu L P_0 V_0}{RT_0}$（5 分）

故热机效率为$\eta = \dfrac{W}{W_{总}} = \dfrac{(1-\lambda)RT_0}{\mu L}$（2 分）

第七题（20 分）

一个质子以速度 v 撞向一个静止的质子，结果撞完之后变成了三个质子加一个反质子。为了让反应能够进行，入射的质子速度至少应当为多少。如果改为两个质子对撞，两个质子的速度相同，则速度 v' 至少应当为多少？

【解】:

（1）一个动的质子撞静质子，相对质心看，与前者相同，故能量最小的情形下，三个质子和一个反质子速度相同。

故 $m_p c^2+\sqrt{P^2c^2+m_p{}^2c^4}=4\sqrt{(\frac{P}{4})^2c^2+m_p{}^2c^4}$ 其中 $P=\frac{m_p v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ （7 分）

解得 $v=\frac{4\sqrt{3}}{7}c$ （3 分）

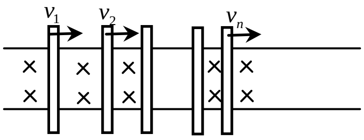
（2）两个质子相同速度对撞时，应有总动量为 0.

故 $2\sqrt{P^2c^2+m_p{}^2c^4}=4m_p c^2$ 其中 $P=\frac{m_p v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ （7 分）

解得 $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$（3 分）

第八题（18 分）

如图，在两根水平放置的间距为 l 的无电阻的金属光滑轨道上，垂直放置了 n 根质量为 m，电阻为 r 的导体棒，初始状态第 i 根棒的速度为 v_i，当作已知量。假设每根棒之间的间距都足够远，直到各棒相对静止的时候都没有发生碰撞。求从初始状态开始到各棒相对静止，第 1 根棒跟第 n 根棒之间的相对位移为多少？



【解】:

考虑两金属导轨的电势差，应有 $U = Blv_i - I_i r$（I 为从下到上的电流）（4 分）

由基尔霍夫定律 $\sum_1^n I_i = 0$（4 分）

故 $nU = \sum_1^n Blv_i$，$U = Bl\bar{v}$（2 分）

带入得 $I_i r = Bl(v_i - \bar{v})$

故由受力分析及牛二律 $a_i = -\dfrac{B^2 l^2 (v_i - \bar{v})}{mr}$（2 分）

由加速度定义 $\Delta v_i = -\dfrac{B^2 l^2 (v_i - \bar{v})}{mr}\Delta t = -\dfrac{B^2 l^2}{mr}\Delta x_i$ 其中 x_i 为相对质心的位置改变量。

两侧求和得 $\bar{v} - v_i = -\dfrac{B^2 l^2}{mr} x_i$（5 分）

故第 1 根棒跟第 n 根棒之间的相对位移为 $x_{1n} = x_n - x_1 = \dfrac{mr(v_n - \bar{v})}{B^2 l^2} - \dfrac{mr(v_1 - \bar{v})}{B^2 l^2} = \dfrac{mr(v_n - v_1)}{B^2 l^2}$（1 分）