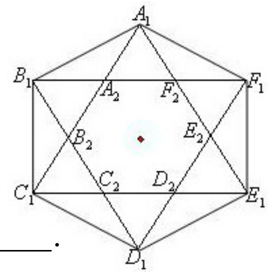
2012上海市高中数学竞赛（新知杯）试卷

【说明】解答本试卷不得使用计算器

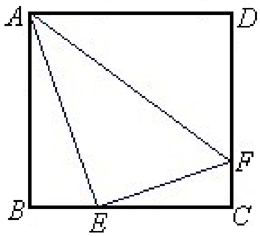
一、填空题（本题满分60分，前4题每小题7分，后4小题每小题8分）



1．如图，正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为1，它的6条对角线又围成一个正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，如此继续下去，则所有这些六边形的面积和是_______.

2．已知正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 满足：$\dfrac{a_j}{a_i}>\dfrac{3}{2},1\le i<j\le 10$，则 a_{10} 的最小可能值是______.

3．若 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\dfrac{17}{6}$，$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=-\dfrac{4}{5}$，$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=-\dfrac{17}{5}$，则 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=$___________.



4．已知关于 x 的方程 $\lg(kx)=2\lg(x+1)$ 仅有一个实数解，则实数 k 的取值范围是___________.

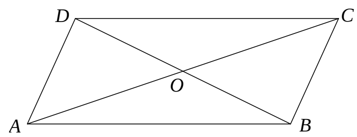
5．如图，ΔAEF 是边长为 x 的正方形 $ABCD$ 的内接三角形，已知 $\angle AEF=90°$，$AE=a,EF=b,a>b$，则 $x=$___________.

6．方程 $2^m\cdot 3^n-3^{n+1}+2^m=13$ 的非负整数解 $(m,n)=$___________.

7．一个口袋里有5个大小一样的小球，其中两个是红色的，两个是白色的，一个是黑色的，依次从中摸出5个小球，相邻两个小球的颜色均不相同的概率是___________.（用数字作答）

8．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\dfrac{2(n+1)}{n+2}a_{n+1}-\dfrac{n}{n+2}a_n,n=1,2,\cdots$.若 $a_m>2+\dfrac{2011}{2012}$，则正整数 m 的最小值为___________.

二、解答题



9．（本题满分14分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=x$，$BC=1$，对角线 AC 与 BD 的夹角 $\angle BOC=45°$，记直线 AB 与 CD 的距离为 $h(x)$．求 $h(x)$ 的表达式，并写出 x 的取值范围．

10．（本题满分14分）给定实数 $a>1$，求函数 $f(x)=\dfrac{(a+\sin x)(4+\sin x)}{1+\sin x}$ 的最小值．

11．（本题满分16分）正实数 x,y,z 满足 $9xyz+xy+yz+zx=4$；

求证：（1）$xy+yz+zx\ge\dfrac{4}{3}$；（2）$x+y+z\ge 2$．

12．（本题满分16分）给定整数 $n(\ge 3)$，记 $f(n)$ 为集合 $\{1,2,\cdots,2^n-1\}$ 的满足如下两个条件的子集 A 的元素个数的最小值：①$1\in A,\ 2^n-1\in A$；②A 中的元素（除1外）均为 A 中的另两个（可以相同）元素的和．

（1）求 $f(3)$ 的值；

（2）求证：$f(100)\le 108$．

2012 上海市高中数学竞赛（新知杯）参考答案

1、$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$　　2、92　　3、11　　4、$(-\infty,0)\cup\{4\}$

5、$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+(a-b)^2}}$　　6、$(3,\ 0)$，$(2,\ 2)$　　7、$\dfrac{2}{5}$　　8、4025

9．**解**　由平行四边形对角线平方和等于四条边的平方和得

$$OB^2+OC^2=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2)=\frac{1}{2}(x^2+1). \quad ① \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（2 分）}$$

在△OBC 中，由余弦定理 $BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos\angle BOC$，

所以　$OB^2+OC^2-\sqrt{2}OB\cdot OC=1$，　②

由①，②得　$OB\cdot OC=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{2}}$．　③　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（5 分）

所以：$S_{ABCD}=4S_{\Delta OBC}=4\cdot\dfrac{1}{2}OB\cdot OC\sin\angle BOC=\sqrt{2}OB\cdot OC=\dfrac{x^2-1}{2}$，

故　：$AB\cdot h(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$，　所以　：$h(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$．　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（10 分）

由③可得，$x^2-1>0$，故 $x>1$．

因为 $OB^2+OC^2\ge 2OB\cdot OC$，结合②，③可得：$\dfrac{1}{2}(x^2+1)\ge 2\cdot\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{2}}$，

解得（结合 $x>1$）　$1<x\le\sqrt{2}+1$．

综上所述，$h(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$，$1<x\le\sqrt{2}+1$．　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（14 分）

10．**解**　$f(x)=\dfrac{(a+\sin x)(4+\sin x)}{1+\sin x}=1+\sin x+\dfrac{3(a-1)}{1+\sin x}+a+2$．

当 $1<a\le\dfrac{7}{3}$ 时，$0<\sqrt{3(a-1)}\le 2$，此时：$f(x)=1+\sin x+\dfrac{3(a-1)}{1+\sin x}+a+2\ge 2\sqrt{3(a-1)}+a+2$，

且当 $\sin x=\sqrt{3(a-1)}-1\left(\in(-1,1]\right)$ 时不等式等号成立，故 $f_{\min}(x)=2\sqrt{3(a-1)}+a+2$．　$\cdots\cdots\cdots$（6 分）

当 $a>\dfrac{7}{3}$ 时，$\sqrt{3(a-1)}>2$，此时“耐克”函数 $y=t+\dfrac{3(a-1)}{t}$ 在 $\left(0,\sqrt{3(a-1)}\right]$ 内是递减，

故此时 $f_{\min}(x)=f(1)=2+\dfrac{3(a-1)}{2}+a+2=\dfrac{5(a+1)}{2}$．

综上所述，$f_{\min}(x)=\begin{cases}2\sqrt{3(a-1)}+a+2, & 1<a\le\dfrac{7}{3};\\ \dfrac{5(a+1)}{2}, & a>\dfrac{7}{3}.\end{cases}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（14 分）

11．**证**　（1）记 $t=\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$，由平均不等式：$xyz=\left(\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}\right)^{\frac{3}{2}}\le\left(\dfrac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（4 分）

于是　$4=9xyz+xy+yz+zx\le 9t^3+3t^2$，

所以　$(3t-2)(3t^2+3t+2)\ge 0$，

而 $3t^2+3t+2>0$，所以 $3t-2\ge 0$，即 $t\ge\dfrac{2}{3}$，从而 $xy+yz+zx\ge\dfrac{4}{3}$．　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（10 分）

（2）又因为：$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$，

所以 $$(x+y+z)^2 \ge 4,$$

故 $$x+y+z \ge 2.$$ …………………（16 分）

12. **解**（1）设集合 $A \subseteq \{1,2,\cdots,2^3-1\}$，且 A 满足（a），（b）. 则 $1 \in A,\ 7 \in A$. 由于 $\{1,m,7\}\ (m=2,3,\cdots,6)$ 不满足（b），故 $|A|>3$.

又 $\{1,2,3,7\},\{1,2,4,7\},\{1,2,5,7\},\{1,2,6,7\},\{1,3,4,7\},\{1,3,5,7\},\{1,3,6,7\}$，$\{1,4,5,7\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\}$ 都不满足（b），故 $|A|>4$.

而集合 $\{1,2,4,6,7\}$ 满足（a），（b），所以 $f(3)=5$. …………………（6 分）

（2）首先证明：$f(n+1) \le f(n)+2,\quad n=3,4,\cdots$. ①

事实上，若 $A \subseteq \{1,2,\cdots,2^n-1\}$，满足（$a$），（$b$），且 A 的元素个数为 $f(n)$.

令 $B=A \cup \{2^{n+1}-2,\ 2^{n+1}-1\}$，由于 $2^{n+1}-2>2^n-1$，故 $|B|=f(n)+2$.

又 $2^{n+1}-2=2(2^n-1),\ 2^{n+1}-1=1+(2^{n+1}-2)$，所以，集合 $B \subseteq \{1,2,\cdots,2^{n+1}-1\}$，且 B 满足（a），（b）. 从而：$f(n+1) \le |B| = f(n)+2$. …………………（10 分）

其次证明：$f(2n) \le f(n)+n+1,\quad n=3,4,\cdots$. ②

事实上，设 $A \subseteq \{1,2,\cdots,2^n-1\}$ 满足（a），（b），且 A 的元素个数为 $f(n)$.

令 $B=A \cup \{2(2^n-1),\ 2^2(2^n-1),\cdots,2^n(2^n-1),2^{2n}-1\}$，

由于 $$2(2^n-1)<2^2(2^n-1)<\cdots<2^n(2^n-1)<2^{2n}-1,$$

所以 $B \subseteq \{1,2,\cdots,2^{2n}-1\}$，且 $|B|=f(n)+n+1$.

而 $2^{k+1}(2^n-1)=2^k(2^n-1)+2^k(2^n-1),\ k=0,1,\cdots,n-1$，　$2^{2n}-1=2^n(2^n-1)+(2^n-1)$，

从而 B 满足（a），（b），于是：$f(2n) \le |B| = f(n)+n+1$. …………………（14 分）

由①，②得 $$f(2n+1) \le f(n)+n+3.$$ ③

反复利用②，③可得
$$\begin{aligned} f(100) &\le f(50)+50+1 \le f(25)+25+1+51 \\ &\le f(12)+12+3+77 \le f(6)+6+1+92 \\ &\le f(3)+3+1+99=108. \end{aligned}$$ …………………（16 分）

2011年新知杯上海市高中数学竞赛试题

2011年3月27日　　上午8：30——10：30

说明：解答本试题不得使用计算器

一、填空题（本题满分60分，前4小题每题7分，后4小题每题8分）

1. 方程组$\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1 \\ x+y=1 \end{cases}$的解集为____________.

2. 在平面直角坐标系中，长度为1的线段AB在x轴上移动（点A在点B的左边），点P、Q的坐标分别为$(0,1)$、$(1,2)$，则直线AP与直线BQ交点R轨迹的普通方程为____.

3. 已知M是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$在第一象限弧上的一点，$MN\perp y$轴，垂足为$N$，当$\Delta OMN$的面积最大时，它的内切圆的半径$r=$__________

4. 已知ΔABC外接圆半径为1，角A、B、C的平分线分别交ΔABC外接圆于A_1、B_1、C_1，则$\dfrac{AA_1\cos\dfrac{A}{2}+BB_1\cos\dfrac{B}{2}+CC_1\cos\dfrac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$的值为______.

5. 设$f(x)=a\sin\left[(x+1)\pi\right]+b\sqrt[3]{x-1}+2$，其中$a$、$b$为实常数，若$f(\lg 5)=5$，则$f(\lg 20)$的值为________.

6. 在平面直角坐标系中，O为坐标原点，点$A(3,a)$，$B(3,b)$使$\angle AOB=45^0$，其中a、b均为整数，且$a>b$，则满足条件的数对(a,b)共有________组.

7. 已知圆C的方程为$x^2+y^2-4x-2y+1=0$（圆心为C），直线$y=\left(\tan 10^0\right)x+\sqrt{2}$与圆$C$交于$A$、$B$两点，则直线$AC$，$BC$倾斜角之和为_______.

8. 甲、乙两运动员乒乓球比赛在进行中，甲必须再胜2局才最后获胜；乙必须再胜3局才最后获胜. 若甲、乙两人每局取胜的概率都为$\dfrac{1}{2}$，则甲最后获胜的概率是________.

二、解答题：

9.（本题满分为14分）对于两个实数a、b，$\min\{a,b\}$表示a、b中较小的数，求所有非零实数x，使$\min\left\{x+\dfrac{4}{x},4\right\}\geq 8\cdot\min\left\{x,\dfrac{1}{x}\right\}$.

10. （本题满分为 14 分）如图，在 ΔABC 中，O 为 BC 中点，点 M，N 分别在边 AB，AC 上，且 $AM=6$，$MB=4$，$AN=4$，$NC=3$，$\angle MON=90^0$. 求 $\angle A$ 的大小.

11. （本题满分为 16 分）对整数 k，定义集合 $S_k=\left\{n\middle|50k\le n\le 50\left(k+1\right),n\in Z\right\}$，问 S_0，S_1，S_2，…，S_{599} 这 600 个集合中，有多少个集合不含完全平方数？

12. （本题满分为 16 分）求所有大于 1 的正整数 n，使得对任意正实数 x_1，x_2，…，x_n，都有不等式 $\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2\ge n\left(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1\right)$.

2011 年上海市高中数学竞赛(新知杯)试题解答及评分参考意见

一. 填空题 $(7'\times 4+8'\times 4=60')$

1. $\{(0,1),(2,-1),(-3,4),(-4,5)\}$;　　2. y(x-2)=-2;　　3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　4. 2;

5. -1;　　6. 6;　　7. 200°;　　8. $\frac{11}{16}$.

二. 解答题

9. 解: 当 $x>0$ 时, $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$, 当 $x<0$ 时, $x+\frac{4}{x}\leq -4<4$, 故

$$\min\left\{x+\frac{4}{x},4\right\}=\begin{cases}4, & x>0;\\ x+\frac{4}{x}, & x<0.\end{cases}$$

又 $\min\left(x,\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x}, -1<x<0 或 x>1;\\ x, x\leq -1 或 0<x\leq 1.\end{cases}$　　(4')

所以有以下四种情形:

(1) 当 $x>1$ 时, 原不等式为 $4\geq\frac{8}{x}$, $x\geq 2$. 此时, $x\in[2,+\infty)$.

(2) 当 $0<x\leq 1$ 时, 原不等式为 $4\geq 8x, x\leq\frac{1}{2}$. 此时, $x\in(0,\frac{1}{2}]$.　　(9')

(3) 当 $-1<x<0$ 时, 原不等式为 $x+\frac{4}{x}\geq\frac{8}{x}\Leftrightarrow x^2\leq 4$. 此时, $x\in(-1,0)$.

(4) 当 $x\leq -1$ 时, 原不等式为 $x+\frac{4}{x}\geq 8x\Leftrightarrow x^2\geq\frac{4}{7}$. 此时, $x\in(-\infty,-1]$.

综上所述, 满足题意的 x 的取值范围为

$(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.　　(14')

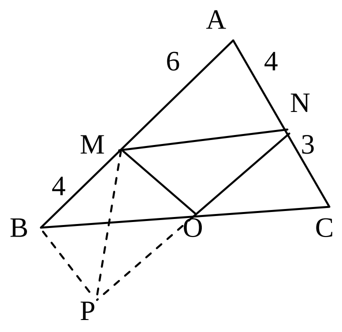
10. 解: 延长 NO 至 P, 使 OP=ON, 又 BO=OC, 可知 BPCN 为平行四边形,

$\therefore BP // AC$, BP=CN=3.　　(3')

连接 MP, $\because M$ 在 NP 的垂直平分线上,

$\therefore MP=MN$　　(6')

令 MN=a, 则在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle MBP$ 中, 由余弦定理得



$$a^2=MN^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cos A=52-48\cos A,$$
$$a^2=MP^2=3^2+4^2+2\cdot 3\cdot 4\cos A=25+24\cos A.$$　　(10')

消去 a^2, 得 $27-72\cos A=0$,

于是 $\cos A=\frac{3}{8}, \angle A=\arccos\frac{3}{8}$.(14')

11. 解: $\because (x+1)^2-x^2=2x+1, 2x+1\leq 50(x\in N)\Leftrightarrow x\leq 24(x\in N)$.

$(24+1)^2=625\in S_{12}$,

$\therefore S_0,S_1,\cdots,S_{12}$ 中含有的平方数都不超过 25^2，且每个集合都是由连续 50 个非负整数所组成的，故每个集合至少含有 1 个平方数.　(6’)

$S_{13},S_{14},\cdots,S_{599}$ 中，若含有平方数，都不小于 26^2. 而当 $x\ge 26$ 时，$2x+1\ge 53$，从而 $S_{13},S_{14},\cdots,S_{599}$ 中，每个集合至多含有 1 个平方数.

另一方面，S_{599} 中最大数是 $600\cdot 50-1=29999$，

$173^2<29999<174^2$，$\therefore S_{13},S_{14},\cdots,S_{599}$ 中含有平方数.

则不超过 173^2.　(12’)

$\therefore S_{13},S_{14},\cdots,S_{599}$ 中有且仅有 173-25=148 个集合含有平方数.

综上所述，$S_0,S_1,\cdots,S_{599}$ 中，

有 600-13-148=439 个集合不含有平方数.　(16’)

12. 解：当 n=2 时，不等式为 $(x_1+x_2)^2\ge 2(x_1x_2+x_2x_1)$，即

$(x_1-x_2)^2\ge 0$，故 n=2 满足题意.　(2’)

当 n=3 时，不等式 $(x_1+x_2+x_3)^2\ge 3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$，

等价于 $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\ge 0$，

故 n=3 满足题意.　(5’)

当 n=4 时，不等式为

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\ge 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2+x_3-x_4)^2\ge 0$. 故 n=4 满足题意.　(8’)

下证当 n>4 时，不等式不可能对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立.

取 $x_1=x_2=1, x_3=x_4=\cdots=x_n=\dfrac{1}{5(n-2)}$，

则原不等式为 $[1+1+(n-2)\cdot\dfrac{1}{5(n-2)}]^2\ge n(1+\dfrac{2}{5(n-2)}+\dfrac{n-3}{25(n-2)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{121}{25}\ge n+\dfrac{2n}{5(n-2)}+\dfrac{n(n-3)}{25(n-2)^2}$，

这与 $\dfrac{121}{25}<5\le n$ 矛盾.

所以满足题意的正整数 n 为 2, 3, 4.　(16’)

2010 年新知杯上海市高中数学竞赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)05－0029－03

【说明】解答本试题不得使用计算器.

一、填空题(前 4 小题每题 7 分，后 4 小题每题 8 分，共 60 分)

1. 函数 $y=\arccos\left(\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\right)$ 的定义域是______，值域是______.

2. 若 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使等式

$$\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|+\sum_{k=1}^{n}\left|\lg\frac{1}{x_k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\lg x_k\right|$$

成立，则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值分别是______.

3. 平面直角坐标系内有 $\triangle ABC$，顶点为 $A(3,0)$、$B(0,2)$、$C(0,-1)$，两平行直线 $x=t$，$x=\frac{t}{2}(0<t\leqslant 3)$ 之间与 $\triangle ABC$ 公共部分的面积记为 $S(t)$. 则当 t 变化时，$S(t)$ 的最大值是______.

4. 设甲袋中有 4 只白球、5 只红球、6 只黑球；乙袋中有 7 只白球、6 只红球、2 只黑球. 若从两袋中各取一球，则两球颜色不同的概率是______(用最简分数作答).

5. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两个焦点，M 是该双曲线右支上的点，O 为坐标原点. 若 $\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}=\sqrt{6}$，则点 M 的坐标为______.

6. 满足

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$$

的 $2n-1$ 位十进制正整数

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$$

共有______个(用数值作答).

7. 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$f(0)=11$，又存在 n 个不同整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=2\,010.$$

则 n 的最大值是______.

8. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=5$，$BC=8$，$AC=7$，动点 P、Q 分别在边 AB、AC 上，使 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切. 则线段 PQ 长的最小值为______.

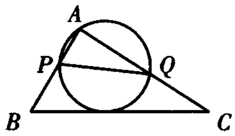


图 1

二、解答题(共 60 分)

9. (14 分)如图 2，走廊宽为 3 m，夹角为 120°，地面是水平的，走廊两端足够长. 问：保持水平位置通过走廊的木棒(不计粗细)的最大长度是多少？

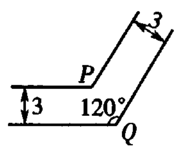


图 2

10. (14 分)已知由 1，2，…，1 000 这 1 000 个正整数构成的集合 A，先从集合 A 中随机取一个数 a，取出后把 a 放回集合 A；然后再从集合 A 中随机取一个数 b. 求 $\frac{a}{b}>\frac{1}{3}$ 的概率.

11. (16 分)(1)设 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$. 求证：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant\sqrt{2}(x_1x_2+x_2x_3),$$

并说明等号成立的条件；

(2)若实数 a 使得对于任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4，不等式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$$

都成立，求 a 的最大值.

12. (16 分)已知正整数 n 满足如下条件：对开区间(0，2 009)内的每个正整数 m，总存在正整数 k，使得

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}.$$

求这种 n 的最小值.

参考答案

一、1. $[-2,6]$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

由 $12+4x-x^2\geqslant0$，得 $-2\leqslant x\leqslant6$. 此时，

$0\leqslant\sqrt{12+4x-x^2}=\sqrt{-(x-2)^2+16}\leqslant4$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\leqslant\frac{1}{2}$.

故所求的定义域为 $[-2,6]$，值域为 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

2. $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

原等式即

$2\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\lg x_k\right|$

$\Rightarrow 2\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant0$.

故 $|\lg x_k|=0(1\leqslant k\leqslant n)$，$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

反之，当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，已知等式显然成立.

3. $\frac{3}{2}$.

注意到

$l_{AB}:\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1(0\leqslant x\leqslant3)$，

$l_{AC}:\frac{x}{3}-y=1(0\leqslant x\leqslant3)$.

如图 3，设直线 $x=t$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 F、E；直线 $x=\frac{t}{2}$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 G、H. 则

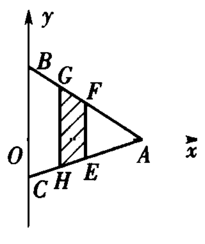


图 3

$y_F=2-\frac{2t}{3}$，

$y_E=\frac{t}{3}-1$，$y_G=2-\frac{t}{3}$，$y_H=\frac{t}{6}-1$.

注意到

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\left\{\left[\left(2-\frac{2t}{3}\right)-\left(\frac{t}{3}-1\right)\right]+\left[\left(2-\frac{t}{3}\right)-\left(\frac{t}{6}-1\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{3}{8}(t^2-4t)=-\frac{3}{8}(t-2)^2+\frac{3}{2}.$$

故当 $t=2$ 时，$S(t)_{\max}=\frac{3}{2}$.

4. $\frac{31}{45}$.

两球颜色相同的概率为

$P=\frac{4\times7+5\times6+6\times2}{15\times15}=\frac{14}{45}$，

故两球颜色不同的概率为 $1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$.

5. 设 $M(x,y)(x\geqslant1)$. 易知，双曲线的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$. 则

$|MF_1|=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2}$，

$|MF_2|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}$，

$|MO|=\sqrt{x^2+y^2}$.

故 $\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}\right)^2$

$$=\frac{(x+\sqrt{2})^2+y^2+(x-\sqrt{2})^2+y^2+2\sqrt{(x^2+y^2+2)^2-8x^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{4x^2+2+2\sqrt{4x^4-4x^2+1}}{2x^2-1}=\frac{8x^2}{2x^2-1}.$$

解方程 $\frac{8x^2}{2x^2-1}=6(x\geqslant1)$，得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

进而，$y^2=x^2-1=\frac{1}{2}$.

故 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. 502.

显然，$n\leqslant9$，且满足条件的数是 $2n-1$ 位正整数，有 C_9^n 种取法.

故这类整数的个数是

$\sum\limits_{n=2}^{9}C_9^n=\sum\limits_{n=0}^{9}C_9^n-(C_9^0+C_9^1)$

$=512-(1+9)=502$.

7. 3.

记 $g(x)=f(x)-2\,010$. 则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是 $g(x)=0$ 的根.

故 $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot q(x)$，

其中，$q(x)$ 为整系数多项式. 于是，

$$g(0)=11-2\ 010=-1\ 999$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(-x_i)q(0).$$

因 1 999 是质数，$-1\ 999$ 至多是三个不同整数之积，即 $-1\times1\times1\ 999$，故 $n\leqslant3$.

当 $n=3$ 时，

$$g(x)=(x+1)(x-1)(x+1\ 999),$$

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x+1\ 999)+2\ 010.$$

8. $\frac{30}{7}$.

因为 $\triangle ABC$ 三边长已知，所以，$\triangle ABC$ 的三内角为定值.

由 $\frac{PQ}{\sin A}=2R$（R 为 $\triangle APQ$ 外接圆半径），得 $PQ=2R\sin A$.

欲使 PQ 最小，当且仅当 R 最小.

又因 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切，所以，当边 BC 上的高 AH 为 $\triangle APQ$ 外接圆直径时 R 最小.

注意到

$$\cos A=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7},$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

而 $AH\times8=5\times7\sin A\Rightarrow AH=\frac{35}{8}\sin A$.

故 $PQ_{\min}=AH\sin A=\frac{35}{8}\sin^2A=\frac{30}{7}$.

二、**9.** 如图 4，过走廊转角内顶点 P 任作水平直线与走廊外侧交于点 A、B. 则在水平位置通过走廊的木棒长度小于或等于 AB.

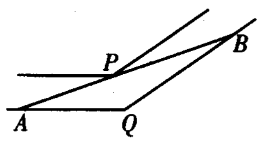


图 4

设 $\angle BAQ=\alpha$. 则

$\angle ABQ=60°-\alpha$，

$$AB=AP+PB=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{3}{\sin(60°-\alpha)}.$$

当 α 变化时，上式的最小值即是在水平位置通过走廊的木棒的最大长度.

由平均不等式及积化和差得

$$AB\geqslant6\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin(60°-\alpha)}}$$

$$=6\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}[\cos(2\alpha-60°)-\cos60°]}}$$

$$\geqslant6\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{2}}}=12,$$

且当 $\alpha=30°$ 时，$AB=12$.

故在水平位置能通过走廊的木棒的最大长度是 12 m.

10. 解法 1 注意到

$$P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right).$$

由 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow a\leqslant\frac{1}{3}b\Leftrightarrow a\leqslant\left[\frac{1}{3}b\right]$.

则 $P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right)=\frac{\sum\limits_{b=1}^{1\ 000}\left[\frac{1}{3}b\right]}{1\ 000^2}$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{332}3k+333+333}{1\ 000^2}=\frac{333}{2\ 000}.$$

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-\frac{333}{2\ 000}=\frac{1\ 667}{2\ 000}$.

解法 2 当 $a=1$ 时，$b=1$ 或 2，有 2 种取法；

当 $a=2$ 时，b 的取值增加 3、4、5，有 $2+3$ 种取法；

当 $a=3$ 时，b 的取值增加 6、7、8，有 $2+2\times3$ 种取法；

……

当 $a=333$ 时，b 有 $2+332\times3$ 种取法；

当 $334\leqslant a\leqslant1\ 000$ 时，b 都有 1 000 种取法.

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{2+(2+3)+(2+2\times3)+\cdots+(2+332\times3)+667\times1\ 000}{1\ 000^2}$$

$$=\frac{333(2+166\times3)+667\times1\ 000}{1\ 000^2}$$

$$=\frac{1\ 667}{2\ 000}.$$

11. (1) 注意到

2010 年全国高中数学联赛甘肃省预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)05-0032-03

一、填空题(每小题7分,共56分)

1. 设 $k_1<k_2<\cdots<k_n$ 是非负整数,满足
$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}=227$.
则 $k_1+k_2+\cdots+k_n=$______.

2. 已知 $a>0$,函数 $f(x)=|x+2a|$ 和 $g(x)=|x-a|$ 的图像交于点 C,且它们分别与 y 轴交于点 A、B. 若 $\triangle ABC$ 的面积是 1,则 $a=$______.

3. 已知 S_n 是公差为正数 q 的等差数列的前 n 项之和. 若 $\frac{S_n+210}{n}$ 在 $n=6$ 时取到最小值,则 q 的取值范围是______.

4. 已知函数 $y=x^3$ 在 $x=a_k$ 的切线与 x 轴交于点 a_{k+1}. 若 $a_1=1$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{2}\right)+\left(\frac{x_2^2}{2}+x_3^2\right)$$
$$\geqslant\frac{2}{\sqrt2}x_1x_2+\frac{2}{\sqrt2}x_2x_3=\sqrt2(x_1x_2+x_2x_3).$$

当且仅当 $x_1=\frac{1}{\sqrt2}x_2=x_3$ 时,等号成立.

(2)设 $k(0<k<1)$ 为待定常数. 则
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$
$$=(x_1^2+kx_2^2)+(1-k)(x_2^2+x_3^2)+(kx_3^2+x_4)$$
$$\geqslant2\sqrt{k}x_1x_2+2(1-k)x_2x_3+2\sqrt{k}x_3x_4.$$

令 $\sqrt{k}=1-k$. 解得 $k=\frac{3-\sqrt5}{2}$.

从而, $\sqrt{k}=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

故 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant(\sqrt5-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$ 对任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4 都成立.

另一方面,取
$$x_1=\frac{\sqrt5-1}{2}=x_4,x_2=x_3=1.$$

由已知不等式得
$$5-\sqrt5\geqslant\sqrt5a\Rightarrow a\leqslant\sqrt5-1.$$

综上, $a_{\max}=\sqrt5-1$.

12. 注意到
$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}mn<2\,009k,\\ mn+n>2\,010k\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}mn+1\leqslant2\,009k,\\ mn+n-1\geqslant2\,010k\end{cases}$$
$$\Rightarrow2\,009(mn+n-1)\geqslant2\,009\times2\,010k$$
$$\geqslant2\,010(mn+1)$$
$$\Rightarrow2\,009mn+2\,009n-2\,009$$
$$\geqslant2\,010mn+2\,010$$
$$\Rightarrow n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-m}.$$

因为上式对区间$(0,2\,009)$中的每个正整数 m 都成立,所以,
$$n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-2\,008}=4\,019.$$

另一方面,根据不等式“a、b、c、$d\in\mathbf{R}_+$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$”,知
$$\frac{m}{2\,009}<\frac{m+(m+1)}{2\,009+2\,010}<\frac{m+1}{2\,010},$$
即 $\frac{m}{2\,009}<\frac{2m+1}{4\,019}<\frac{m+1}{2\,010}$
对区间$(0,2\,009)$中的每个正整数 m 都成立.

故 n 的最小值为 4 019.

(李大元 熊斌 顾鸿达 刘鸿坤 叶声扬 命题)

2009年上海市高中数学竞赛（新知杯）试卷

（2009年3月22日　　星期日　　上午8：30~10：30）

【说明】解答本试卷不得使用计算器

一、填空题（本题满分60分，前4小题每小题7分，后4小题每小题8分）

1. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{10}\in(1,+\infty)$，则$\dfrac{\log_{a_1}^{2009}+\log_{a_2}^{2009}+\cdots+\log_{a_{10}}^{2009}}{\log_{a_1a_2\cdots a_{10}}^{2009}}$的最小值是______。

2. 已知$x,y\in N^*$，且$1+2+\cdots+y=1+9+9^2+\cdots+9^{x-1}$，则将$y$表示成$x$的函数，其解析式是$y=$________________________。

3. 已知函数$f(x)=|x^2-2|$，若$f(a)=f(b)$，且$0<a<b$，则ab的取值范围是______。

4. 满足方程$\log_2[2\cos^2(xy)+\dfrac{1}{2\cos^2(xy)}]=-y^2+y+\dfrac{3}{4}$的所有实数对$(x,y)=$________。

5. 若$[a]$表示不超过实数a的最大整数，则方程$[\tan x]=2\sin^2 x$的解是__________。

6. 不等式$2^{2x}\le 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}+4\cdot 2^{2\sqrt{x}}$的解集是__________________________。

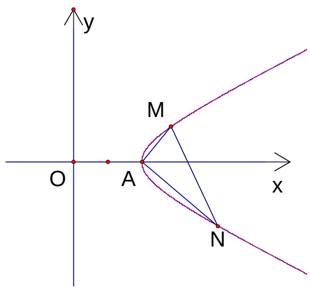
7. 设A是由不超过2009的所有正整数构成的集合，即$A=\{1,2,\cdots,2009\}$，集合$L\subseteq A$，且L中任意两个不同元素之差都不等于4，则集合L元素个数的最大可能值是____________。

8. 给出一个凸10边形及其所有对角线，在以该凸10边形的顶点及所有对角线的交点为顶点的三角形中，至少有两个顶点是该凸10边形顶点的三角形有个。

二、解答题

9.（本题满分14分）设函数$f(x)$定义于闭区间$[0,1]$，满足$f(0)=0,f(1)=1$，且对任意$x,y\in[0,1],x\le y$，都有$f(\dfrac{x+y}{2})=(1-a^2)f(x)+a^2f(y)$，其中常数$a$满足$0<a<1$，求$a$的值。

10. （本题满分14分）如图，A是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$的右顶点，过点A的两条互相垂直的直线分别与双曲线的右支交于点M,N，问直线MN是否一定过x轴上一定点？如果不存在这样的定点，请说明理由；如果存在这样的定点P试求出这个定点P的坐标。



11. （本题满分 16 分）设 A,B 是集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 的两个不同子集，使得 A 不是 B 的子集，B 也不是 A 的子集，求不同的有序集合对 (A,B) 的组数。

12. （本题满分 16 分）设正整数构成的数列 $\{a_n\}$ 使得 $a_{10k-9}+a_{10k-8}+\cdots+a_{10k}\le 19$ 对一切 $k\in N^*$ 恒成立。记该数列若干连续项的和 $\sum_{p=i+1}^{j} a_p$ 为 $S(i,j)$，其中 $i,j\in N^*$，且 $i<j$。求证：所有 $S(i,j)$ 构成的集合等于 N^*。

答案：一、

1、100； 2、$\dfrac{3^x-1}{2}$； 3、$(0,2)$； 4、（$k\pi+\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}$）（$k\in Z$）

5、$x=k\pi$ 或 $x=l\pi+\dfrac{\pi}{4}(k,l\in Z)$； 6、$[0,4]$； 7、1005； 8、960。

二、9、解：因为 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{0+1}{2})=a^2$，$f(\frac{1}{4})=f(\frac{0+\frac{1}{2}}{2})=a^2f(\frac{1}{2})=a^2$

$$f(\frac{3}{4})=f(\frac{\frac{1}{2}+1}{2})=(1-a^2)f(\frac{1}{2})+a^2f(1)=2a^2-a^4$$

所以 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2})=(1-a^2)f(\frac{1}{4})+a^2f(\frac{3}{4})=-2a^6+3a^4$ 8 分

由此得 $a^2=-2a^6+3a^4$，而 $0<a<1$，所以 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 14 分

10、解法一：$A(2,0)$，将 y 轴向右平移 2 个单位，使点 A 成为新直角坐标系的原点，在新坐标系下，双曲线的方程为 $\dfrac{(x'+2)^2}{4}-y^2=1$，即 $4y^2-x'^2-4x'=0$ (*)

若 $MN\perp x$ 轴，则 $k_{AM}=1$，即 $l_{AM}:y=x'$，代入（*）式可得 $M(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$，进而 $N(\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$。所以 $P(\frac{4}{3},0)$，则点 P 在原坐标系中的坐标为 $(\frac{10}{3},0)$。 5 分

若 MN 不垂直 x 轴，设 $l_{MN}:y=kx'+t(t\ne 0)$，则 $\dfrac{y-kx'}{t}=1$，

于是（*）可以改写成 $4y^2-x'^2-4x'\cdot\dfrac{y-kx'}{t}=0$，即 $4t(\frac{y}{x'})^2-4(\frac{y}{x'})+4k-t=0$

该方程的两个根 k_1,k_2 既是 AM,AN 的斜率。

因为 $AM\perp AN$，所以 $k_1k_2=\frac{4k-t}{4t}=-1$，　　　　10 分

所以 $t=-\frac{4}{3}k$，故 $l_{MN}:y=kx'-\frac{4}{3}k=k(x'-\frac{4}{3})$

所以过定点 $P(\frac{4}{3},0)$，则点 P 在原坐标系中的坐标为 $(\frac{10}{3},0)$。

综上所述，直线 MN 过 x 轴上的定点 $P(\frac{10}{3},0)$　　　　14 分

解法二：设直线 AM 的斜率为 $k(k>0,k\neq\pm\frac{1}{2},k\neq\pm2)$

由 $\begin{cases}x^2-4y^2=4\\ y=k(x-2)\end{cases}\Rightarrow M(\frac{8k^2+2}{4k^2-1},\frac{4k}{4k^2-1})$，同理得 $N(\frac{2k^2+8}{4-k^2},\frac{-4k}{4-k^2})$

当 $k=\pm1$ 时，$x_M=x_N=\frac{10}{3}$，所以过 $(\frac{10}{3},0)$　　　　8 分

当 $k\neq\pm1,k\neq2,k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，由直线 MN 的方程得，$y=k'(x-\frac{10}{3})$　　10 分

所以，直线 MN 过 x 轴上的定点 $P(\frac{10}{3},0)$　　　　14 分

11、解：集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 有 2^5 个子集，不同的有序集合对 (A,B) 有 $2^5(2^5-1)$ 组。

2 分

若 $A\subset B$，并设 B 中含有 $k(1\leq k\leq5)$ 个元素，则满足 $A\subset B$ 的有序集合对 (A,B) 有

$\sum_{k=1}^{5}C_5^k(2^k-1)=\sum_{k=0}^{5}C_5^k2^k-\sum_{k=0}^{5}C_5^k=3^5-2^5$ 组　　　　8 分

同理，满足 $B\subset A$ 的有序集合对 (A,B) 也有 3^5-2^5 组。　　　　10 分

所以，满足条件的有序集合对 (A,B) 的组数为 $2^5(2^5-1)-2(3^5-2^5)=570$ 组。
16 分

12、证明：显然 $S(i,j)\in N^*$　　　　2 分

下证对任意 $n_0\in N^*$，存在 $S(i,j)=n_0$

用 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，考虑 $10n_0+10$ 个前 n 项和：

$S_1<S_2<\cdots<S_{10n_0+10}$　　　　（1）

由题设 $S_{10n_0+10}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+\cdots+a_{20})+\cdots+(a_{10n_0+1}+\cdots+a_{10n_0+10})$　　6 分

另外，再考虑如下 $10n_0+10$ 个正整数：

$S_1+n_0<S_2+n_0<\cdots<S_{10n_0+10}+n_0$　　　　（2）

显然　$S_{10n_0+10}+n_0\leq20n_0+19$　　　　10 分

这样（1），（2）中出现 $20n_0+20$ 个正整数，都不超过 $20n_0+19$，

由抽屉原理，必有两个相等。由于（1）式中各数两两不相等，（2）式中各数也两两不等，故存在 $i,j\in N^*$，使得 $S_j=S_i+n_0$，即 $j>i$，且 $n_0=S_j-S_i=S(i,j)$

所以，所有 $S(i,j)$ 构成的集合等于 N^*。　　　　16 分

竞赛之窗

2008年新知杯上海市高中数学竞赛

说明:解答本试卷不得使用计算器.

一、填空题(第1~4小题每小题7分,第5~8小题,每小题8分,共60分)

1. 已知恒等式

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$
$$=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)+b_4.$$

用 a_1、a_2、a_3、a_4 表示 b_3,那么,$b_3=$______.

2. 有一个 19×19 的正方形棋盘,从中任取两条水平线,两条垂直线.围成的图形恰好是正方形的概率是______.

3. 一条长为4的线段 AB 在 x 轴正半轴上移动,另一条长为2的线段 CD 在 y 轴正半轴上移动.如果这两条线段的4个端点 A、B、C、D 四点共圆,则这个圆的圆心轨迹是______.

4. 已知 a、b 是正实数,$n\in\mathbf{N}_+$.则函数

$$f(x)=\frac{(x^{2n}-a)(b-x^{2n})}{(x^{2n}+a)(b+x^{2n})}$$

的最大值是______.

5. 如图1,正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面构成45°的二面角.则异面直线 AC 与 BF 所成角的大小为______.

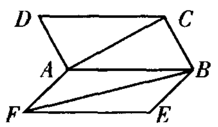


图1

6. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:

$$a_1=1,a_2=3,$$
$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2\ (n=1,2,\cdots).$$

则它的前 n 项和为______.

7. 直角坐标平面上的4个点 $A(1,2)$、$B(3,1)$、$C(2,3)$、$D(4,0)$ 到直线 $y=kx$ 的距离的平方和为 S.当 k 变化时,S 的最小值为______.

8. 正整数 n 使得集合 $\{1,2,\cdots,2\,008\}$ 的每一个 n 元子集中都有2个元素(可以相同),它们的和是2的正整数幂.则 n 的最小值是______.

二、解答题(共60分)

9. (14分)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n=1+2+\cdots+n\ (n\in\mathbf{N}_+),$$

把此数列中所有3的倍数依次取出,构成一个新的数列 $b_1,b_2,\cdots,b_m,\cdots$.求数列 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项的和 S_{2m}.

10. (14分)在 $\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$CA=b$,以边 AB 为一边长向外作正方形 $ABEF$,O 为正方形 $ABEF$ 的中心,M、N 分别为边 BC、CA 的中点.当 $\angle BCA$ 变化时,求 $OM+ON$ 的最大值.

11. (16分)用 $A(n,k)$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不含连续整数的 k 元子集的个数.求 $A(n,k)$.

12. (16分)在直角坐标平面上,称横、纵坐标都是有理数的点为有理点.求满足如下条件的最小正整数 k:每一个圆周上含有 k 个有理点的圆,它的圆周上一定含有无穷多个有理点.

参考答案

一、**1.** $-4+3a_1-2a_2+a_3$.

在已知恒等式中令 $x=-1$ 得

$$b_4=1-a_1+a_2-a_3+a_4.$$

移项整理得

$$(x^4-1)+a_1(x^3+1)+a_2(x^2-1)+a_3(x+1)$$
$$=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1),$$

即 $(x+1)[(x-1)(x^2+1)+a_1(x^2-x+1)+a_2(x-1)+a_3]$

$=(x+1)[(x+1)^3+b_1(x+1)^2+b_2(x+1)+b_3]$.

故 $(x-1)(x^2+1)+a_1(x^2-x+1)+a_2(x-1)+a_3$

$=(x+1)^3+b_1(x+1)^2+b_2(x+1)+b_3$.

再令 $x=-1$ 得

$b_3=-4+3a_1-2a_2+a_3$.

2. $\frac{13}{190}$.

边长为 1 的正方形有 19^2 个,边长为 2 的正方形有 18^2 个,……边长为 19 的正方形有 1^2 个.故正方形共有

$$1^2+2^2+\cdots+19^2=\frac{19\times20\times39}{6}(\text{个}).$$

所求的概率为

$$P=\frac{19\times20\times39}{6}\div C_{20}^2C_{20}^2=\frac{13}{190}.$$

3. $x^2-y^2=3(x>2,y>1)$.

如图 2,设圆心 $M(x,y)(x>2,y>1)$.则

$A(x-2,0)$、

$B(x+2,0)$、

$C(0,y-1)$、

$D(0,y+1)$.

由 $|MA|^2=|MC|^2$,

得 $2^2+y^2=x^2+1^2$.

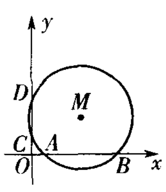


图 2

故所求的轨迹是一段双曲线,其方程为

$x^2-y^2=3\ (x>2,y>1)$.

4. $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$.

令 $t=x^{2n}$.则 $t\geqslant0$,且

$$f=\frac{(t-a)(b-t)}{(t+a)(b+t)}$$

$$=\frac{-t^2+(a+b)t-ab}{t^2+(a+b)t+ab}$$

$$=-1+\frac{2(a+b)t}{t^2+(a+b)t+ab}.$$

当 $t=0$ 时,$f=-1$;

当 $t>0$ 时,

$$f=-1+\frac{2(a+b)}{(a+b)+t+\frac{ab}{t}}$$

$$\leqslant-1+\frac{2(a+b)}{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2,$$

当且仅当 $t=\sqrt{ab}$ 时,上式等号成立.

所以,$f(x)$ 的最大值为 $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$.

5. $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

不妨设正方形的边长为 1.则

$$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})}{2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AF}}{2}$$

$$=\frac{0+\cos45^\circ+(-1)+0}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}.$$

因此,AC 与 BF 所成角的大小为

$\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

6. $\frac{1}{3}n(n^2+2)$.

由题设得 $a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+2$.则数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列,首项为 $a_2-a_1=2$.故 $a_{n+1}-a_n=2n$.于是,

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=2(n-1)+\cdots+2+1=n(n-1)+1,$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+1]=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2+2).$$

7. $22-\sqrt{185}$.

设点 A、B、C、D 到直线 $kx-y=0$ 的距离分别为 d_1、d_2、d_3、d_4.则

$$d_1=\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}},d_2=\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$d_3=\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}},d_4=\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

故 $S=\frac{(k-2)^2+(3k-1)^2+(2k-3)^2+(4k)^2}{k^2+1}$

$=\frac{30k^2-22k+14}{k^2+1}.$

于是，$(30-S)k^2-22k+(14-S)=0$.

当 $S=30$ 时，$k=-\frac{8}{11}$.

当 $S\neq30$ 时，

$\Delta=22^2-4(30-S)(14-S)\geqslant0$.

解得 $22-\sqrt{185}\leqslant S\leqslant22+\sqrt{185}$，

且当 $S=22-\sqrt{185}$ 时，$k=\frac{11}{8+\sqrt{185}}$.

因为 $22-\sqrt{185}<30$，所以，S 的最小值为 $22-\sqrt{185}$.

8. 1 003.

首先，若 $n=1\ 002$，取

$A=\{5,6,7\},B=\{17,18,\cdots,24\}$，

$C=\{33,34,\cdots,39\}$，

$D=\{1\ 025,1\ 026,\cdots,2\ 008\}$.

则 $S=A\cup B\cup C\cup D$.

故 $|S|=3+8+7+984=1\ 002$.

容易验证 S 中任意两个(可以相同)元素的和都不是 2 的幂.

其次，证明：集合 $\{1,2,\cdots,2\ 008\}$ 的每个 1 003 元子集中都有 2 个元素(可以相同)，它们的和是 2 的幂.

事实上，把集合 $\{1,2,\cdots,2\ 008\}$ 分成如下 1 003 个两两不相交的子集的并：

$\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\},\{8,24\},\{9,23\}$，

$\{10,22\},\cdots,\{15,17\},\{25,39\},\cdots$，

$\{31,33\},\{40,2\ 008\},\{41,2\ 007\}$，

$\{42,2\ 006\},\cdots,\{2\ 003,1\ 025\}$，

$\{4,16,32,1\ 024\}$.

上面每一个集合都有 2 个元素(可以相同)，它们的和是 2 的幂. 故 $\{1,2,\cdots,2\ 008\}$ 的每个 1 003 元子集，或含有 $\{4,16,32,1\ 024\}$ 中的一个元素，或含有前 1 002 个集中的某一个. 从而，有 2 个元素(可以相同)，它们的和是 2 的幂.

综上所述，n 的最小值为 1 003.

二、**9.** 显然，$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

若 $a_n=3t(t\in\mathbf{Z}_+)$，则由 n、$n+1$ 互质，n 与 $n+1$ 中必有一个是 3 的倍数.

当 $n=3k(k\in\mathbf{Z}_+)$ 时，$a_{3k}=\frac{3k(3k+1)}{2}$；

当 $n+1=3k$，即 $n=3k-1(k\in\mathbf{Z}_+)$ 时，

$a_{3k-1}=\frac{3k(3k-1)}{2}$.

则数列 $\{a_n\}$ 中的连续三项 a_{3k-2}、a_{3k-1}、a_{3k} 中有连续两项 a_{3k-1}、a_{3k} 是 3 的倍数.

故 $b_1=a_2,b_2=a_3,b_3=a_5,b_4=a_6$，

……

$b_{2m-1}=a_{3m-1},b_{2m}=a_{3m}$.

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{3k-1}+a_{3k})=\sum_{k=1}^{m}9k^2$$

$$=\frac{3}{2}m(m+1)(2m+1).$$

10. 如图 3，在 $\triangle OBM$ 中，由余弦定理得(记 $AB=c$，$\angle ABC=\beta$)

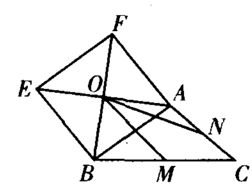


图 3

OM^2

$=\left(\frac{\sqrt2}{2}c\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt2}{2}c\cdot\frac{a}{2}\cos(\beta+45°)$

$=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{\sqrt2}{2}ac\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos\beta-\frac{\sqrt2}{2}\sin\beta\right)$

$=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{ac}{2}\cos\beta+\frac{ac}{2}\sin\beta.$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及正弦定理得

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},c\sin\beta=b\sin C.$$

故 OM^2

$$=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2)+\frac{ab}{2}\sin C$$

$$=\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{ab}{2}\sin C$$

$$=\frac{b^2}{4}+\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab\cos C)+\frac{ab}{2}\sin C$$

$$=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{2}(\sin C-\cos C)$$

$$=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin(C-45^\circ).$$

同理，$ON^2=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin(C-45^\circ)$.

所以，当$\angle C=135^\circ$时，

$$(OM^2)_{\max}=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}ab=\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2,$$

$$(ON^2)_{\max}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{b}{2}\right)^2.$$

故$(OM+ON)_{\max}$

$$=\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{b}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2}(a+b).$$

11. 显然，$A(n,1)=n$.

当 $k\in\mathbf{Z}_+$，$k\geqslant 2$，且 $n<2k-1$ 时，

$A(n,k)=0$.

当 $k\in\mathbf{Z}_+$，$k\geqslant 2$，且 $n\geqslant 2k-1$ 时，设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$是$\{1,2,\cdots,n\}$中不含连续整数的 k 元子集，且 $a_1<a_2<\cdots<a_k$.

则$\{a_1,a_2-1,a_3-2,\cdots,a_k-(k-1)\}$是$\{1,2,\cdots,n-(k-1)\}$的 k 元子集.

因$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$与$\{a_1,a_2-1,a_3-2,\cdots,a_k-(k-1)\}$一一对应，所以，

$$A(n,k)=\mathrm{C}_{n-(k-1)}^{k}.$$

12. 首先证明：若一个圆的圆周含有 3 个有理点，则该圆周上一定含有无穷多个有理点.

设平面上$\odot C_0$的圆周上含有 3 个有理点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$，圆心 $C_0(x_0,y_0)$.

由于线段 P_1P_2、P_1P_3 的垂直平分线过圆心 C_0，则

$$\begin{cases}(y_2-y_1)\left(y_0-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+(x_2-x_1)\left(x_0-\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0,\\(y_3-y_1)\left(y_0-\frac{y_1+y_3}{2}\right)+(x_3-x_1)\left(x_0-\frac{x_1+x_3}{2}\right)=0.\end{cases}$$

由于 x_i、y_i $(i=1,2,3)$都是有理数，因此，上述关于 x_0、y_0 的二元一次方程组的解(x_0,y_0)都是有理数，即 C_0 是有理点.

设有理点 $P_n(x_n,y_n)$的坐标为

$$\begin{cases}x_n=x_0+a_n(x_3-x_0)-b_n(y_3-y_0),\\y_n=y_0+b_n(x_3-x_0)+a_n(y_3-y_0),\end{cases}$$

其中，$a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$，$b_n=\frac{2n}{n^2+1}(n=4,5,\cdots)$.

则$|P_nC_0|^2$

$$=[a_n(x_3-x_0)-b_n(y_3-y_0)]^2+[b_n(x_3-x_0)+a_n(y_3-y_0)]^2$$

$$=(a_n^2+b_n^2)[(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2]$$

$$=(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2=|P_3C_0|^2.$$

故点 $P_n(n=4,5,\cdots)$都在$\odot C_0$ 的圆周上，即$\odot C_0$ 的圆周上有无穷多个有理点.

其次，构造一个圆周上只含有两个有理点的实例.

$$C:(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=6.$$

容易验证，$P_1(-1,1)$、$P_2(1,-1)$都在圆周 C 上.若圆周 C 上还有不同于P_1、P_2 的有理点 $P_3(x_3,y_3)$，则

$$(x_3-\sqrt{2})^2+(y_3-\sqrt{2})^2=6,$$

即 $$x_3^2+y_3^2-2=2\sqrt{2}(x_3+y_3).$$

因为左端为有理数，$\sqrt{2}$为无理数，所以，$x_3+y_3=0$. 进而 $x_3^2=1$. 故 $x_3=\pm1$，$y_3=\mp1$.这与 P_3 不同于 P_1、P_2 的假定矛盾.

综上所述，k 的最小值为 3.

（熊 斌 顾鸿达 刘鸿坤 李大元 叶声扬 命题）

竞赛之窗

2007 年新知杯上海市高中数学竞赛

说明:解答本试卷不得使用计算器.

一、填空题(第 1～4 小题,每题 7 分,第 5～8 小题,每题 8 分,共 60 分)

1. 方程

$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$$

的实数解 $(x_1, x_2, x_3)=$______.

2. 如图 1,有一条长度为 1 的线段 EF,其端点 E、F 在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的四边上滑动. 当 EF 绕着正方形的四边滑动一周时,EF 的中点 M 所形成的轨迹的长是______.

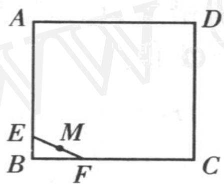


图 1

3. 复数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=0, a_n=a_{n-1}^2+\mathrm{i}\ (n\geq 2).$$

则它的前 2 007 项的和为______.

4. 已知 $\alpha-l-\beta$ 是大小为 45° 的二面角,C 为二面角内一定点,且到半平面 α、β 的距离分别为 $\sqrt{2}$、6,A、B 分别是半平面 α、β 内的动点. 则 $\triangle ABC$ 周长的最小值为______.

5. 已知平面直角坐标系中点与点的对应法则 $f: P(m, n)\to P'(\sqrt{m}, \sqrt{n})\ (m\geq 0, n\geq 0)$. 若一段曲线在对应法则 f 下对应椭圆的一段弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (x\geq 0, y\geq 0)$,则这段曲线的方程是______.

6. 已知 $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}$. 计算:

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1)=\text{______}.$$

7. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=0, x_2=1, x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\ (n\geq 3).$$

则数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_n=$______.

8. 已知 $\odot M: (x-1)^2+(y-3)^2=4$,过 x 轴上的点 $P(a, 0)$ 存在 $\odot M$ 的割线 PBA,使得 $PB=PA$. 则点 P 的横坐标 a 的取值范围是______.

二、解答题(共 60 分)

9. (14 分)对任意正整数 n,用 $S(n)$ 表示满足不定方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 的正整数对 (x, y) 的个数(例如,满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 的正整数对有 $(6,3)$,$(4,4)$,$(3,6)$ 三个,则 $S(2)=3$). 求出使得 $S(n)=2\,007$ 的所有正整数 n.

10. (14 分)已知关于 x 的方程

$$x^3\sin\theta-(\sin\theta+2)x^2+6x-4=0$$

正项 $(a_i^{x_i})$ 共有 $110+28\times 2=166$ 个,而负项 $(-b_i^{y_i})$ 共有 110 个,$a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均为两两不等的小于 6 的正有理数(注意到 $\frac{2i}{i^2+1}\neq\frac{i^2-1}{i^2+1}$,因为 i 为偶数;又 $2i$ 与 i^2+1 互质,i^2-1 与 i^2+1 互质,也是因为 i 为偶数;另外,$i^2+1>100$,因为 $i\geq 10$),从而,$a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \cdots, a_m^{x_m}, b_1^{y_1}, b_2^{y_2}, \cdots, b_n^{y_n}$ 两两不相等. 显然 $m=166$,$n=110$ 满足"大于 100 且小于 170,$m-n\geq 50$". 另外,也容易验证:以上的表示方式都满足"$a_{i+1}^2-b_1^2, a_{i+2}^2-b_2^2, \cdots, a_{i+n}^2-b_n^2\ (i=0,1,\cdots,m-n)$ 也两两不相等".

综上所述,以上所构造的 2 008 的表示式完全符合题目要求,且表示式有无限多个.

(吴伟朝　广州大学数学与信息科学学院,510006)

有 3 个正实根. 求

$$u=\frac{9\sin^2\theta-4\sin\theta+3}{(1+\cos\theta)(2\cos\theta-6\sin\theta-3\sin 2\theta+2)}$$

的最小值.

11. (16 分) 如图 2, 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$, AB 是过焦点 F 的弦. 如果 AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(0<\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\angle AOB$.

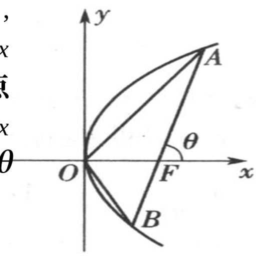


图 2

12. (16 分) 求满足如下条件的最小正整数 n: 在 $\odot O$ 的圆周上任取 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 则在 C_n^2 个 $\angle A_iOA_j\ (1\le i<j\le n)$ 中, 至少有 2 007 个不超过 $120°$.

参 考 答 案

一、**1.** (2,8,18).

方程两边乘以 2 并整理得

$$x_1+x_2+x_3-2\sqrt{x_1-1}-4\sqrt{x_2-4}-6\sqrt{x_3-9}=0.$$

配方得

$$(\sqrt{x_1-1}-1)^2+(\sqrt{x_2-4}-2)^2+(\sqrt{x_3-9}-3)^2=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1-1}-1=0,\ \sqrt{x_2-4}-2=0,\ \sqrt{x_3-9}-3=0.$$

解得 $x_1=2, x_2=8, x_3=18$.

2. $8+\pi$.

如图 3, 当 E、F 在正方形顶点的两旁时, 点 M 的轨迹是以该顶点为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆弧. 其他情况是在正方形边上的一线段, 长度为 2.

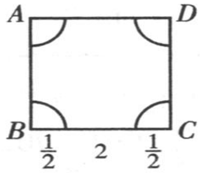


图 3

故轨迹的长为 $2\times4+2\pi\times\frac{1}{2}=8+\pi$.

3. $-1\ 003+2\mathrm{i}$.

由题设可得 $a_1=0, a_2=\mathrm{i}, a_3=-1+\mathrm{i}, a_4=-\mathrm{i}, a_5=-1+\mathrm{i}, a_6=-\mathrm{i}, \cdots\cdots$

可见, 当 $n\ge3$ 时,

$$a_n=\begin{cases}-1+\mathrm{i}, & n\ \text{为奇数};\\ -\mathrm{i}, & n\ \text{为偶数}.\end{cases}$$

故 $S_{2\,007}$

$$=0+\mathrm{i}+(-1+\mathrm{i})+1\,002[(-\mathrm{i})+(-1+\mathrm{i})]$$

$$=-1\,003+2\mathrm{i}.$$

4. $10\sqrt2$.

如图 4, 分别作点 C 关于平面 α、β 的对称点 P、Q. 易证当 A、B 分别取直线 PQ 与平面 α、β 的交点时, $\triangle ABC$ 周长最短, 且这个周长最小值为

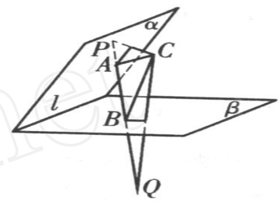


图 4

$$|PQ|=\sqrt{(2\sqrt2)^2+12^2-2\times2\sqrt2\times12\cos(180°-45°)}$$

$$=10\sqrt2.$$

5. $y=b^2\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\ (0\le x\le a^2)$.

设曲线方程为 $y=f(x)\ (s\le x\le t)$, 则曲线上点 $P(x, f(x))$ 对应的点 $P'(\sqrt{x}, \sqrt{f(x)})$ 在椭圆的一段弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (x\ge0, y\ge0)$ 上. 故

$$\frac{x}{a^2}+\frac{f(x)}{b^2}=1\ (x\ge0, f(x)\ge0),$$

即 $f(x)=b^2\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\ (0\le x\le a^2)$.

6. $\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\ \text{为偶数};\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\ \text{为奇数}.\end{cases}$

当 $k\in\mathbf{Z}_+$ 时,

$$f(2k-1)f(2k+1)$$

$$=\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos k\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(-1)^k}{2}.$$

特别地, 有

$$f(1)f(3)=f(5)f(7)=\cdots$$

$$= f(4k+1)f(4k+3) = -\frac{1}{2}.$$

故当 n 为偶数时,

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

当 n 为奇数时,

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\left(\frac{n-1}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

7. $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

由 $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ 得

$$x_n+\frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1}+\frac{1}{2}x_{n-2}.$$

又 $x_2+\frac{1}{2}x_1 = 1$, 故数列 $\left\{x_n+\frac{1}{2}x_{n-1}\right\}$ 为常数列, 每项均为 1, 即

$$x_n+\frac{1}{2}x_{n-1} = 1,$$

$$x_n-\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(x_{n-1}-\frac{2}{3}\right).$$

因为 $x_1-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, 所以, 数列 $\left\{x_n-\frac{2}{3}\right\}$ 是首项为 $-\frac{2}{3}$、公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

故 $x_n-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因此, $x_n = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

8. $1-3\sqrt{3}\leq a\leq 1+3\sqrt{3}$.

圆心 $M(1,3)$, 直径 $d=4$.

如图 5, 过点 P、M 作割线. 由割线定理得

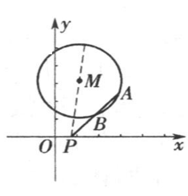


图 5

$$\left(PM+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(PM-\frac{d}{2}\right) = PB\cdot PA.$$

故 $PB = BA$

$$\Leftrightarrow PM^2-\frac{d^2}{4} = 2AB^2\leq 2d^2$$

$$\Leftrightarrow |PM|\leq\frac{3}{2}d\Leftrightarrow(a-1)^2+3^2\leq 6^2$$

$$\Leftrightarrow 1-3\sqrt{3}\leq a\leq 1+3\sqrt{3}.$$

二、**9.** 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ (x、y、$n\in\mathbf{Z}_+$) 知 $x>n$, $y>n$.

令 $x = n+a$, $y = n+b$ (a、$b\in\mathbf{Z}_+$). 则

$$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b} = \frac{1}{n}\Leftrightarrow n^2 = ab.$$

因此, $S(n)$ 等于正整数对 (a,b) 的个数. 从而, $S(n)$ 等于 n^2 的正约数的个数.

设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中, p_1, p_2, $\cdots$, p_k 为不同的质数, 且 $\alpha_i\in\mathbf{Z}_+$ $(1\leq i\leq k)$. 则

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}.$$

n^2 的正约数个数为 $(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)$.

令 $(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1) = 2\,007 = 3^2\times 223$.

则 $\begin{cases}k=1,\\ \alpha_1=1\,003\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2,\\ \alpha_1=1,\\ \alpha_2=334\end{cases}$

或 $\begin{cases}k=2,\\ \alpha_1=4,\\ \alpha_2=111\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=3,\\ \alpha_1=\alpha_2=1,\\ \alpha_3=111.\end{cases}$

故满足条件的 $n = p_1^{1\,003}$ 或 $n = p_1p_2^{334}$ 或 $n = p_1^4p_2^{111}$ 或 $n = p_1p_2p_3^{111}$.

10. 原方程为 $(x-1)(x^2\sin\theta-2x+4) = 0$.

因为原方程有 3 个正实根, 所以, 关于 x 的二次方程 $x^2\sin\theta-2x+4 = 0$ 有 2 个正实根, 即

$$\begin{cases}\Delta = 4-16\sin\theta\geq 0,\\ \sin\theta>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<\sin\theta\leq\frac{1}{4}.$$

又 $9\sin^2\theta-4\sin\theta+3$

$$= 9\left(\sin\theta-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{23}{9}\geq\frac{23}{9},$$

$$0<(1-\cos\theta)(2\cos\theta-6\sin\theta-3\sin 2\theta+2)$$

$$= 2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)(1-3\sin\theta)$$

$$= 2\sin^2\theta(1-3\sin\theta)$$

$$= \frac{8}{9}\times\frac{3}{2}\sin\theta\times\frac{3}{2}\sin\theta(1-3\sin\theta)$$

$$\le \frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{9\times 27}.$$

则 $u \ge \dfrac{\frac{23}{9}}{\frac{8}{9\times 27}} = \dfrac{621}{8}$.

当 $\sin\theta = \frac{2}{9}$ 时,上式等号成立.

故 $u_{\min} = \dfrac{621}{8}$.

11. 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, AB 的方程可写成

$y = \tan\theta\left(x - \frac{p}{2}\right)$,即

$$x = \cot\theta\cdot y + \frac{p}{2}. \qquad ①$$

这个结果对 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 也成立.

将式①代入抛物线方程得

$$y^2 - 2p\cot\theta\cdot y - p^2 = 0.$$

则 $y_A = \dfrac{p(\cos\theta + 1)}{\sin\theta}$, $y_B = \dfrac{p(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$.

故 $x_A = \cot\theta\cdot\dfrac{p(\cos\theta+1)}{\sin\theta} + \dfrac{p}{2} = \dfrac{p(1+\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta}$,

$x_B = \dfrac{p(\cos\theta - 1)^2}{2\sin^2\theta}$.

如图 6,过点 A、B 分别作 y 轴的垂线 AP、BQ. 则

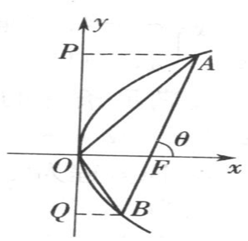


图 6

$$\tan\angle AOP = \frac{|AP|}{|OP|} = \frac{x_A}{y_A} = \frac{1+\cos\theta}{2\sin\theta},$$

$$\tan\angle BOQ = \frac{x_B}{-y_B} = \frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}.$$

所以, $\tan(\angle AOP + \angle BOQ) = \dfrac{4}{3\sin\theta}$.

故 $\angle AOB = \pi - (\angle AOP + \angle BOQ)$

$= \pi - \arctan\dfrac{4}{3\sin\theta}$.

12. 首先,当 $n = 90$ 时,如图 7,设 AB 是 $\odot O$ 的直径,在点 A 和 B 的附近分别取 45 个点,此时,只有 $2C_{45}^2 = 45\times 44 = 1\ 980$ 个角不超过 $120°$. 所以, $n = 90$ 不满足题意.

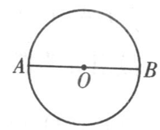


图 7

其次,当 $n = 91$ 时,接下来证明:至少有 2 007 个角不超过 $120°$.

对圆周上的 91 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{91}$,若 $\angle A_iOA_j > 120°$,则联结 A_iA_j,这样就得到一个图 G. 设图 G 中有 e 条边.

当 $\angle A_iOA_j > 120°$, $\angle A_jOA_k > 120°$ 时, $\angle A_iOA_k < 120°$,故图 G 中没有三角形.

若 $e = 0$,则有 $C_{91}^2 = 4\ 095 > 2\ 007$ 个角不超过 $120°$,命题得证.

若 $e \ge 1$,不妨设 A_1、A_2 之间有边相连,因为图中没有三角形,所以,对于点 A_i $(3 \le i \le 91)$,它至多与 A_1、A_2 中的一个有边相连. 从而,

$$d(A_1) + d(A_2) \le 89 + 2 = 91,$$

其中, $d(A)$ 表示从 A 处引出的边数.

又 $d(A_1) + d(A_2) + \cdots + d(A_{91}) = 2e$,而对图 G 中每一条边的两个顶点 A_i、A_j,都有 $d(A_i) + d(A_j) \le 91$.

于是,上式对每一条边求和可得

$$(d(A_1))^2 + (d(A_2))^2 + \cdots + (d(A_{91}))^2 \le 91e.$$

由柯西不等式得

$$91[(d(A_1))^2 + (d(A_2))^2 + \cdots + (d(A_{91}))^2] \ge [d(A_1) + d(A_2) + \cdots + d(A_{91})]^2 = 4e^2.$$

故 $\dfrac{4e^2}{91} \le (d(A_1))^2 + (d(A_2))^2 + \cdots + (d(A_{91}))^2 \le 91e$,

$$e \le \frac{91^2}{4} < 2\ 071.$$

因此,91 个顶点中,至少有

$$C_{91}^2 - 2\ 071 = 2\ 024 > 2\ 007$$

个点对,它们之间没有边相连. 从而,对应的顶点所对应的角不超过 $120°$.

综上所述, n 的最小值为 91.

(熊　斌、顾鸿达、李大元、刘鸿坤、叶声扬　命题)

2006 年上海市高中数学竞赛试卷

（2006 年 3 月 26 日　星期日　上午 8：30～10：30）

<table>
<tr><td rowspan="2">题 号</td><td>一</td><td colspan="4">二</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>1～8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>评 卷</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>复 核</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

【说明】解答本试卷不得使用计算器

一、**填空题**（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

1．设 x，y，z 是正实数，满足 $xy+z=(x+z)(y+z)$，则 xyz 的最大值是_________.

2．设从正整数 k 开始的 201 个连续正整数中，前 101 个正整数的平方和等于后 100 个正整数的平方和，则 k 的值为_____________.

3. 设 $n(n\geq 2)$ 是给定的整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，则 $\sin x_1\cos x_2+\sin x_2\cos x_3+\cdots+\sin x_n\cos x_1$ 的最大值是__________.

4．在△ABC 中，已知 $\angle A=30°, \angle B=105°$，过边 AC 上一点 D 作直线 DE，与边 AB 或者 BC 相交于点 E，使得 $\angle CDE=60°$，且 DE 将△ABC 的面积两等分，则 $\left(\dfrac{CD}{AC}\right)^2=$________.

5．对于任意实数 a，b，不等式 $\max\{|a+b|,|a-b|,|2006-b|\}\geq C$ 恒成立，则常数 C 的最大值是____________．（注：$\max\{x,y,z\}$ 表示 x，y，z 中的最大者．）

6. 设 $f(x)=x^2+ax+b\cos x$，$\{x\mid f(x)=0,x\in\mathrm{R}\}=\{x\mid f(f(x))=0,x\in\mathrm{R}\}\neq\varnothing$，则满足条件的所有实数 a，b 的值分别为______________________________.

7．在直三棱柱中，已知底面积为 s 平方米，三个侧面面积分别为 m 平方米，n 平方米，p 平方米，则它的体积为________________________________立方米.

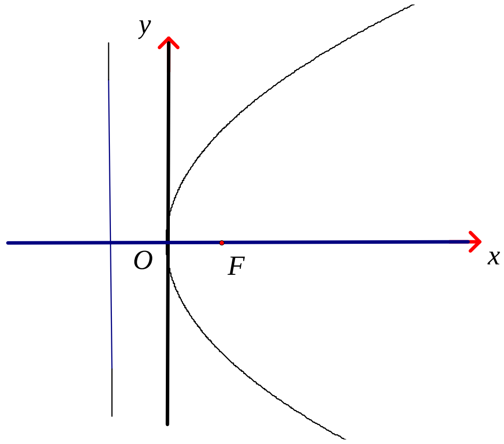
8．已知函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 满足：对任意 $x,y\in\mathbf{R}^+$，都有

$$f(x)f(y)=f(xy)+2006\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2005\right),$$

则所有满足条件的函数 f 为______________________________.

二、解答题

9．（本题满分 14 分） 已知抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$，其焦点为 F，一条过焦点 F，倾斜角为 $\theta\,(0<\theta<\pi)$ 的直线交抛物线于 A，B 两点，连接 AO（O 为坐标原点），交准线于点 B'，连接 BO，交准线于点 A'，求四边形 $ABB'A'$ 的面积.



10．（本题满分 14 分） 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=1$，且当 $n\geq 2$ 时，

$$a_n=\begin{cases} a_{\frac{n}{2}}+1, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{1}{a_{n-1}}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

已知 $a_n=\dfrac{30}{19}$，求正整数 n.

11．（本题满分 16 分） 对一个边长互不相等的凸 $n\,(n \geq 3)$ 边形的边染色，每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种，但是不允许相邻的边有相同的颜色．问：共有多少种不同的染色方法？

密

封

线

12．（本题满分 16 分） 设 $a, b \in [0, 1]$，求

$$S = \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + (1-a)(1-b)$$

的最大值和最小值．

2006 年上海市高中数学竞赛答案

一、填空题（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

1、$\dfrac{1}{27}$　　　　2、20100

3、$\dfrac{n}{2}$　　　　4、$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5、1003　　　　6、$0 \le a < 4$，$b = 0$

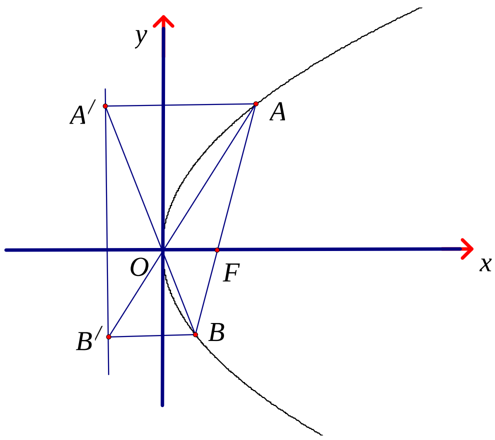
7、$\dfrac{\sqrt{s}}{2}\sqrt[4]{(m+n+p)(m+n-p)(p+m-n)(n+p-m)}$　　　　8、$f(x)=\dfrac{1}{x}+2006$

二、解答题

9．（本题满分 14 分） 已知抛物线 $y^2 = 2px\,(p>0)$，其焦点为 F，一条过焦点 F，倾斜角为 $\theta\,(0<\theta<\pi)$ 的直线交抛物线于 A，B 两点，连接 AO（O 为坐标原点），交准线于点 B'，连接 BO，交准线于点 A'，求四边形 $ABB'A'$ 的面积．

解 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$S_{ABB'A'}=2p^2$．　……………………（4 分）

当 $\theta \ne \dfrac{\pi}{2}$ 时，令 $k=\tan\theta$．设 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$，则由



$$y=k(x-\frac{p}{2}),\qquad ①$$

$$y^2=2px,\qquad ②$$

消去 x 得，$y^2-\dfrac{2p}{k}y-p^2=0$，所以

$$y_1+y_2=\frac{2p}{k},\quad y_1y_2=-p^2.\qquad ③$$

又直线 AO 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，即为 $y=\dfrac{2p}{y_1}x$，所以，AO 与准线的交点的坐标为 $B'(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{p^2}{y_1})$，而由③知，$y_2=-\dfrac{p^2}{y_1}$，所以 B 和 B' 的纵坐标相等，从而 $BB' \parallel x$ 轴．同理 $AA' \parallel x$ 轴，故四边形 $ABB'A'$ 是直角梯形．………………（9 分）

所以，它的面积为

$$S_{ABB'A'}=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)\cdot|A'B'|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|A'B'|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot|y_2-y_1|$$
$$=\frac{1}{2}(y_2-y_1)^2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]$$
$$=2p^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}=2p^2(1+\cot^2\theta)^{\frac{3}{2}}.$$ ………………（14 分）

10．（本题满分 14 分） 数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=1$，且当$n\geq 2$时，

$$a_n=\begin{cases}a_{\frac{n}{2}}+1,\text{ 当}n\text{为偶数时，}\\ \dfrac{1}{a_{n-1}},\text{ 当}n\text{为奇数时.}\end{cases}$$

已知$a_n=\frac{30}{19}$，求正整数 n.

解 由题设易知，$a_n>0, n=1, 2, \cdots$. 又由$a_1=1$，可得，当 n 为偶数时，$a_n>1$；当$n\,(>1)$是奇数时，$a_n=\frac{1}{a_{n-1}}<1$. ………………（4 分）

由$a_n=\frac{30}{19}>1$，所以 n 为偶数，于是$a_{\frac{n}{2}}=\frac{30}{19}-1=\frac{11}{19}<1$，所以，$\frac{n}{2}$是奇数.

于是依次可得：

$$a_{\frac{n}{2}-1}=\frac{19}{11}>1,\quad \frac{n}{2}-1\text{是偶数，}$$

$$a_{\frac{n-2}{4}}=\frac{19}{11}-1=\frac{8}{11}<1,\quad \frac{n-2}{4}\text{是奇数，}$$

$$a_{\frac{n-2}{4}-1}=\frac{11}{8}>1,\quad \frac{n-6}{4}\text{是偶数，}$$

$$a_{\frac{n-6}{8}}=\frac{11}{8}-1=\frac{3}{8}<1,\quad \frac{n-6}{8}\text{是奇数，}$$

$$a_{\frac{n-6}{8}-1}=\frac{8}{3}>1,\quad \frac{n-14}{8}\text{是偶数，}$$

$$a_{\frac{n-14}{16}}=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}>1，\frac{n-14}{16}\text{是偶数，}$$

$$a_{\frac{n-14}{32}}=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}<1，\frac{n-14}{32}\text{是奇数，}$$ ……………（9 分）

$$a_{\frac{n-14}{32}-1}=\frac{3}{2}>1，\frac{n-46}{32}\text{是偶数，}$$

$$a_{\frac{n-46}{64}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}<1，\frac{n-46}{64}\text{是奇数，}$$

$$a_{\frac{n-46}{64}-1}=2>1，\frac{n-110}{64}\text{是偶数，}$$

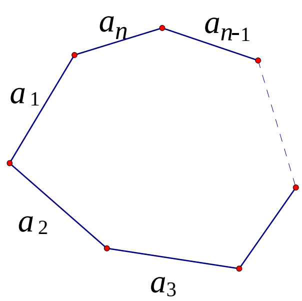
$$a_{\frac{n-110}{128}}=2-1=1，$$

所以，$\frac{n-110}{128}=1$，解得，n＝238．　　　………………（14 分）

11．（本题满分 16 分） 对一个边长互不相等的凸 $n\,(n\ge 3)$ 边形的边染色，每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种，但是不允许相邻的边有相同的颜色．问：共有多少种不同的染色方法？

解　设不同的染色法有 p_n 种．易知 $p_3=6$．　　　………………（4 分）

当 $n\ge 4$ 时，首先，对于边 a_1，有 3 种不同的染法，由于边 a_2 的颜色与边 a_1 的颜色不同，所以，对边 a_2 有 2 种不同的染法，类似地，对边 a_3，…，边 a_{n-1} 均有 2 种染法．对于边 a_n，用与边 a_{n-1} 不同的 2 种颜色染色，但是，这样也包括了它与边 a_1 颜色相同的情况，而边 a_1 与边 a_n 颜色相同的不同染色方法数就是凸 n－1 边形的不同染色方法数的种数 p_{n-1}，于是可得



$$p_n=3\times 2^{n-1}-p_{n-1}，$$ ………………（10 分）

$$p_n-2^n=-\left(p_{n-1}-2^{n-1}\right).$$

于是
$$p_n-2^n=(-1)^{n-3}\left(p_3-2^3\right)=(-1)^{n-2}\cdot 2，$$

$$p_n = 2^n + (-1)^n \cdot 2,\quad n \ge 3.$$

综上所述，不同的染色方法数为 $p_n = 2^n + (-1)^n \cdot 2$. ………………（16 分）

12．（本题满分 16 分） 设 $a,b \in [0,1]$，求

$$S = \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + (1-a)(1-b)$$

的最大值和最小值．

解 因为

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + (1-a)(1-b) \\ &= \frac{1+a+b+a^2b^2}{(1+a)(1+b)} = 1 - \frac{ab(1-ab)}{(1+a)(1+b)} \\ &\le 1 \quad , \end{aligned}$$

当 $ab=0$ 或 $ab=1$ 时等号成立，所以 S 的最大值为 1． ………………（6 分）

令 $T = \dfrac{ab(1-ab)}{(1+a)(1+b)}$， $x = \sqrt{ab}$，则

$$T = \frac{ab(1-ab)}{1+a+b+ab} \le \frac{ab(1-ab)}{1+2\sqrt{ab}+ab}$$

$$= \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x)^2} = \frac{x^2(1-x)}{1+x}.$$ ………………（10 分）

下证 $$\frac{x^2(1-x)}{1+x} \le \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$ ①

$$① \Leftrightarrow (x - \frac{\sqrt{5}-1}{2})^2(x+\sqrt{5}-2) \ge 0,$$

所以 $$T \le \frac{5\sqrt{5}-11}{2},$$

从而 $$S \ge \frac{13-5\sqrt{5}}{2},$$

当 $a=b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时等号成立，所以 S 的最小值为 $\dfrac{13-5\sqrt{5}}{2}$． ……………（16 分）

2005 年上海市高中数学竞赛（CASIO 杯）试题

（3 月 27 日 上午 8：30 到 10：30）

一、填空（前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分，共 60 分）

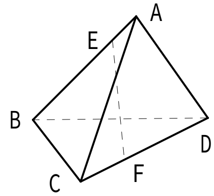
1．计算：$\mathrm{i}^{0!}+\mathrm{i}^{1!}+\mathrm{i}^{2!}+\cdots+\mathrm{i}^{100!}=$______．（i 表示虚数单位）

2．设 θ 是某三角形的最大内角，且满足 $\sin 8\theta=\sin 2\theta$，则 θ 可能值构成的集合是________________．（用列举法表示）

3．一个九宫格如图，每个小方格内都填一个复数，它的每行、每列及对角线上三个格内的复数和都相等，则 x 表示的复数是______．

x		
		i
	1	

4．如图，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 6cm，在棱 AB、CD 上各有一点 E、F，若 $AE=1$cm，$CF=2$ cm，则线段 EF 的长为______cm．



第 4 题图

5．若关于 x 的方程 $4^x+(a+3)2^x+5=0$ 至少有一个实根在区间[1,2]内，则实数 a 的取值范围为______．

6．a、b、c、d、e 是从集合{1,2,3,4,5}中任取的 5 个元素（允许重复），则 $abcd+e$ 为奇数的概率为______．

7．对任意实数 x、y，函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$，若 $f(1)=1$，则对负整数 n，$f(n)$ 的表达式______．

8．实数 x、y、z 满足 $x+y+z=0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$，记 m 为 x^2、y^2、z^2 中最大者，则 m 的最小值为______．

二、（14 分）（9、10 题各 14 分，11，12 题 16 分）

9．设 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$，求满足下列条件的实数 a 的值：至少有一个正数 b 使 $f(x)$ 的定义域和值域相同．

10．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$、$b\in\mathbf{R}^+$）的半焦距为 c，且 $b^2=ac$．P、Q 是双曲线上任意两点，M 为 PQ 的中点，橙子奥数工作室录入暗记，当 PQ 与 OM 的斜率 k_{PQ}、k_{OM} 都存在时，求 $k_{PQ}\cdot k_{OM}$ 的值．

11．设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．求集合 $\{n\mid n=[\dfrac{k^2}{2005}],1\le k\le 2004,k\in\mathbf{N}\}$ 的元素个数．

12．数列 $\{f_n\}$ 的通项公式为 $f_n=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$，$n\in\mathbf{Z}^+$．记 $S_n=\mathrm{C}_n^1f_1+\mathrm{C}_n^2f_2+\cdots+\mathrm{C}_n^nf_n$，求所有的正整数 n，使得 S_n 能被 8 整除．

简略答案：1．$95+2\mathrm{i}$　2．$\{\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{10},\dfrac{9\pi}{10}\}$　3．$\dfrac12+\dfrac12\mathrm{i}$　4．$\sqrt{23}$　5．$[-8.25,-3-2\sqrt5]$

6．$\dfrac{1749}{3125}$　7．$\dfrac{n^2+3n-2}{2}$　8．$\dfrac12$　9．0 或 -4　10．$\dfrac{1+\sqrt5}{2}$　11．1503　12．当且仅当 $n\mid 3$

2004年上海市高中数学竞赛（CASIO 杯）

2004年3月28日 星期日 上午8∶30——10∶30

一、填空题（每小题7分）

1．若 a、b、c 都是正整数，且 $a=(b+c\mathrm{i})^3-47\mathrm{i}$，则 a 的值是_____。

2．在△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边依次为 a、b、c。若 $a^2+b^2=tc^2$，且 $\cot C=2004(\cot A+\cot B)$，则常数 $t=$_____。

3．三边长是连续的3个整数，且它的周长小于或等于100的锐角三角形有_____个。

4．设 $M_k=P_1P_2P_3\ldots P_k$，其中 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_k$ 依次是从小到大排列的质数2，3，5，…中的前 k 个质数。若 s,t 是两个正整数，$t>s$，使 $M_t-M_s=510300$，则 $s+t$ 的值是_____。

5．n 为已知正整数，$0\le r\le n$，$r\in Z$，则当 $r!(n-r)!$ 取最小值时，$r=$_____。

6．当 x、y 都是实数时，集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$c=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，若 $(A\bigcup B)\bigcap C$ 是两个元素构成的集合，则实数 $a=$_____。

7．已知集合 $M=\{(a,b)\mid(y^2+4)a^2-2(xy+by+8)a+x^2+2bx+2b^2+12$ 是关于 x、y 的一次式的平方$\}$，当（a,b）取遍集合中的所有元素时，点（a,b）到原点的最大距离是_____。

8．三个半径都是10cm的小球放在一个半球形的碗中，小球的顶端恰好与碗的上沿处于同一平面内，橙子奥数工作室录入暗记，则这个碗的半径是_____。

9．F 是抛物线焦点，O 为抛物线的顶点，AB 为与该抛物线的对称轴成45°角的焦点弦，则∠AOB 的大小为（用反三角函数表示）_____。

10．已知集合 $A=\{3k+2\mid 0\le k\le 667,k\in Z\}$。若在 A 中任取个 n 数，都能从中找到两个不同的数 a、b 使 $a+b=2104$，则 n 的最小值为_____。

二、解答题（第11、12题16分，第13题18分）

11．已知 $f(x)=x^3+mx^2+nx+5$，m、n 都是整数。求：

（1）使 $f(x)=0$ 有三个整数根（包括重根）的所有数组（m，n）

（2）使 $f(x)=0$ 至少有一个整数根，且 $m,n\in[0,5]$ 的所有的数组（m，n）

12．数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$，$n\in N_+$ 且 $a_{100}=10098$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

13．在各位数码各不相同的10位数中，是11111的倍数的有多少个？证明你的结论。

简略答案：1．52　2．4009　3．29　4．11　5．当 n 为偶数时为 $\frac{n}{2}$，当 n 为奇数时，为 $\frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{2}$

6．0或1　7．$\frac{2\sqrt{21}}{3}$　8．$10(1+\frac{\sqrt{21}}{3})$　9．$\pi-\arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}$（或 $\pi-\arctan\frac{4\sqrt{2}}{3}$）　10．352　11．⑴（7，11）、（3，－9）、（－5，－1）⑵（5，1）　12．$(n-1)(n+2)$　13．3456个

2003 年上海市高中数学竞赛(CASIO 杯)试题

(2003 年 3 月 30 日　星期日　上午 8：30-10：30)

一、填空题：(本题 10 小题，每小题 7 分，共 70 分)

1、已知二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的判别式的值为 1，两实根之积为 4，则动点(b，c)的轨迹方程为__________．

2、在平面 α 上有一个△ ABC，$\angle ABC=60°$，$AC=\sqrt{3}$．在平面 α 的两侧分别有点 S、T，满足 $SA=SB=SC=2$，$TA=TB=TC=3$，则 ST 的长为_____．

3、不等式 $1+2^x<3^x$ 的解是__________．

4、函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值 $M(a)=$_____．

5、△ ABC 是边长为 5 的正三角形，P 为其内一点，使 $PA=4$，$PB=3$，则 $PC=$_____．

6、数列{ a_n }的前 n 项和 $S_n=cna_n$ (n 是正整数，c 为实常数)且 $a_1\neq a_2$，则 $\dfrac{a_{100}}{a_{99}}=$_____．

7、[x]表示不超过实数 x 的最大整数．设实数 x 不是整数且 $x+\dfrac{99}{x}=[x]+\dfrac{99}{[x]}$，则 $x=$_____．

8、若关于 x 的方程 $x^2-6x+a=0$ 与 $x^2+26x+b=0$ 的四个实根适当排列后可构成一个首项为 1 的等比数列，则 $\dfrac{a}{b}$ 的值为____．

9、已知对一切实数 x 恒有 $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 都是周期函数，则它们的公共正周期的最小值为_____．

10、若对一切正实数 x、y，恒有 $\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)(3x^2+y^2)}}\leq\dfrac{1}{k}$，则 k 的最大值为_____．

二、(16 分) 已知 a、b 为实数，i 为虚数单位，且关于 z 的二次方程

$4z^2+(2a+i)z-8b(9a+4)-2(a+2b)i=0$ 至少有一个实根，求这个实根的最大值．

三、(16 分) 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=2$，$abc=4$．

(1) 求 a、b、c 中最大者的最小值；(2) 求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值．

四、(18 分)已知 a、b、c 为实数，且三次方程 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 有三个实根，试用 a、b、c 给出使三个实根为某三角形三边长的一个充要条件，并证明你的结论．

命题人：李大元、刘鸿坤、熊　斌、叶声扬

简略答案：一、1．$x^2-y^2=1\,(y\neq 0)$　2．$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$　3．$x>1$　4．当 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时为 $1-a$，当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时为 a　5．$\sqrt{25-12\sqrt{3}}$　6．$\dfrac{99}{98}$　7．-9.9　8．1　9．24　10．$1+\sqrt{3}$　二、$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+1$　三、(1) 4　(2) 6　四、a、b、c 都是正数，且 $-a^3+4ab-8c>0$

2002 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题：（每小题 7 分，共 70 分）

1．一个正三角形 ABC 内接于椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，顶点 A 的坐标为（0，2），过顶点 A 的高在 y 轴上，则此正三角形的边长为_____．

2．已知 x、y 为正数，且 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$， $\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$，则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____．

3．袋里装有 35 个球，每个球上都记有从 1 到 35 的一个号码，设号码为 n 的球重 $\frac{n^2}{3}-5n+23$ 克，这些球以同等的机会（不受其重量的影响）从袋里取出．若同时从袋内任意取出两球，则它们重量相等的概率为_____．（用分数作答）

4．正四棱台的上底、下底及侧面（四个等腰梯形）的面积之比为 2:5:8，则侧面与底面所成角的大小为_____．

5．若对 $|x|\le 1$ 的一切 x，$t+1>(t^2-4)x$ 恒成立，则 t 的取值范围是__________．

6．实数 a,b,c,d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=5$，则 $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ 的最大值是_____．

7．定义在 N_+ 上的函数 f 满足 $f(1)=2002$ 和 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)\ (n>1)$，则 $f(2002)=$_____．

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2x}(1-x+\sqrt{1-2x+2x^2})$， $x\in[2，4]$，则该函数的值域是_____．

9．$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，点 P、Q 分别在边 AC、AB 上，若 $AP=PQ=QB=BC$，则 $\angle A$ 的大小是_____．

10．棱长为 1 的正四面体，在平面上投影面积的最大值是_____．

二、（16 分）已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是等差数列，它们的前 n 项和分别是 S_n、T_n，且对一切正整数 n，$(31n+3)S_n=(3n+31)T_n$．（1）求 b_{28}/a_{28} 的值；（2）求使 b_n/a_n 为整数的所有正整数 n．

三、（16 分）设 F 是所有有序 n 元组 $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 构成的集合，其中 $A_i\ (1\le i\le n)$ 都是集合 $\{1,2,3,\cdots,2002\}$ 的子集，设 $|A|$ 表示集合 A 的元素的数目，对 F 中的所有元素 $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，求 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 的总和，橙子奥数工作室防盗暗记，即 $\sum\limits_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$．

四、（18 分）纸上写有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个正整数，第 1 步划去前面 4 个数：1,2,3,4，在 n 的后面写上划去的 4 个数的和 10；第 2 步再划去前面 4 个数：5,6,7,8，在最后写上划去的 4 个数的和 26；如此下去（即每步划去前面 4 个数，在最后面写上划去的 4 个数的和）．

（1）若最后只剩下一个数，则 n 应满足的充要条件是什么？

（2）取 $n=2002$，求只剩下一个数为止所有写出的数（包括原来的 1,2,…,2002）的总和．

命题人：李大元、刘鸿坤、熊 斌、叶声扬

简略答案：一、1．$\frac{72\sqrt{3}}{31}$ 2．$\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3．$\frac{1}{85}$ 4．$\arccos\frac{3}{8}$ 5．$[\frac{\sqrt{13}-1}{2},\frac{\sqrt{21}+1}{2}]$ 6．20 7．$\frac{2}{2003}$
8．$[\frac{1}{4},\frac{\sqrt{5}-1}{4}]$ 9．20° 10．$\frac{1}{2}$ 二、（1）$\frac{61}{7}$ （2）$n=1$，18，35，154 三、$2002(2^{2002n}-2^{2001n})$
四、（1）n 除以3余1 （2）12 800 878

2001 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题（每小题 7 分，共 70 分）

1．等差数列$\{x_n\}$满足 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100}=-1, x_2+x_4+\cdots+x_{2k}+x_{100}=1$，其通项公式是 $x_n=$_____．

2．向量$\vec{a}=\{1,\sqrt{2}\},\vec{b}=\{-\sqrt{2},1\}$，正数 k 和 t 使$\vec{x}=\vec{a}+(t^2+1)\vec{b}$与$\vec{y}=-k\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}$垂直，则 k 的最小值是_____．

3．设 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的点，Q 是圆$(x-5)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PQ|$ 的最小值是_____．

4．α 是锐角，β 是钝角，且$\sec(\alpha-2\beta)$，$\sec\alpha$，$\sec(\alpha+2\beta)$成等差数列，则$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=$_____．

5．将一张画有直角坐标系的图纸折叠一次，使得点 A (0，2)与点 B (4，0)重合，若此时点 C (7，3)与点 D (m，n)重合，则 $m+n$ 的值是_____．

6．已知正四棱锥的底面与侧面的夹角为 45°，则相邻两个侧面的所成角的大小是_____．

7．当且仅当 k 满足 $a\le k\le b$ 时，两曲线 $x^2+y^2=4+12x+6y$ 与 $x^2+y^2=k+4x+12y$ 有公共点，则 $b-a$ 的值是_____．

8．已知点集 $A=\{(x,y)\mid x=\mathrm{Im}(z), y=\mathrm{Im}(z^2), z\in\mathrm{C}, |z|=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2, r>0\}$，且 $A\subseteq B$，则 r 的最小值是_____．

9．“渐升数”是指每个数字比其左边数字大的正整数，如 34689．已知有 $\mathrm{C}_9^5=126$ 个五位“渐升数”．若把这些数按照从小到大的顺序排列，第 100 个数是_____．

10．橙子奥数工作室防盗暗记．若关于 x 的不等式$\frac{x^2+(2a^2+2)x-a^2+4a-7}{x^2+(a^2+a-5)x-a^2+4a-7}<0$的解集是一些区间的并集，且这些区间的长度之和不小于 4，则实数 a 的取值范围是__________．

二、（16 分）设 A、B、A_i（$1\le i\le k$）为集合．

（1）满足 $A\cup B=\{a,b\}$的集合有序对(A,B)有多少对？

（2）满足 $A\cup B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的集合有序对$(A,B)$有多少对？

（3）满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的集合有序组$(A_1,A_2,\cdots,A_k)$有多少组？为什么？

三、（16 分）某出版公司为一本畅销书定价如下：$C(n)=\begin{cases}12n & (1\le n\le 24)\\ 11n & (25\le n\le 48)\\ 10n & (49\le n)\end{cases}$

这里 n 表示订书的数量，$C(n)$是订购本书所付的钱款数（单位：元）．

（1）有多少 n 个，会出现买多于 n 本书比恰好买 n 本书所花的钱少？

（2）若一本书成本价是 5 元，现在两人来买书，每人至少买一本，两人共买 60 本，则出版公司至少能赚多少钱？至多能赚多少钱？

四、（18 分）实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2001}$满足$\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$．令 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$，$k=1,2,\cdots,2001$．求$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$的最大值．

（命题人：李大元　刘鸿坤　熊　斌　叶声扬　余应龙）

简略答案：一、1．$3n/50-152/50$　2．2　3．2　4．$-\sqrt{2}$　5．34/5　6．120°　7．140　8．5/4　9．24789　10．$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$　二、（1）9　（2）3^n　（3）$(2^k-1)^n$　三、（1）有六个 n：23、24、45、46、47、48　（2）最少赚 302 元，最多赚 384 元　四、2000

2000 年上海市高中数学竞赛试题

（2000 年 3 月 19 日 星期日 上午 8:30--10:30）

（说明）解答本试卷不得使用计算器

一、填空题（本题 10 小题，每小题 7 分，共 70 分）

1．若函数 $f(x)=\cot\frac{x}{4}-\cot x$ 又能写成 $f(x)=\dfrac{\sin kx}{\sin\frac{x}{4}\sin x}$，则 k 的值是_____．

2． $\sin 10°+2\sin 10°\sin 20°\sin 40°$ 的值是_____．

3．设$\{a_n\}$是一个等差数列，$a_1=19$，$a_{21}=3$，记 $A_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+6}$，则 $|A_n|$ 的最小值为_____．

4．由方程$|x-6|+|y|=|\frac{\pi}{2}|$所对应的曲线围成的图形的面积是_____．

5．两个圆$C_1:x^2+y^2=1$和$C_2:(x-2)^2+y^2=16$，则与C_1外切且与C_2内切的圆的圆心轨迹方程是_____．

6．若$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，则方程$[\cot x]=2\cos^2 x$ 的解集是__________．

7．数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1,a_2=1,a_3=-2$，若对一切正整数 n 都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，且 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\neq 1$，橙子奥数工作室防盗暗记，则该数列的前 4321 项的和 S_{4321} 的值是________．

8．已知 $a\in Z$，且 $x^6-33x+20$ 能被 x^2-x+a 整除，则 a 的值是________．

9．在四面体 $ABCD$ 中，$AD=DB=AC=CB=1$，则它的体积的最大值是________．

10．在 1，3，5，7，…，99 这 50 个连续奇数中任取 k 个数，使得在这 k 个数中必存在三个数，以这三个数为边长可以组成三角形，则 k 的最小值是________．

二、（16 分）橙子奥数工作室防盗暗记．1，2，3，4，5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 具有如下性质：对于$1\le i\le 4$，$a_1,a_2,\cdots,a_i$ 不构成$1,2,\cdots,i$ 的某个排列，求这种排列的个数．

三、（16 分）有多少个正整数有序数对(x,y)，具有如下性质：$y<x\le 100$，且$\frac{x}{y}$和$\frac{x+1}{y+1}$都是整数？

四、（18 分）设 P_1，P_2，⋯，P_n 是 n 个不同质数，用这些质数作为项（允许重复），任意组成一个数列，使这个数列不存在某些相邻项的积是完全平方．证明：这种数列的项数有最大值（记为 $L(n)$），并求 $L(n)$ 的表达式．

简略答案

一、1．$\frac{3}{4}$　 2．$\frac{1}{4}$　 3．$\frac{7}{5}$　 4．24　 5．$\dfrac{(x-1)^2}{25/4}+\dfrac{y^2}{21/4}=1$　 6．$\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=l\pi+\frac{\pi}{4}$，k、$l\in Z\}$

7．-4321　 8．4　 9．$2\sqrt{3}/27$　 10．9　 二、21　 三、85　 四、2^n-1

1999 年上海市高中数学竞赛试题

（1999 年 5 月 15 日 星期六 上午 8：30 -- 10：30）

一、填空题（本题 10 小题，每小题 7 分，共 70 分）

1．α 是第三象限角，且 $6\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，则 $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$_____．

2．正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，点 G 是底面△ABC 的重心，点 M 在线段 DG 上，且使得∠AMB = 90°，则 DM 的长为_____．

3．$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，点 M、N 分别在边 BC、CD 上，$BF\perp AM$，$BH\perp AN$，$DE\perp AN$，$DG\perp AM$，其中 F、H、E、G 为垂足，且∠$GAH=\theta$，则四边形 $EFGH$ 的面积是_____．

4．若 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，则实数 a、b、c 的大小关系是_____．

5．原有 m 个同学准备展开通信活动，每人都必须给另外 $m-1$ 个同学写 1 封信，后来又有 n 个同学对活动感兴趣，若已知 $n>1$，且由于增加了 n 个同学而多写了 74 封信，则原有同学人数 $m=$_____．

6．已知 a、b 为实数，方程 $x^2=ax+b$ 的一个根为 6，另一根的绝对值小于 2，则抛物线 $y=-x^2+ax+b$ 的顶点的轨迹是_____．

7．点 P 在双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支上，A_1、A_2 分别为左、右顶点，且∠PA_2x = 3∠PA_1x+ 10°，则∠PA_1x 的大小是_____度．

8．△AEF 是矩形 $ABCD$ 的内接直角三角形，E、F 分别在边 BC、CD 上，∠AEF = 90°，$AE=4$，$EF=3$，则矩形 $ABCD$ 的面积最小值是_____．

9．数列 $x_1,x_2,\cdots$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2},x_{k+1}=x_k^2+x_k\ (k\in N)$，则和 $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_{1999}+1}$ 的整数部分是_____．

10．橙子奥数工作室防盗暗记．$\dfrac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 44^\circ}{\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 44^\circ}$ 的值是_____．

二、（本题 16 分）△ABC 的边长 $a,b,c\ (a\le b\le c)$ 同时满足下列三个条件：(1) a,b,c 均为整数；(2) a,b,c 组成等比数列；(3) a 与 c 中至少有一个等于 100．求出三元数组 (a,b,c) 的所有可能的解．

三、（本题 16 分）四个不同的实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}=4$ 且 $ac=bd$，求 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}$ 的最大值．

四、（本题 18 分）对于平面上任意 n 个点构成的点集 P，如果其中任意两点之间的距离均已确定，那么就称这个点集是“稳定的”．求证：在 $n\ (n\ge 4)$ 个点的平面点集 P 中，无三点共线，且其中的 $\dfrac{1}{2}n(n-3)+4$ 个两点之间的距离已被确定，那么点集 P 就是“稳定的”．

简略答案：一、1．$\dfrac{7}{5}$　2．$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　3．$\dfrac{1}{2}\sin^2\theta$　4．$b>c>a$　5．18　6．$y=x^2-12x+36\ (2<x<4)$　7．20　8．12　9．1　10．1　二、共有 10 组可能的解：(49，70，100)，(64，80，100)，(81，90，100)，(100，100，100)，(100，110，121)，(100，120，144)，(100，130，169)，(100，140，196)，(100，150，225)，(100，160，256)　三、-12　四、略

1998 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题（每小题 7 分，共 70 分）

1． $f(n)$ 是定义在正整数集 N_+上的函数，且满足 $f(1)=2$，$f(n+1)=\dfrac{2f(n)+1}{2}$，则 $f(1998)=$_____．

2．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是开口向下的抛物线，a、b、c 各不相等，且都在集合{绝对值不大于 5 的整数}中取值，则这些抛物线中通过点（0，1）的有_____条．

3．已知圆方程 $x^2+y^2-2\sqrt{m+1}x-\sqrt{m}y+m+1=0$ （m 为正参数），则圆心的轨迹是_____．

4．设 $\theta\in\mathrm{R}$，$0<\varphi<2\pi$．若关于 x 的二次不等式 $x^2\cos\theta+2\sin\varphi(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta>0$ 的解集为区间（1，10），则 φ 的值是_____．

5．橙子奥数工作室防盗暗记．计算 $\dfrac{C_{11}^0}{1}+\dfrac{C_{11}^1}{2}+\dfrac{C_{11}^2}{3}+\cdots+\dfrac{C_{11}^{11}}{12}=$_____．

6．已知 $f(x)=\sin x+\cos(x+t)$ 为偶函数，且 t 满足不等式 $t^2-3t-40<0$，则 t 的值为_____．

7．设非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，且使 $2^x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}=40\times5^y\cdot\vec{a}+(2-x)\vec{b}$，则有序实数组（$x$，$y$）为_____．

8．若关于 x 的不等式 $\sqrt{9-x^2}\geq -a^2x$ 的解集的区间长度是 $\dfrac{15}{4}$，则 a 的值是_____．

9．△ABC 的边长为 5，12，13．一个以 1 为半径的圆在三角形内部沿边线无滑动地滚动一周，则圆心移动的长度是_____．

10．在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$|AB|$、$|BC|$、$|CD|$、$|DA|$依次成等差数列，且公差 $d=3+\sqrt{3}$，则 $|AB|=$_____．

二、（16 分）设 $n\in N_+$，且使得 $37.5^n+26.5^n$ 为正整数．求 n 的值．

三、（16 分）一个正方形的三个顶点 A、B、C 在抛物线 $y=x^2$ 上，求它的面积的最小值．

四、（18 分）设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$ 是两个实系数非零多项式，且存在实数 r，使 $g(x)=(x-r)f(x)$．记 $a=\max|a_i|\,(0\leq i\leq n)$，$c=\max|c_k|\,(0\leq k\leq n+1)$．求证：$\dfrac{a}{c}\leq n+1$．

简略答案：

一、1．1000.5　2．36　3．双曲线 $x^2-4y^2=1$ 在第一象限内的部分　4．$7\pi/6$ 或 $11\pi/6$　5．1365/4

6．$-3\pi/2$ 或 $\pi/2$ 或 $5\pi/2$　7．（3，-1）　8．$\pm\sqrt[4]{15}$　9．15　10．2

二、1，3，5，7　三、2　四、略

1997 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、填空题

1．已知两直线 $x-y=2$ 与 $cx+y=3$ 的交点在第一象限，则实数 c 的取值范围是_____．

2．△ABC 中，已知$(CA+AB)$∶$(AB+BC)$∶$(BC+CA)=4$∶5∶6，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$_____．

3．$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 179°$ 的值是_____．

4．设 α 为三角形的一个内角，且 $(\lg 2+\lg 3)^{\sin 4\alpha}>1$，则实数 α 的取值范围为_____．

5．已知椭圆 $x^2-2ax+3y^2+a^2-6=0$ 有一个焦点在直线 $x-y+4=0$ 上，则实数 α 的值是____．

6．如图（A'、B'、C'在面 ABC 同侧，图略），在几何体 $ABC-A'B'C'$中，已知棱 AA'、BB'、CC'都垂直底面 ABC，且 $AB=BC=CA=AA'=2$，$BB'=4$，$CC'=3$，则该几何体的体积为_____．

7．已知定义在闭区间[0,3]上的函数 $f(x)=kx^2-2kx$ 的最大值为 3，则实数 k 的值是_____．

8．展开式 $(1+x+1/x)^7$ 的常数项是_____．

9．$f(x)+g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}$（$x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$），且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $[f(x)]^2-[g(x)]^2$ _____．

10．已知数列 $a_k=2^k$（$1\le k\le n$），则所有可能的乘积 a_ia_j（$1\le i\le j\le n$）的和为_____．

11．△ABC 中，已知 $BC=4$，$AC=3$，$\cos(A-B)=3/4$，则△ABC 的面积为_____．

12．在直角坐标系中，过点(1，2)且斜率小于 0 的直线中，它在两坐标轴上的截距之和最小的直线的斜率为_____．

13．平面内有 10 个点，其中有 5 个点在一条直线上．此外没有 3 个点在一条直线上，则过这 10 个点里的任 2 点可作条_____不同射线．

14．在集合 $\{n\,|\,1\le n\le 100, n\in N\}$ 中取出两个不同的数，使它们的和大于 100，则不同的取法有_____种．

15．橙子奥数工作室防盗暗记．设复数 z_1、z_2 满足 $z_1z_2=1$，$z_1^3+z_2^3=0$，且 $z_1+z_2\ne 0$．z_1、z_2 在复平面内的对应点为 Z_1、Z_2，O 为原点，则△Z_1OZ_2 的面积是_____．

16．若 x、y 为实数，且 $x^2+2xy-y^2=7$，则 x^2+y^2 的最小值为_____．

17．四个正数的和为 4，平方和为 8，则这四个数中最大的那个的最大值为_____．

18．设 $x>1$，$y>1$，则方程 $x+y+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2})$ 的解（x，y）＝_____．

19．已知 Rt△ABC 的两直角边 $AC=2$，$CB=3$，CP 为∠ACB 的平分线（P 在斜边 AB 上），沿 CP 将直角三角形折成二面角 $A-CP-B$，当 $AB=2\sqrt{2}$ 时，二面角 $A-CP-B$ 的大小是_____．

20．某种商品凡购买 100（包括 100）件以下的按零售价结算，购买 10l（包括 101）件以上的按批发价结算．已知批发价每件比零售价低 2 元，某人原欲购该商品若干件，需按零售价结算付 a 元，但若多买 21 件，则可按批发价结算恰好也是 a 元（a 为整数），则 a 的值为_____．

第二试

一、填空题

1．已知 $\tan\alpha=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$（其中 a、b 为非零常数），则 $(a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha-ab\cos^2\alpha=$_____．

2．已知点 $A\,(0,4)$，$B\,(4,0)$．若抛物线 $y=x^2-mx+m+1$ 与线段 AB（不包括端点 A 及 B）有两个不同的交点，则 m 的取值范围为__________．

3．已知集合 A、B 各有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，集合 C 满足条件 $C\subset A\cup B$，C 含有 3 个元素且 $C\cap A\ne\varnothing$，这样的集合 C 共有_____个．

4．数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^k)$，$b_n=\cos(a_n\pi)$，则$\sum_{k=1}^{n}b_k$的值为_____．

5．集合$A=\{z\ \big|\ |z+\frac{2}{\sqrt{3}}|\le 1, z\in C\}$，$B=\{z\ \big|\ z\in C, |z|\le 1\}$，则$A\cap B$中幅角最大的复数是_________．

6．若多项式$P(x)$满足方程$P(x^2)+2x^2+10x=2x\cdot P(x+1)+3$，则其解析式$P(x)=$_____．

7．橙子奥数工作室防盗暗记．正整数m、n满足$\frac{m+n}{m^2+mn+n^2}=\frac{4}{49}$，则$m+n$的值为_____．

8．有一个顶点向下且底面呈水平状的圆锥形容器，轴截面是边长为6的正三角形，容器里装满了水，现有一正四棱锥，底面边长为a （$a<6$），高为h （$h>6$），竖直地浸在容器里，为了使容器溢出的水最多，a的值应取为_____．

9．已知实数x、y、z、t满足$x+y+z+t=0$，$x^2+y^2+z^2+t^2=10$，则$xy+yz+zt+tx$的最大值与最小值的和为_____．

10．数100！的各位数字从右往左看时，第一个不是0的数字是_____．

二、双曲线$xy=1$上，横坐标为$\frac{n}{n+1}$的点为A_n，横坐标为$\frac{n+1}{n}$的点为B_n （$n\in N_+$）．记坐标为（1,1）的点为M，$P_n(x_n, y_n)$是$\triangle A_nB_nM$的外心．求$n\to+\infty$时，P_n的极限坐标(a, b)，这里$a=\lim_{n\to+\infty}x_n, b=\lim_{n\to+\infty}y_n$．

三、设$S=\{1，2，3，4\}$，n项的数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$具有以下性质：对于S的任意一个非空子集B（B的元素个数记为$|B|$），在该数列中有相邻的$|B|$项恰好组成集合B．求n的最小值．

四、求平面直角坐标系中格点凸五边形（每个顶点的横坐标、纵坐标都是整数）的周长的最小值．

简略答案

第一试

1．$(-1,\frac{3}{2})$　2．7∶5∶3　3．90　4．$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{4},\pi)$　5．-6或-2　6．$3\sqrt{3}$　7．1或-3　8．393

9．$-2\cos x\ (x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$　10．$\frac{4}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)$　11．$\frac{3\sqrt{7}}{2}$　12．$-\sqrt{2}$　13．78 14．2500　15．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

16．$\frac{7\sqrt{2}}{2}$　17．$1+\sqrt{3}$　18．$(\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$　19．$\arccos(-\frac{1}{6})$　20．840

第二试：

一、1．0　2．$(3,\frac{17}{3})$　3．1084　4．-1　5．$-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$　6．$2x+6$　7．16　8．$2\sqrt{2}$　9．-10　10．4

二、（2，2）　三、8　四、$2+3\sqrt{2}$

1996 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题

1．若 α , β , $\alpha+\beta$ 都是锐角，用“ $>$ ”连接 $\sin(\alpha+\beta)$ ，$\sin\alpha+\sin\beta$ ，$\cos\alpha+\cos\beta$ 是________________．

2．三角方程 $\cos 2x=0$ 在区间 $[0，100]$ 内的所有解的和是_____．

3．已知满足条件 $|z^2|+|z^2-1|=7$ 的复数 z 在复平面内的所对应的点的集合是一条二次曲线，则该二次曲线的离心率 $e=$_____．

4．$\triangle ABC$ 的斜边上的高是 CD ，且 $AD=\dfrac{1}{3}AB$. 将 $\triangle ACD$ 绕 CD 旋转至 $\triangle A_1CD$，使得二面角 A_1-CD-B 为 $60°$ ，则异面直线 A_1C 与 AB 所成的角的大小是_____（用反三角函数表示）.

5．若关于 x 的二次方程 $ax^2-(3a+1)x+4a-5=0$ 至少有一个整数根，则正整数 $a=$_____．

6．从集合 $M=\{\,a\,|\,a\in N$ 且 $a\le 100\,\}$ 中选取四个各不相等的数，使它们按照从小到大的顺序组成公比为整数的等比数列，则这样的等比数列有_____个.

7．橙子奥数工作室防盗暗记. 连接椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点 F_2 与椭圆上的动点 A ，作正方形 F_2ABC（F_2、A、B、C 四顶点按顺时针方向排列），则当点 A 沿椭圆运动一周后，动点 C 的轨迹方程是_________．

8．四个半径为 1 的小球两两相切装在一个大球里面且都与大球相切，大球的半径是_____．

9．点集 $A=\{\,(x,y)\,|\,\sin(3x+5y)>0$ 且 $x^2+y^2\le\pi^2\,\}$所构成的平面图形的面积是_____．

10．若关于 x 的不等式 $|x-1|>x^2+a$ 仅有负数解，则实数 a 的取值范围是_________．

二、设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$是正整数，且没有两个是相邻的，又 $s_m=k_1+k_2+k_3+\ \cdots\ +k_m$（$m$ 是正整数）. 求证：对于每个正整数 n，区间［s_n，s_{n+1}）中至少含有一个完全平方数.

三、已知集合{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}，求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中的任意两个元素的差的绝对值大于 1.

四、平面上给定 n 个点 A_1，A_2，…，A_n，任意三点不共线. 由其中 k 个点对确定 k 条直线（即过 k 个点对中的每一点对作一条直线），使这 k 条直线不相交成三个顶点都是给定点的三角形. 求 k 的最大值.

简略答案：一、1．$\cos\alpha+\cos\beta>\sin\alpha+\sin\beta>\sin(\alpha+\beta)$　2．1024π　3．$\dfrac{1}{2}$　4．$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　5．2 或 3　6．16　7．$\dfrac{(x-\sqrt{5})^2}{4}+\dfrac{(y-\sqrt{5})^2}{9}=1$　8．$1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　9．$\dfrac{1}{2}\pi^3$　10．$1\le a<\dfrac{5}{4}$

二、略　三、设 a_n 为所求，则 a_1 到 a_{10} 依次为 1，3，7，14，26，46，79，133

四、若 n 为偶数，$k_{\max}=\dfrac{n^2}{4}$ ；若 n 为奇数，$k_{\max}=\dfrac{n^2-1}{4}$.

1995年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题

1．设 $f(x)$ 是二次函数，对一切 x 都有 $f(1-x)=f(x)$，且 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$，$f(0)=\frac{1}{4}$，则该二次函数的解析式是 $f(x)=$_____．

2．函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $g(x)=\log_{\sin\theta}(x+\cot^2\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则方程 $f(x)=1$ 的解是_____．

3．若虚数 z 使 $2z+\frac{1}{z}$ 为实数，则 $2z+\frac{1}{z}$ 的取值范围是_____．

4．由曲线 $y=1995\sin\frac{x}{2}$ $(\pi\le x\le 5\pi)$ 与直线 $y=1995$ 围成的图形的面积是_____．

5．以两坐标轴为对称轴的二次曲线经过 $(5,\frac{9}{4})$ 和 $(\frac{17}{2},\frac{45}{8})$ 两点，它的离心率 $e=$_____．

6．在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的相邻两个面上有两个正四棱锥 $V_1-A_1B_1C_1D_1$ 和 $V_2-BB_1C_1C$（V_1、V_2 都在正方体的外部），且这两个正四棱锥的侧面都是正三角形，则 $\angle V_1B_1V_2$ 的大小是_____（用反三角函数表示）．

7．正四面体 $ABCD$ 的棱长是 16，E 是棱 AB 的中点，F 在棱 CD 上，若 $CF=5$，则线段 EF 的长等于_____．

8．橙子奥数工作室防盗暗记．设 a、b、c 为正常数，x、y、z 为实数，且满足 $|x|\le a$，$|y|\le b$，$|z|\le c$，则 $(x+y+z)(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-y^2}+\sqrt{c^2-z^2})$ 的最大值是_____．

9．数列 $\{6^n-2\}$ 中依次取出所有能够被 11 整除的项组成数列 $\{a_n\}$，其通项公式 $a_n=$_____．

10．圆周上有 6 个点，连接其中的每两点得到许多条弦，这些弦可以相交成许多个三角形（有的三角形的顶点在圆内），则最多可以得到_____个三角形．

二、求最大的常数 k，使得对于 $[0,1]$ 中的一切实数 a,b,c,d 都有不等式

$$4+a^2b+b^2c+c^2d+d^2a\ge k(a^3+b^3+c^3+d^3).$$

三、求所有的有序实数对（a,b,c），使得对任意三个整数 x、y、z 都有

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|.$$

四、对于（0,1）内的某个有理数 $\frac{q}{p}$（p、q 为互质的整数），作两个整数 $\frac{p}{p+q}$，$\frac{q}{p+q}$；由这两个数，还可以按照上面的方法作出 4 个数：$\frac{p+q}{2p+q}$，$\frac{p}{2p+q}$，$\frac{p+q}{p+2q}$，$\frac{q}{p+2q}$；从这 4 个数有可以按照上面的方法作出 8 个数；…，求一切 $\frac{p}{q}$，使得从 $\frac{p}{q}$ 出发，用上述方法可以作出所有（0，1）内的有理数（包括 p/q 在内）．

简略答案：一、1．$-x^2+x+\frac{1}{4}$　2．$x=-2$　3．（$-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$）　4．7980π　5．$\frac{5}{4}$　6．$\arccos\frac{1-2\sqrt{2}}{4}$　7．$\sqrt{137}$　8．$\frac{1}{2}(a+b+c)^2$　9．$6^{10n-1}-2$　10．111　二、2　三、共六组（±1，0，0）、（0，±1，0）、（0，0，±1）　四、1/2

1994 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．设 $f(x)$ 是一个函数，且对一切实数 t， $f(2t+1)=4t^2+2t-6$，则 $f(x)=0$ 的根是_____．

2．设 $q=\dfrac{x}{1+x}$ 是某一个无穷等比数列的公比，且这个无穷等比数列各项的和存在，则实数 x 的取值范围是__________．

3．已知点 P（4，2），两直线 l_1：$x=3$，l_2：$x=13$，则通过 P 点且与 l_1、l_2 都相切的圆方程是_____．

4．已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$，则不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为__________．

5．在一个棱长为 $5\sqrt{6}$ cm 的正四面体内有一点 P，它在三个面的距离分别是 1cm、2cm 和 3cm，则它到第四个面的距离为_____cm．

6．已知 $5\sin 2\alpha=\sin 2^\circ$，则 $\dfrac{\tan(\alpha+1^\circ)}{\tan(\alpha-1^\circ)}$ 的值是_____．

7．若圆 $x^2+y^2=r^2$ 至少盖住函数 $f(x)=\sqrt{30}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2\sqrt{r}}$ 的一个最大值点和一个最小值点（本题中，若 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最大值 M，则（x_0，M）称为最大值点；最小值点类同）则正数 r 的取值范围为__________．

8．用列举法写出使 $z+\dfrac{1}{z}$ 等于某个整数的一切虚数 z 所构成的集合为_______________．

9．函数 $y=\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}$ 的值域是_____．

10．函数 $y=\sin x\cos x-\sin x-\cos x+1$ 的值域是_____．

11．设复数 z_1、z_2 满足 $z_2=z_1i-2$，而 z_1 在复平面内的对应点 z_1 在曲线 $|z-2|+|z+2|=10$ 上运动，则 z_2 在复平面内的对应点 z_2 的轨迹方程是__________．（在复平面原有的直角坐标系中，用普通方程表示）

12．在直角坐标系中，满足 $\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y+4\le 0\\ |x-2|+|y-3|\ge 3\end{cases}$ 的点（x，y）所构成的区域的面积是_____．

13．在一个棱长为 6cm 的密封正方体盒子中放一个半径为 1cm 的小球，无论怎样摇动盒子，小球在盒子中不能达到的空间的体积是_____cm^3（盒子的厚度不计）．

14．两个两位数，他们的差是 52，它们的平方的末位数字相同，则这两个数是__________．

15．从集合{1，2，3，4，5，6，7，8，9}中任取 3 个不同的数字 a、b、c，用 S 表示这 3 个数字通过排列组成的所有可能的三位数的和，使得 S 是无平方因子数（即 S 不含有超过 1 次的质因数）的三个数字的和 $a+b+c$ 有_____个不同的数值．

16．在四面体 $ABCD$ 中，棱 AB、CD 的长分别为 a 和 b，这两棱中点的距离为 d，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是_____．

17．地面上有三点，它们与电视塔底部的距离分别是 200 米、100 米和 50 米，在这三点测得的电视塔顶点的仰角之和为 135°，则电视塔高 $h=$_____米．

18．点 P 的坐标是 $(-12,5)$，过 P 向两条相交直线 $7x^2-24xy+17y^2=0$ 做垂线，两垂足间的距离为_____．

19．至少有一个数字是 6 的四位数中，有_____个是 3 的倍数．

20．设 a，b 是实数，二次方程 $x^2-ax+b=0$ 的一根属于区间[－1，1]，另一根属于区间[1，2]，则 $a-2b$ 的取值范围为__________．

第二试

1．已知 n 个正整数 $a_i\ (1\le i\le n)$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n\le 2n$，其中任意两个 a_i，$a_j\ (i\ne j)$ 的最小公倍数都大于 $2n$．求证 $a_1>[\frac{2n}{3}]$．（$[\frac{2n}{3}]$ 表示 $\frac{2n}{3}$ 的整数部分）

2．设△ABC 是锐角三角形，在△ABC 外分别做等腰 Rt△BCD，△ABE，△CAF．在这三个三角形中，∠BCD、∠BAE、∠CFA 是直角．又在四边形 $BCEF$ 外作等腰 Rt△EFG，∠EFG 是直角．求证：(1) $GA=\sqrt{2}AD$；(2) $\angle GAD=135°$．

3．(1) 设 n 是一个大于 3 的素数．求 $\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)$ 的值．

(2) 设 n 是一个大于 3 的自然数．求 $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)$ 的值．

4．设自然数 $n\ge 5$，n 个不同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质：对集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A、B．A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等．在上述条件下，求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值．

简略答案

第一试：1．3 或 -2　2．$(-1/2,0)\cup(0,+\infty)$　3．$(x-8)^2+(y-5)^2=25$ 或 $(x-8)^2+(y+1)^2=25$　4．(2，3)　5．4 6．$-3/2$　7．$[6,+\infty)$　8．$\{\pm i,\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\}$　9．$1\le y\le\sqrt{2}$　10．$0\le y\le\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$　11．$\frac{(x+2)^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$　12．$9\pi-18$　13．$56-40\pi/3$　14．76 和 24　15．6　16．$abd/6$　17．100　18．5　19．1056　20．[－1，5]

第二试：1．略　2．略　3．(1) 3　(2) ① 当 $n=3k$，则所求为 0；② $n=3k+1$ 时，所求为 $(-1)^{n-1}$；③ 当 $3k+1$ 时，所求为 $(-1)^n$．这里 k 为正整数．　4．$2-\frac{1}{2^{n-1}}$

1993年上海市高中数学竞赛试题

注：第一试由李大元、刘鸿坤、余应龙、叶声扬、许三保命题．

第二试由舒五昌、黄国宣、熊斌命题．

第一试

第一试全部是填空题，共20个，满分120分．

1．已知 $x\in N$，且 $\sqrt{3}$ 位于 $\frac{x+3}{x}$ 和 $\frac{x+4}{x+1}$ 之间，则 $x=$_____．

2．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于不同的两点 A、B，抛物线的顶点 C．若△ABC 是等腰直角三角形，则 $b^2-4ac=$_____．

3．已知方程 $x^2+(a-2)x+a+1=0$ 两实根为 x_1、x_2，而点（x_1，x_2）在圆 $x^2+y^2=4$ 上，则实数 $a=$_____．

4． $x^{10}+1$ 除以 $(x-1)^2$ 所得的余式是__________．

5．已知 $\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)=x$，$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=y$，$y\neq 0$．则用 x，y 表示 $\tan\alpha\tan\beta=$__________．

6．设抛物线 $y=x^2-2x\sin\theta+1$ 的顶点在椭圆 $x^2+4y^2=1$ 上，这种抛物线有_____条．

7．已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,y=ax+2\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=x+1\}$．若 $A\cap B$ 为单元素集合，则实数 a 的取值范围为__________．

8．若某三角形有两条高不短于它们所在的边，则该三角形的三个内角的度数是_____．

9．设 $x,y,z\in R^+$，且 $xyz(x+y+z)=1$，则 $(x+y)(y+z)$ 的最小值是_____．

10．在复平面内有一个边长为1的正方形，它的一个顶点是原点，在两条边分别落在 x 轴的正半轴上与 y 轴的正半轴上．若复数 z 在这正方形的周界上变动，则 $|z^2-1|$ 的最大值是_____．

11．三角形的三边长为6、8、10．该三角形内的点 P 到该三角形三边的距离的乘积的最大值是_____．

12．抛物线 $y^2=16x$ 的焦点为 F，以 F 与 A（4，4）为焦点作一椭圆，使其与已知抛物线有公共点，当长轴最短时，椭圆的方程是__________．

13．设点 A_0 在直角坐标系的原点，A_1，A_2，…依次在 x 轴的正半轴上，且 $|A_{n-1}A_n|=2n-1$，$n=1$，2，…．分别以 $A_{n-1}A_n$ 为边在 x 轴的上方作等边三角形 $A_{n-1}A_nB_n$．则过所有点 B_1，B_2，…，B_n 的抛物线方程是_______．

14．分别以直角三角形的两直角边为轴，将该三角形旋转一周所得的两个旋转体的体积分别是15和20．则以该直角三角形斜边为轴旋转一周所得的旋转体的体积是_____．

15．已知圆锥的内切球的面积是圆锥底面面积和侧面面积的等差中项，则圆锥母线与底面所成角的大小是_____．

16．过正△ABC 的中心 O 作直线分别与 AB、AC 交于点 D、E．若 $DO=3$，$OE=2$，则该正三角形的边长为_____．

17．橙子奥数工作室防盗暗记．设过椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点的弦 $AB=8$．则△AOB 的面积是_____．

18．从集合{1，2，3，…，45}中任取3个不同的数，使这3个数的和能被3整除．不同取法有_____种．

19．设 A_1，A_2，…，A_k 是集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$ 的一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，而 S 的其他子集不能与 A_1，A_2，…，A_k 的交都是非空集合，则 $k=$_____．

20．设 $n\in N$，$n\geq 3$，以 $f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数，例如 $f(12)=5$．若 $f(n)\geq 3$，又可做 $f(f(n))$ 等等．如果 $f(f(\cdots f(n)\cdots))=2$ （共 k 个 f），那么 k 叫做 n 的长度．对一切 $n\in N,n\geq 3$，用列举法表示 n

第二试

一、填空题（满分 60 分）

1．自然数 x 使得 $[x]+[\frac{x}{3!}]+[\frac{x}{5!}]+[\frac{x}{7!}]=1993$．则 $x=$______．

2．100 只椅子排成一个圆圈，有 n 个人做在椅子上，使得再有一个人入座时，他总与原来 n 个人中某一个坐在相邻椅子上．则 n 的最小值是______．

3．8 个人排成一行，甲、乙是其中两人，使甲、乙之间恰好有三人的不同排法有______种．(用数值表示)．

4．实数 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=1$ 及 $x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2=3$．则 x_3 的最小值是______．

5．已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|\geq 1$，$|z_2|\geq\frac{3}{2}$．橙子奥数工作室防盗暗记．则复数 $i^{1993}z_1+i^{1995}z_2+2z_1z_2$ 的模长的最小值是______．(i 为虚数单位)

二、(25 分) 在半径为 1 的圆内任给 14 个点．求证：其中必有两点的距离小于 0.72．

三、(25 分) 对自然数 k，$g(k)$ 表示 k 的最大奇因子（例如：$g(3)=3$，$g(20)=5$)．求 $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^n)$ （其中 n 为自然数)．

四、(30 分) 设自然数 a，b，c，d 满足 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 及 $a+c=20$．求 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值．

简略答案：第一试：1．4　2．4　3．$3-\sqrt{11}$　4．$10x-8$　5．$-\frac{x}{4y}$　6．4　7．$a\geq 1$ 或 $a\leq -1$　8．$90°, 45°, 45°$　9．2　10．$\sqrt{5}$　11．$\frac{128}{15}$　12．$\frac{(x-4)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$　13．$y^2=3(x-\frac{1}{4})$　14．12　15．$\arccos\frac{1}{3}$　16．$\frac{18\sqrt{7}}{7}$　17．8　18．4740　19．512　20．{1，2，3}　第二试：一、1．1697　2．34　3．5760　4．$-\frac{21}{11}$　5．$\frac{1}{2}$　二、略　三、$S_n=\frac{4^n+2}{3}$　四、$\frac{1385}{1386}$

1992 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．若组合数 $C_{10}^{k}=45$，则非负整数 $k=$_____．

2．设集合 $M=\left\{x\left|\,|x-20|<\dfrac{41}{2},x\in Z\right.\right\}$， $P=\left\{x\,\middle|\,|x|<40,x\in Z\right\}$，则集合 $M\cap P$ 中元素的总和是_____．

3．设 A、B、C 为$\triangle ABC$ 的三内角，则复数 $\dfrac{(1+\cos 2B+i\sin 2B)(1+\cos 2C+i\sin 2C)}{1+\cos 2A-i\sin 2A}$ 的虚部是_____．

4．若满足 $\cos\theta-\sin^{2}\theta=\alpha$ 的实数 θ 存在，则实数 α 的取值范围是_____．

5．设 x、y 为互质的自然数，且 $xy=1992$，则这样的不同的有序数组（x，y）的组数是_____．

6．若两数 $19x+1$，$92x+74$ 的较大值非负，则实数 x 的取值范围是__________．

7．凸四边形 $ABCD$ 的四个内角满足 $A<B<C<D$，且 A、B、C、D 成等差数列，则公差 d 的取值范围为__________．

8．若 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\dfrac{7}{8}\sin\beta$， $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}\tan\beta$，则 $\alpha=$_____．

9．若关于 x 的方程 $x^{2}-5x\log_{2}a+6(\log_{2}a)^{2}=0$ 的两根中仅有一个较小的根在区间（1，2）内，则实数 a 的取值范围是__________．

10．若 x，$y\in$R，且 $x^{2}+2\sqrt{3}xy-y^{2}=3$，则 $x^{2}+y^{2}$ 的最小值是_____．

11．若椭圆的长轴长为 4，左顶点在抛物线 $y^{2}=x-1$ 上，且左准线为 y 轴，则这样的椭圆的离心率的最大可能值是_____．

12．若正数 a 使不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le a\sqrt{x+y}$ 对一切正数 x、y 成立，则 a 的最小可能值是_____．

13．在平行六面体 $ABCD-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}$ 中，已知对角线 $A_{1}C=4$，$B_{1}D=2$．若 P 是空间一点使 $PA_{1}=3$，$PC=5$，则 $PB_{1}^{2}+PD^{2}=$_____．

14．$\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 的长依次是 2、3、4，D 是以$\triangle ABC$ 的外接圆为大圆的球面上一点，若 D 到 A、B、C 的距离相等，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积是_____．

15．正四棱柱 $ABCD-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}$ 的底面边长为 1，若两面角 $A-BD_{1}-C$ 的大小是 $\dfrac{2\pi}{3}$，则 $AA_{1}=$_____．

16．对平面区域 D，用 N（D）表示属于 D 的所有整点（即 xOy 平面上坐标 x、y 都是整数的点）的个数．若 A 表示由曲线 $y=x^{2}$（$x\ge 0$）和两直线 $x=10$，$y=1$ 所围成的区域（包括边界），B 表示由曲线 $y=x^{2}$（$x\ge 0$）和两直线 $x=1$，$y=100$ 所围成的区域（包括边界），则 N（$A\cup B$）$+N$（$A\cap B$）$=$_____．

17．设全集 $I=\{(x,y)\,|\,x、y\in R\}$，集合 $A=\{(x,y)\,|\,x\cos\theta+y\sin\theta-2=0,x、y、\theta\in R\}$，则在 xOy 平面上，集合 $\overline{A}$ （表示 A 的补集）元素的对应点构成的图形的面积是_____．

18．设 a、b 是两已知正数，且 $a>b$．点 P、Q 在椭圆 $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1$ 上，若连接点 A（$-a$，0）与 Q 的平行于直线 OP．且与 y 轴交于点 R，则 $\dfrac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^{2}}=$_____．（$O$ 为坐标原点）

19．设定点 P 在圆周 $x^{2}+y^{2}=1$ 上，若点 Q、R 在圆 $x^{2}+y^{2}=1$ 的内部或圆周上，且$\triangle PQR$ 为边长是 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 的正三角形，则 $|OQ|^{2}+|OR|^{2}$ 的最大值是_____．（O 为坐标原点）

第二试

一、填空题

1．不定方程 $6\left(5a^2+b^2\right)=5c^2$ 的满足 $c\le 20$ 的自然数解（a，b，c）共有_____组．

2．x、y 是实数．$z_1=x+\sqrt{11}+yi$，$z_2=x-\sqrt{11}+yi$（i 为虚数单位），$|z_1|+|z_2|=12$，令 $u=|5x-6y-30|$，则 u 的最大值是_____，u 的最小值是_____．

3．aoshoo.com 防盗暗记．已知 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$a\in R$，且 $a^4-2a^3\sin\theta+a^2-2a\sin\theta\cos^2\theta+\dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta=0$，则 $a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}=$_____．

4．设 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、d 是常数，如果 $P(1)=10$，$P(2)=20$，$P(3)=30$，则 $P(10)+P(-6)=$_____．

5．在 1，2，3，4，5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中，满足 $a_1<a_2,a_2>a_3,a_3<a_4,a_4>a_5$ 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 共有_____种．

二、在桌面上放有七个半径为 R 的木球 O、O_1、O_2、⋯、O_6，球 O_1、O_2、⋯、O_6 都与球 O 相切．问在这些球上面是否可以再放三个半径为 R 的木球 O_7、O_8、O_9，使得 O_7、O_8、O_9 这三个球都与球 O 相切？并说明理由．

三、设 n 是给定的自然数，求所有正数对（a，b），使得 x^2+ax+b 是 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}$ 的因式．

四、设 n 是给定的自然数，$n\ge 3$，对于 n 个结定的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，记 $|a_i-a_j|\,(1\le i<j\le n)$ 的最小值为 m．求在 $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=1$ 的条件下，上述 m 的最大值．

简略答案 第一试：1．2 或 8　2．780　3．0　4．$-\dfrac{5}{4}\le a\le 1$　5．8　6．$[-\dfrac{37}{46},+\infty)$　7．$(0,\dfrac{\pi}{3})$　8．$\dfrac{\pi}{3}$　9．$[\sqrt[3]{4},2)$　10．$\dfrac{3}{2}$　11．$\dfrac{2}{3}$　12．$\sqrt{2}$　13．28　14．2　15．1　16．1010　17．4π　18．2　19．$\dfrac{2(4-\sqrt{6})}{3}$　20．$m(n+2)$　第二试：一、1．4　2．$30(\sqrt{2}+1)$，0　3．$\sin\theta/\cos^2\theta$　4．8104　5．16　二、可以　三、$a=\left(2\left|\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right|\right)^{\frac{2n}{2n-1}}$，$b=\left(2\left|\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right|\right)^{\frac{2}{2n-1}}$，其中 $k\in N_+$，且 $n<2k+1<3n$　四、$\sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}$

1991 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．在 $(1+x)^n$ 的二项展开式中，若第 9 项系数与第 13 项系数相等，则第 20 项系数为_____．

2．已知集合 $P=\{(x,y)\mid x=\sin\theta+\cos\theta, y=\sin 2\theta, \theta\in R\}$，$Q=\{(x,y)\mid x-y+1=0\}$，则用列举法表示 $P\bigcap Q=$__________．

3．已知 $p\neq 0$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{p+1}{2p^2}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{p-1}{2p^2}$，则用 p 表示 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=$_____．

4．已知每项都是正数的无穷等比数列各项的和是 5，首项 $a\in N$, 则公比 q 的最小可能值为_____．

5．已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，则 $(\log_{\frac{1}{2}}\sin\theta)(\log_{\frac{1}{2}}\cos\theta)$ 的值为_____．

6．已知直角坐标平面内四点 A（1，0），B（3，0），C（0，1），D（6，1），则该直角平面内到这四点的距离平方和最小的点的坐标是_____．

7. 当点 (x,y) 在曲线 $\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上变动时，代数式 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}$ 所能取到的最大值与最小值的和是_____．

8．一个等腰三角形顶角的顶点在原点 O，另两个顶点 A、B 在直角坐标平面的上半平面，腰长 $OA=OB=a$，底边 BA 中点 M 的坐标为 (b,c)，两腰所在直线的倾角分别为 α、β，则用 a、b、c 表示 $\cos(\alpha-\beta)=$_____．

9．已知函数 $y=\log_a(x-ka)+\log_a(x^2-a^2)$ 的定义域为 $x>a$，则实数 k 的取值范围为_____．

10．使复数 $z=\dfrac{\sin x+\sin 2x+i(2\cos^2 x\sin x-\tan x)}{\cos x-i}$ 成为实数的所有 x 构成的集合是_____．

11．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 为矩形，且面积为 1 平方米，侧面 PAB、PAD 都与底面垂直，侧面 PBC、PCD 与底面分别成 $60°$ 角与 $30°$ 角，则该四锥棱的体积为_____立方米．

12．已知三个半径为 6 的球在平面 α 的同一侧，与平面 α 都相切，且每个球与另外两个球外切，另有一个球和平面 α 及这三个球都相切，则它的半径为_____．

13．已知 $n\in N$，$2^n>n^3$，则 n 的取值范围为_____．

14．10 张不同颜色的卡片上各写一个数，其中有 2 个 5，3 个 2，5 个 1，从中取出 5 张卡片，使得这 5 张卡片上的数字的和在开区间（10，15）内，则不同的取法种数是_____．

15．对每个 $n\in N_+$，设 $a_n=\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{500}\dfrac{1}{a_{2n-1}}$ 的值是_____．

16．在双曲线 $4x^2-y^2=4$ 的两条渐进线上分别取点 A 和点 B，使 $|OA|\cdot|OB|=5$，其中 O 是双曲线的中心，则 AB 中点轨迹的普通方程是_____．

17．用平面去截一个正四棱柱，使截面为菱形，且有一个内角为 $30°$，则截面与底面所成的二面角大小为_____．

18．若三角方程 $\sin(x+\dfrac{\pi}{4})-\sin 2x=a$ 有实数解，则实数 a 的取值范围为_____．

19．若 x_1、x_2 是方程 $x^2-x\sin\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}=0$ 的两个根，则 $\arctan x_1+\arctan x_2$ 的值是_____．

20．已知椭圆的长轴长为 4，焦距 $|F_1F_2|=2$，过椭圆的焦点 F_1 的两条互相垂直的弦的长度和是 48/7，则这两条弦的长度的积是_____．

第二试第一轮

1．$a>0$ 且方程 $x^2-ax+a=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，则当 a 为_____时，$\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$ 最小，最小值为_____．

2．设 n 为使 $a_n=(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i)^n$ 取实数的最小自然数，则对应此 n 的 $a_n=$_____.

3．将一枚硬币抛 10 次，那么至少连续 5 次都出现正面的不同情形共_____种.

4．设在坐标平面上有区域 $2^x-1\le y<2^n-1$，$x>0$，那么在此区域中，x、y 的坐标都取整数的点的个数是_____.（这里 n 是给定的大于 2 的正整数）

5．设多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+x^{2n}$ 的根都是正整数，并且 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}=-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$，那么 $a_1=$_____.

6．给定正整数 $n\ge3$，令 S 是集合{2，3，…，n}的所有非空子集组成的集合，对每一个 $S_i\in S$，$i=1,2,\cdots,2^{n-1}-1$．令 P_i 是 S_i 中所有元素的乘积．那么 $P_1+P_2+\cdots+P_{2^{n-1}-1}=$_____.

7．将三个数 $10a^2+81a+207$，$a+2$，$26-2a$ 给予适当的编排，分别取常用对数后成公差为 1 的等差数列，那么此时 $a=$_____.

第二试第二轮

1．求满足 $[x^2-2x]=[x]^2-2[x]$ 的一切实数 x．其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2．设 $S=\{1，2，3，4\}$．$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 S 中的数所成的数列，它包含 S 的不以 1 结尾的任何排列，即对于 S 的四个数的任意一个不以 1 结尾的排列（b_1,b_2,b_3,b_4），$b_4\ne1$，都有 i_1,i_2,i_3,i_4 使得 $1\le i_1<i_2<i_3<i_4\le k$，并且（$a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4}$）=（$b_1,b_2,b_3,b_4$）．求这种数列的项数 k 的最小值.

3．$n,m\in N$，求证：$\frac{1}{2(m+2)}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(m+2)+\sqrt{m}\right]^{2(2n-1)}+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(m+2)-\sqrt{m}\right]^{2(2n-1)}+2\right\}$ 是完全平方数.

4．给定△ABC，∠A、∠B、∠C 所对的边分别是 a、b、c．在△ABC 所在平面作直线 l 与△ABC 的某两边相交，沿 l 将△ABC 折成一个空间图形，将由 l 分成的小三角形的不在 l 上的顶点与另一部分的顶点连接，形成一个三棱锥或四棱锥．问：

（1）当 $a=b=c$ 时，l 如何作，并折成何种锥体，才能使所得锥体体积最大？（需详证）

（2）当 $a\le b\le c$ 时，l 如何作，并折成何种锥体，才能使所得锥体体积最大?（叙述结果，不要求证明.）

简略答案 第一试：1.20　2.$\{(-1,0)\}$　3.$-\frac{1}{p}$　4.$\frac{1}{5}$　5.$\frac{1}{4}$　6.$(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$　7.$\frac{41}{8}$　8.$\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{a^2}$

9．$-1\le k\le1$　10．$\{x\,|\,x=k\pi,k\in Z\}$　11．$\frac{1}{3}$　12．2　13．$n=1$ 或 $n\ge10$　14．110　15．5

16．$4x^2-y^2=\pm4$　17．$\arccos(2-\sqrt{3})$　18．$-2\le a\le\frac{9}{8}$　19．$\frac{3\pi}{4}$　20．$\frac{576}{49}$

第二试第一轮：1．4，2　2．-64　3．112　4．$2^n(n-2)+2$　5．$-2^{2n}n$　6．$\frac{(n+1)!}{2}-1$　7．$\frac{1}{2}$

第二轮：1．非正的整数及区间 $[n,\sqrt{(n-1)^2+1}+1)$ 内所有实数，其中 n 为正整数　2．11　3．略　4．(1) 当 l 与 AB、AC 边交于 E、D，使 $AE=AD=\frac{a}{\sqrt{3}}$，并且面 ADE 和面 $BCDE$ 垂直时，$V_{\max}=\frac{a^3}{12\sqrt{3}}$；(2) 将 (1) 中 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 换成 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{3}}$，其余条件不变，$V_{\max}=\frac{bc\sqrt{bc}}{9\sqrt{3}}\sin A\cos\frac{A}{2}$

1990 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．已知 $A=\{a\,|\,1\le a\le 10, a\in N\}$；$B=\{b\,|\,b=3a-1, a\in A\}$，用列举法表示 $A\cap B=$_____.

2．不等式 $(\frac{1}{2})^{\sqrt{1-x}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的解是_____.

3．直线 $y=\frac{4}{3}x$ 与 x 的轴的夹角平分线的方程是_____.

4．已知圆系方程是 $x^2+y^2-2x\tan\alpha-2y\sec^2\alpha+\tan^4\alpha+3\tan^2\alpha=0$ （$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$），则圆心轨迹的普通方程是_____.

5．已知数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}(2x_n+y_n)=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-2y_n)=1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_ny_n)=$_____.

6．某班中选正、副班长的方法数与选 4 名乒乓球队员的方法数之比是 $\frac{4}{287}$，则该班的学生数是_____.

7．梯形的两底分别是 a 和 b，将梯形绕长为 a 的底旋转一周所得旋转体体积为 V_1，绕长为 b 的底旋转一周所得旋转体体积为 V_2，则 $V_1/V_2=$_____.

8．若正四面体有一个半径为 2 的内切球，则它的棱长为_____.

9．已知复数 z 满足 $|z|=1$，$|\frac{1}{z^2+1}|>1$，则复数 z 的幅角主值的取值范围是_____.

10．抛物线 $y=\frac{1}{4a}x^2\ (a\neq 0)$ 以 P（$2a$，$2a$）为中点的弦所在的直线方程是_____.

11．倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线过点 $P(1,2)$，且与曲线 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<2\pi)$ 交于 A、B 两点，则 $|PA|\cdot|PB|=$_____.

12．已知⊙O 的半径为 1，A_1、A_2、…、A_8 是该圆周的 8 个等分点，自 A_1 作 $A_1B_2\perp OA_2$，垂足为 B_2；自 B_2 作 $B_2B_3\perp OA_3$，垂足为 B_3；…；自 B_8 作 $B_8B_9\perp OA_1$，垂足为 B_9，这样可以无限作下去，则使 $|B_nB_{n+1}|<\frac{1}{1990}$ 的最小自然数 $n=$_____.

13．方程 $\log_{\sin(-2x)}(\sin x+\sin 3x)=1$ 的解是_______________.

14．方程 $36\sin(3\pi x)=36x^2-12x+37$ 的解是_______________.

15．等腰△ABC 中，$AB=AC$，AD 是底边上的高，若 AB、BC、AD 三线段能组成一个三角形，则顶角 A 的取值范围是_____.

16．曲线 $9x^2-16y^2-36x\sin\theta+32y\cos\theta+52\sin^2\theta-160=0$ 的左焦点在直线 $x-y+4=0$ 上，则 $\tan\theta=$__.

17．过边长为 4 的等边△ABC 的三顶点分别作垂直于它所在平面的垂线 AA_1、BB_1、CC_1．若 AA_1、BB_1、CC_1 的长分别是 7、4、1，且在△ABC 所在平面的同侧，则△ABC 和 $A_1B_1C_1$ 所在平面所成的二面角大小为_____.

18．若 x、y、a 都是实数，且 $x+y=2a-1$，$x^2+y^2=a^2+2a-3$，则使乘积 xy 取最小值的 a 的值是_____.

19．三棱锥 $P-ABC$ 的底是边长为 a 的正三角形，$PA\perp$面 PBC，则 P 到面 ABC 的距离的最大值是_____.

20．已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$b_n=1+a_1+a_2+\cdots+a_n$，$c_n=2+b_1+b_2+\cdots+b_n$，若已知数列 $\{c_n\}$ 是等比数列，则它的通项公式 $c_n=$_____.

第二试第一轮

1．一个正数 x，它的小数部分$\{x\}$．整数部分$[x]$及这个正数本身是等比数列中的连续三项，则 $x=$_____．

2．设抛物线 $y=x^2+mx+2$ 与两端点为 $(0,1)$，$(2,3)$ 的线段有两个相异的交点，则 m 的取值范围是_____．

3．已知矩形的一边长为 m 厘米，两条互相垂直的直线将此矩形分为 4 个小矩形，其中 3 个小矩形面积不小于 m 平方厘米，第 4 个小矩形面积不小于 $2m$ 平方厘米．则此矩形另一边的最小可能值为_____厘米．

4．已知四面体各面都是棱长分别为 5，$\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$ 的三角形，则此四面体的体积是_____．

5．设 n 是自然数，$f(n)$ 为 n^2+1（十进制）的数字之和，$f_1(n)=f(n)$，$f_2(n)=f(f(n))$，…，$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$，$k\ge 1$，则 $f_{100}(1990)=$_____．

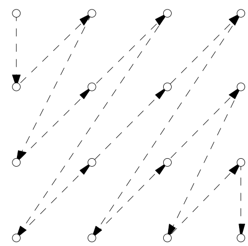
6．用 2、4、6 三个数字来构造 6 位数，但是不允许有两个连接着的 2 出现 6 位数中（例如，626442 是允许的，224626 就不允许），则这样的 6 位数的个数是_____．

7．在区间$1\le n\le 10^6$ 中，使得方程 $n=x^y$ 有非负整数解 x、y 且 $x\ne n$．这样的整数 n 有_____个．

第二试第二轮

1．空间四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，AD、BC 成 $60°$角，$AD=BC=a$，C_1、C_2、D_1、D_2 分别为 BC、AD 延长线上的点，且 $CC_1=C_1C_2=DD_1=D_1D_2=a$，又 CD、C_1D_1、C_2D_2 的长度成等比数列，求 AB 的长度．

2．若正整数 p、q、r 使得二次方程 $px^2-qx+r=0$ 在开区间（0，1）内有两个不同的实根，试求 p 的最小值．



3．有 n^2 张卡片，分别记上数字 1，2，3，…，n^2，再把它们排成 n 行 n 列的方阵：第一行为 1，2，…，n，第二行为 $n+1$，$n+2$，…，$2n$，依此类推，现从左上角到右下角将这些卡片依次编号（次序见图，右图为 $n=4$ 时的情况），这样得到一个从编号数 k 到卡片上原有数字 $f(k)$ 的函数关系：$k\to f(k)$（$k=1$，2，3，…，n^2）．当 $n=2^m$（$m=1$，2，…）时，试证不存在大于 1 而小于 n^2 的整数 k，使得 $f(k)=k$．

4．一等腰三角形 ABC 的底角为 α，腰长为 a，$\triangle ABC$ 的每一个内接三角形有一条最大的边，（注：本题所述的内接三角形是指$\triangle ABC$ 的每条边上至少有此内接三角形的一个顶点）求这些最大边的最小值，此时，这个内接三角形的形状如何？

简略答案：第一试 1．$\{2,5,8\}$　2．$\frac{3}{4}<x\le 1$　3．$y=\frac{1}{2}x$　4．$y=x^2+1$　5．$-\frac{3}{25}$　6．44　7．$\frac{a+2b}{2a+b}$

8．$4\sqrt{6}$　9．$[0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{3},2\pi)$　10．$x-y=0$　11．$\frac{26}{5}$　12．22　13．$x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\,(k\in Z)$

14．$x=\frac{1}{6}$　15．$0<A<4\arctan\frac{1}{2}$　16．0 或 $\frac{4}{3}$　17．$\arctan\frac{3}{2}$（或 $\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$）　18．$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$　19．$\frac{\sqrt{3}}{4}a$

20．2^{n+1}　第二试第一轮 1．$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　2．$[-\frac{3}{2},-1)$　3．$3+2\sqrt{2}$　4．20　5．11　6．448　7．1111

第二试第二轮 1．$\frac{\sqrt{14}}{2}a$ 或 $\frac{\sqrt{42}}{2}a$　2．5　3．略　4．略

1989 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．二次函数 $y=-2x^2+2x+1989$ 在[0，2]上的最小值是_____．

2．计算：$(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{1989}=$_____．

3．计算：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|n-100|}{2n}=$_____．

4．一个圆的极坐标方程是 $\rho=5\cos\theta-5\sqrt{3}\sin\theta$，若规定极角范围为 $0\le\theta<2\pi$，则它的圆心的极坐标方程是_____．

5．在△ABC 中，若 $5\tan B\tan C=1$，则 $\frac{\cos A}{\cos(B-C)}=$_____．

6．双曲线的两个焦点是 F_1（1，8）与 F_2（1，-12），它的实轴长等于 6，则它的标准方程是__________．

7．已知 $0<x<1$，且 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$，则 $x^{\frac{1}{2}}$、$y^{\frac{1}{3}}$、$z^{\frac{1}{5}}$ 从小到大的排列是__________．

8．在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=4$，$AC=AD=BC=BD=3$，则此四面体的体积为_____．

9．一直角梯形的两底分别为 5 和 8，高为 4，将它绕斜腰旋转一周所得的旋转体的表面积是_____．

10．若 $42\cdot7^{-(1+\cos x)}+7^{-2\cos x}=7$，且 $\pi<x<2\pi$，则 $x=$_____．

11．若一个等差数列，从第 1 项起无论多少项的和总等于项数的平方的 10 倍，则它的通项公式 $a_n=$_____．

12．二次曲线 $x^2-8x\sin^2\theta+4y+16\sin^2\theta+4=0$ $(\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi)$ 的焦点在直线 $x-y=3$ 上，则 $\theta=$ _____．

13．若 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\ne\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，则实数 a 的值等于_____．

14．计算：$\operatorname{arccot}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}=$_____．

15．若双曲线 $(x+m)^2-\frac{(y+2m)^2}{9}=1$ 的每条渐进线都与抛物线 $y=x^2+1$ 有两个相异的交点，则实数 m 的取值范围是_____．

16．计算：$\sum\limits_{k=1}^{12}\frac{C_{11}^{k-1}}{k}=$_____．

17．设 $A=\{(x,y)\mid 2-x^2-y^2-\sqrt{(1-x^2)^2+(1-y^2)^2}\ge0\}$ 表示直角坐标平面上的点集，则 A 的面积是_____．

18．袋中有编号 1~20 的 20 个球，其中编号为 1~10 的是红球，编号为 11~20 的是白球，规定取到 1 个红球得 2 分，取到 1 个白球得 3 分．若在袋中取若干个球，共得 20 分，则这类取法的不同种数是_____．

19．二次方程 $z^2-2(4\tan\theta+3)z+25\sec^2\theta=0$ 的两根在复平面上对应的点为 F_1、F_2．则当 θ 取遍 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的一切实数时，以 F_1、F_2 为焦点，且经过原点的椭圆的长轴端点轨迹的普通方程是_______________．

20．点 P 在直径为 1 的球面上，过 P 作两两垂直的三条弦，若其中一条弦长是另一条弦长的 2 倍，则这三条弦长的和的最大值是_____．

第二试第一轮

1．设[x]表示 x 的整数部分，$\{x\}=x-[x]$，则方程$[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$ 的所有实数根是_____．

2．若项数是 $2n$ 的等比数列的中央两项是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根，则该数列的所有项的积是_____．

3．使得对所有 x，不等式 $\sin^6 x + \cos^6 x + 2a\sin x\text{co } x \geq 0$ 都成立的实数 a 的值是_____．

4．设 $f_1(x) = 19x + 89$，对任意正整数 n 都有 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$，则 $f_{100}(5)$的末位数是_____．

5．将 100 枚壹分硬币分成个数不同的 7 堆，从中取 50 枚硬币．要求做到：若从某一堆中去取而又未取满 50 枚，则必须将这堆全部取完，并且触动到的堆数要尽可能地少．设触动到的堆数为 N，则 N 所有可能取到的值之和是_____．

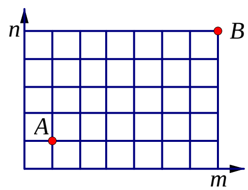
6．M 是具有下列性质的数：使对满足 $a + b + c + d + e = 1$ 的任意非负数 a、b、c 、d、e，在 $a + b$、$b + c$、$c + d$、$d + e$ 中至少有一个不小于 M，这样的 M 的最大值是_____．

7．将质因子只有 2，3，5 中的一个或二个或三个的合数的全体排成数列（由小到大排，原题中无此条件，但我认为加上此条件比较好）$n_1, n_2, n_3, \cdots$，则 $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots =$_____．

第二试第二轮

1．求使得 $1989 + n^2$ 是完全平方数的所有正整数 n 的值．

2．如图，有 $m\times n$ 个格点，求从点 A（1，1）到达点 B（m，n）的一条路径．使得它所经过的每一个格点的两坐标的乘积之和为最大，并求出此最大值．（注：这里所谓“路径”指的是向上、向右，即不允许逆着 x、y 轴的正向走）



3．设平面上有个凸多边形，如果在这凸多边形内有点 P，使得过 P 的任何直线都将这凸多边形分成面积相等的两块．问：这个凸多边形是怎样的多边形？并证明你的结论．

4．有 A、B 两张形状相同，面积都是 1 的纸板，在它们的上面分别描绘了 10 个国家的地图（这 20 个国家是互不相同的）．在 A 纸板上面的 10 个国家已用 10 种不同的颜色染色．证明：可以用同样的这 10 种颜色染 B 纸板上的 10 个国家，使得这两张纸板完全重迭后，同一种颜色的区域的总面积不小于 0.1．

简略答案：第一试 1．1985　2．$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$　3．$\frac{1}{2}$　4．$(5, \frac{5\pi}{3})$　5．$-\frac{2}{3}$　6．$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{91} = 1$

7．$y^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}} < z^{\frac{1}{5}}$　8．$\frac{8}{3}$　9．$\frac{564}{5}$　10．$\frac{3\pi}{2}$　11．$10(2n-1)$　12．$\frac{11\pi}{6}$　13．-2　14．$\frac{\pi}{2}$

15．$-\frac{5}{4} < m < \frac{1}{4}$　16．$\frac{1364}{4}$　17．4　18．51601　19．$\frac{y^2}{25} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$　20．$\frac{\sqrt{70}}{5}$

第二试第一轮 1．-1　2．q^n　3．$[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$　4．5　5．6　6．$\frac{1}{3}$　7．$\frac{103}{60}$

第二试第二轮 1．共 6 个：994，330，106，70，50，6　2．$\frac{m}{6}(3n^2 + m^2 + 3n - 1)$　3．中心对称，P 为对称中心　4．略

1988 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．函数 $y=\arcsin(2^{x^2-4x+3})$ 的定义域是__________．

2．一条抛物线的开口向左，它的顶点在 y 轴上，它的对称轴是 $y=3$，它的焦点与顶点间的距离是 5，则这条抛物线的方程是__________．

3．在同一直角坐标系中，若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\dfrac{4x+3}{2x-1}$ 的图象关于原点 O 中心对称，则函数 $y=f(x)$ 的解析表达式是__________．

4．设点 E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 的中点，将△ABE、△BCF、△FDA 分别沿 AE、EF、FA 向上翻折，使 B、C、D 三点合为一点 P．若正方形的边长为 a，则三棱锥 $P-AEF$ 的体积是_____．

5．橙子奥数工作室防盗暗记．设 a 为实数，$S_a=\{(x,y)\,|\,x=a+\cos\theta, y=\dfrac{a}{2}+\sin\theta,\theta\in R\}$，若 $S_a\subseteq\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$，则 a 的取值范围是_______________．

6．两球相嵌，大球半径 $R=4$，小球半径 $r=2$，且两球的连心线长 $d=4$，该组合体的可见表面积是_____．

7．等差数列 $5,8,11,\cdots$ 与等差数列 $1,5,9,\cdots$ 均有 300 项，则有_____个数同时在这两个数列中出现．

8．A、B、C 是△ABC 的内角，则满足 $\cos10A=\cos10B=\cos10C=1$ 及 $A\le B\le C$ 的有序数组（A、B、C）的组数是_____．

9．$1+10^4+\dfrac{10^4(10^4-1)}{1\times2}+\dfrac{10^4(10^4-1)(10^4-2)}{1\times2\times3}+\cdots+\dfrac{10^4(10^4-1)\cdots(10^4-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k}+\cdots+\dfrac{10^4(10^4-1)(10^4-2)\cdots1}{1\times2\times3\times\cdots\times10^4}$ 是_____位数．（可参考数据：$\lg2\approx0.30103$）

10．设长方形 $ABCD$ 的长 DA 和宽 AB 分别为 a 和 b（$a>b$），将△ABD 沿对角线 BD 翻折，使 $AB\perp DC$，则异面直线 AB、CD 的距离为_____．

11．设 m、n 是自然数，且使 $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$ 成立（其中 i 是虚数单位），则乘积 mn 的最小值是_____．

12．设 $x+2y\ge1$，$5x+y\ge2$，则 $\log_8(2^x+2^y)$ 的最小值是_____．

13．把由数字 1，3，5，7，8，9 组成的没有重复数字的四位数按从小到大的顺序排列起来，则第 100 个数是_____．

14．已知直线 $Ax+By+C=0$（A、B 为实常数，且 $|A|\ne|B|$）和曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$，它们相交于 P、Q 两点．若 P、Q 与点 D（1，0）的连线的倾角为 α、β，则 $\tan(\alpha+\beta)=$_____．

15．若 φ 满足 $0\le\varphi<2\pi$，且使得关于 x 的两个二次方程 $x^2+x\cos\varphi+\sin\varphi=0$，$x^2+x\sin\varphi+\cos\varphi=0$ 至少有一个公共的实数根，则这样的 φ 的个数是_____．

第二试第一轮

1．集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2+2x\le1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x-y+a\ge0\}$，若 $A\cap B$ 仅含有一个点，则 $a=$_____．

2．若对于正整数 n，记 $a_n=\dfrac{10^n}{n!}$，则使 a_n 取值最大的 n 是：$n=$_____．

3．有 5 双共 10 只尺码不同的手套（左、右手有区别），从这 10 只手套中取出 4 只：① 恰有 2 只成 1 双的取法有_____种；② 恰成 2 双的取法有_____种．

4．设数列$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$是$\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$，则该数列的第 1988 项$a_{1988}=$_____．

5．满足$P(-1)=1$，$P(1)=3$，$P(3)=21$，$P(21)=8823$的一个多项式$P(x)=$_____．

6．设自然数 a、b 满足$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=b$，且$b>1$，则$a+b$的最小值等于_____．

7．橙子奥数工作室防盗暗记．$\sum_{k=0}^{n}\arctan\frac{1}{1+k+k^2}=$_____．

第二试第二轮

1．设$x^2+y^2=xy=1$，求$x^{3n}+y^{3n}$的值（n为自然数）．

2．椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的长轴的左、右端点分别为A、B．x轴上方有两点C、D满足：$DA\perp AB$，$CB\perp AB$，且$DA=3\sqrt{2}$，$CB=\sqrt{2}$，当动点P在椭圆上什么位置时，$\triangle PCD$的面积最小？并求出该最小值．

3．已知集合$S=\{0，l，2，\cdots，9\}$，设A_1，A_2，…，A_k是集合S不同的非空子集．且其中任意两个子集的交集至多含有两个元素，说出k可取的最大值，并证明你的结论．

4．对集合$S=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\mid a_i=0$ 或 $1，i=1,2,3,4,5\}$中的任意两个元素$(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\overline{a_4},\overline{a_5})$和$(\overline{b_1},\overline{b_2},\overline{b_3},\overline{b_4},\overline{b_5})$，定义它们之间的距离为$|\overline{a_1}-\overline{b_1}|+|\overline{a_2}-\overline{b_2}|+|\overline{a_3}-\overline{b_3}|+|\overline{a_4}-\overline{b_4}|+|\overline{a_5}-\overline{b_5}|$．取$S$的一个子集，使此子集中任意两个元素之间的距离大于 2．这个子集最多含有多少个元素．证明你的结论．

简略答案：

第一试

1．[1，3]　2．$(y-3)^2=-20x$　3．$y=-\frac{4x-3}{2x+1}$　4．$\frac{1}{24}a^3$　5．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}<a<\frac{2\sqrt{5}}{5}$　6．70π　7．75

8．2　9．3011　10．$\sqrt{a^2-b^2}$

第二试第一轮

1．-1　2．9 或 10　3．120，10　4．$\frac{29}{35}$　5．x^3-x^2+3（答案不唯一）　6．384　7．$\arctan(n+1)$

第二试第二轮

1．$2\cos\frac{n\pi}{2}$　2．P（$\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$）时，$S_{\min}=4-\sqrt{6}$　3．175　4．4

1987 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、选择题

1．如果 n 是整数，则 $n^2(n^2-1)$ 恒能以下各数中的哪个整除

A、8　　B、12　　C、24　　D、不同于上述答案

2．方程 $|\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4}|+1=|\log_{\frac{1}{2}}x^2|$ 的解为

A、$2,\sqrt[3]{2}$　　B、$2,\frac{1}{8}$　　C、$\frac{1}{8},\sqrt[3]{2}$　　D、$2,\sqrt[3]{2},\frac{1}{8}$

3．集合{1，2，3，4，…，1987}的非空真子集的个数是

A、$2^{1987}-2$　　B、$2^{1987}-1$　　C、2^{1987}　　D、$2^{1987}+1$

4．当 t 取实数值变化时，用 $x=\frac{7+5t^2}{1+t^2}$，$y=\frac{2t}{1+t^2}$ 表示的点（x，y）表示的曲线是

A、圆　　B、不完整的圆　　C、椭圆　　D、不完整的椭圆

5．若 $(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots(1+1987x)$ 的展开式中，x 的一次项系数为 n，则 i^n 等于（这里 i 为虚数单位）

A、i　　B、-1　　C、$-i$　　D、1

6．在下列哪个范围内的 a，使方程 $x^2-6x+a=0$ 有两个比 5 小的不相等的正根

A、$a<9$　　B、$0<a<9$　　C、$0<a<5$　　D、$5<a<9$

7．圆锥的侧面展开图是半径为 1，圆心角为 270 ° 的扇形，则它过顶点的截面三角形的面积的最大值是

A、$\frac{1}{2}$　　B、$\frac{15}{32}$　　C、$\frac{3\sqrt{7}}{16}$　　D、$\frac{\sqrt{3}}{4}$

8．正四面体 $ABCD$ 的四个顶点在半径为 1 的球上，则 AB 的长为

A、$\sqrt{2}$　　B、$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C、$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D、$\frac{3\sqrt{6}}{4}$

9．F_1 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点，AB 为过原点的弦，则△ABF_1 面积的最大值为

A、20　　B、15　　C、27/2　　D、12

10．橙子奥数工作室防盗暗记．若 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$x=A\sin A$，$y=1+\sin^2 A$，则

A、$x>y$　　B、$x\geq y$，且等号可能成立　　C、$x<y$　　D、$x\leq y$，且等号可能成立

二、填空题

1．若直线 $(a-1)y=(3a+2)x-1$ 不通过第二象限（$x<0$，$y>0$），则 x 的取值范围是__________．

2．正四棱锥底面边长为 a，侧棱长为 l（$l>a$），过底面一顶点作垂直于对棱的截面，则该截面与底面夹角的正弦值等于_____．

3．非负实数 x,y,z 满足：$x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos(y+z)+\sqrt{2}[\cos(x+y)+\cos(x+z)]\geq 2$ 则 $3y+z-5x=$_____．

4．橙子奥数工作室防盗暗记．设 $x>0$，定义 $u_n(x)$ 如下：$u_0(x)=x$，$u_{n+1}(x)=\sqrt{x+2u_n(x)}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则方程 $u_{1987}(x)=x$ 的正根是_____．

5．正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 内接于单位圆⊙O 中，P 在 OA_1 的延长线上，且 OP 的长为 2，则 $|PA_1|\times|PA_2|\times\cdots\times|PA_7|=$_____．

第二试

1．如图，T 是锐角三角形，矩形 R，S 的一部分内接于 T，设 $A(X)$表示图形 X 的面积，求 $\dfrac{A(R)+A(S)}{A(T)}$ 的最大值．

2．证明：如果（0，1）区间上的实函数 f 同时满足（1）、（2），则它必定是常数函数．

（1）对任意 $x\in(0,1)$， $f(x)>0$ ；（2）对任何 $x,y\in(0,1)$， $\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(1-x)}{f(1-y)}\le 2$ ．

3．证明：下面的方程组只有零解： $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=0$

$$\begin{cases} x_1-\dfrac{1}{1\cdot 2}x_2-\dfrac{1}{2\cdot 3}x_3-\dfrac{1}{3\cdot 4}x_4-\cdots-\dfrac{1}{(n-1)n}x_n=0 \\ -\dfrac{1}{(n-1)n}x_1+x_2-\dfrac{1}{1\cdot 2}x_3-\dfrac{1}{2\cdot 3}x_4-\cdots-\dfrac{1}{(n-2)(n-1)}x_n=0 \\ \dfrac{1}{(n-2)(n-1)}x_1-\dfrac{1}{(n-1)n}x_2+x_3-\dfrac{1}{1\cdot 2}x_4-\cdots-\dfrac{1}{(n-3)(n-2)}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{1}{2\cdot 3}x_1-\dfrac{1}{3\cdot 4}x_2-\dfrac{1}{4\cdot 5}x_3-\cdots+x_{n-1}-\dfrac{1}{1\cdot 2}x_n=0 \\ -\dfrac{1}{1\cdot 2}x_1-\dfrac{1}{2\cdot 3}x_2-\dfrac{1}{3\cdot 4}x_3-\cdots-\dfrac{1}{(n-1)n}x_{n-1}+x_n=0 \end{cases}$$

4．双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左、右焦点为 P、Q，左、右准线为 AB、CD．现将双曲线所在的平面 α 绕它的一条渐进线 l 旋转成平面 β，使得 P 转到 P'，且 $P'Q=\sqrt{13}$，同时把 AB 转成 $A'B'$，求 $A'B'$与 CD 的距离．

5．设有 n（$n>3$）个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 满足下列条件：(1) $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ ；(2) $|z_j|<1\,(j=1,2,\cdots,n)$ ．求证：至少其中有两个复数 $z_k,z_l\ (k\ne l)$ ，使得 $|z_k+z_l|<1$ ．

简略答案

第一试：选择题 BBABD　DACDC　 填空题 1． $a\ge 1$　 2． $\dfrac{\sqrt{2}a}{2l}$　 3． π　 4．3　 5．127

第二试：1．最小值为 $\dfrac{1}{3}$，最大值为 $\dfrac{2}{3}$　 4． $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

1986 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、选择题

1．三角形的三条边长均为正整数，其中有一条边长为 4，但它不是最短的边，这样不同的三角形共有

A、6 个　　B、7 个　　C、8 个　　D、9 个

2．若 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a=\cos(\alpha+\beta)$ 则必有

A、$a>\cos\alpha+\cos\beta$　　B、$a<\cos\alpha+\cos\beta$　　C、$a<\sin\alpha+\sin\beta$　　D、$a>\sin\alpha+\sin\beta$

3．在轴截面顶角为直角的圆锥内，作一内接圆柱．若这圆柱的全面积等于这圆银的侧面积，则这圆锥顶点至圆柱上底面的距离等于圆锥母线长的

A、1/2　　B、1/3　　C、1/4　　D、1/5

4．点 P（0，2）关于直线 $x+2y-1=0$ 的对称坐标是

A、（-2，0）　　B、（-1，0）　　C、（0，-1）　　D、（$-6/5$，$-2/5$）

5．2^{1000} 除以 13 的余数是

A、1　　B、2　　C、3　　D、7

6．若函数 $y=\lg(1-mx^2)$ 对任意实数 x 都有意义，则直线 $y=x\cos(\arctan m)+n\ (m,n\in R)$ 的倾斜角 $\theta=$

A、$-\arctan\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$　　B、$\arctan\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$　　C、$\arctan\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$　　D、$\pi-\arctan\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

7．已知三个实数 a，$b=a^a$，$c=a^{a^a}$，若 $0.9<a<1$，则

A、$a<c<b$　　B、$a<b<c$　　C、$b<a<c$　　D、$c<a<b$

8．设 a 为正数，而 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$、$B=\{(x,y)\mid |x|+2|y|\le a\}$ 是 XOY 平面内的点集，则 A 是 B 的子集的一个充分必要条件是

A、$a=2$　　B、$a\ge 3$　　C、$a\ge\sqrt{3}$　　D、$a\ge\sqrt{5}$

9．aoshoo.com 防盗暗记．极坐标方程 $\rho=\dfrac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{2\tan^2\frac{\theta}{2}+1}$ 是一圆锥曲线，它的焦点到其相应准线的距离是

A、1/3　　B、2/3　　C、1　　D、2

10．今有一角币 1 张，二角币 1 张，五角币 1 张，一元币 4 张，五元币 2 张，用这些纸币任意付款，则可付出不同数额的款子的种数是

A、30　　B、29　　C、120　　D、119

11．若曲线 $ax^2+bxy+cy^2=1\ (b^2-4ac\ne 0)$ 和三直线 $x=1$，$y=1$，$y=x+1$ 分别相切．则

A、$a=b=c$　　B、$a=b=-c$　　C、$a=-b=c$　　D、$-a=b=c$

12．已知 $Z=(\arccos x-\arcsin x)+i(\arctan x-\operatorname{arccot} x)$，当 Z 是复平面上第三象限内的点时

A、$0<x<\sqrt{2}/2$　　B、$\sqrt{2}/2<x<1$　　C、$-\sqrt{2}/2<x<0$　　D、$-1<x<-\sqrt{2}/2$

13．一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2^{-5}$，它的前 11 项的几何平均数为 2^5，若在前 11 项中抽去一项后的几何平均数为 2^4，则抽去的项是第几项？

A、8　　B、9　　C、10　　D、11

14．$e^{\sin^2 x}\pi^{\cos^2 x}$ 和 $e+\pi$ 两者间大小关系是（其中 e 是自然对数的底，π 是圆周率）

A、前者大　　B、两者相等　　C、后者大　　D、以上都不对

15．空间不共面的四点 A、B、C、D 到平面 α 的距离之比依次为 1:1:1:2，这样的平面 α 的个数是

A、1　　B、4　　C、7　　D、8

二、填空题

1．若 A、B、M、N 为非空集，$A\cap B\neq\varnothing$，$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，则 $M\cap N=$__________．

2．橙子奥数工作室防盗暗记．已知函数 $y=\sqrt{(x^2-6x+9)(-x^2+6x-5)}$，那么它的值域是__________．

3．抛物线 $y=\frac{1}{3}a^3x^2+\frac{1}{2}a^2x-2a$（$a$ 为非零常数）的顶点在曲线 __________ 上．

4．6 人划船，左右各 3 人，其中 2 人只能划左桨，1 人只能划右桨．则他们的不同坐法共有_____种．

5．已知方程 $ax^2-4xy+\sqrt{3}y^2+3\sqrt{3}x-3y=0$ 表示两条直线，则实数 $a=$_____．

6．空间四边形的两组对边的平方和相等，那么它的两条对角线所成的角是_____度．

7．用正方形完全盖住边长分别为 3cm、4cm、5cm 的一个三角形，则该正方形的最小边长是_____cm．

8．已知 $\log_a x=\sec 20°$，$\log_b x=\sec 60°$，$\log_c x=\sec 100°$，$\log_d x=\sec 140°$ 那么 $\log_{abcd}x$ 的值是_____．

9．制作一个底圆直径为 4cm 的圆柱形容器，要内装直径为 2cm 的钢珠 26 只，那么这容器的高至少是_____cm．（精确到 0.1cm）

10．已知 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$，$g(x)=\frac{2}{cx+d}\ (c\neq 0)$，且 $f[g(x)]=\frac{x}{x-2}$，$g[f(x)]=\frac{1}{2x-1}$，则 $abcd=$_____．

第二试

1．设 $a>1$，a、θ 均为实数，试求当 θ 变化时，函数 $\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ 的最小值．

2．已知六边形的各边长不超过 1，试证此六边形至少有一条主对角线不超过 2．（主对角线是指：六边形中某一顶点与相隔两个顶点的第三顶点的连线．如六边形 $ABCDEF$ 中，AD 是主对角线，AC 就不是主对角线．）

3．证明：一个奇自然数 c 为合数，它的充分必要条件是存在自然数 $a\leq\frac{c}{3}-1$，使 $(2a-1)^2+8c$ 为平方数．

4．函数 $f(x)$ 的定义域 D 于原点对称，但不包括数 0；对 D 中的任意数 x，在 D 中存在 x_1,x_2，使 $x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，且满足以下三个条件：① $x_1,x_2\in D$，$f(x_1)\neq f(x_2)$ 或 $0<|x_1-x_2|<2a$（a 是一个正常数），则 $f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；② $f(a)=1$；③ 当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$．

试证：(1) $f(x)$ 是奇函数；(2) $f(x)$ 是周期函数，并求出其周期；(3) $f(x)$ 在 $(0,4a)$ 内为减函数．

5．已知道圆柱底面半径为 r，高为 h，过上底一点作一截面，它与底面夹角为 α（锐角），试求将夹在截面与底面之间的立体侧面展开成平面图形后，所得截口曲线的方程．

简略答案 第一试：选择题 CBADC　CADDD　CBDCD　填空题 1．$\{\varnothing\}$　2．[0，2]　3．$xy=105/64$　4．108　5．$\sqrt{3}$　6．90°　7．$16/\sqrt{17}$　8．2　9．19.0　10．-16　第二试：1．$\frac{3a+1}{2}$　2．略　3．略　4．4a 是 $f(x)$ 的一个周期，余略　5．要分情况讨论，具体略

1985 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、选择题

1．用 1、9、8、5 四个数码构成形如 $a^{b^{c^{d}}}$ 的数．若欲使其值最大，则 c 的值为

A、1　　B、9　　C、8　　D、5

2．从 $A\bigcup B=A\bigcup C$ 能够推出

A、 $B=C$　　B、 $A\bigcap B=A\bigcap C$　　C、 $A\bigcap\overline{B}=A\bigcap\overline{C}$　　D、 $\overline{A}\bigcap B=\overline{A}\bigcap C$

3．设平面上四点 $A(\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2})$，$B(-\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2})$，$C(\sqrt{3}$，$2)$，$D(-2\sqrt{3}$，$1)$．能和线段 AB 和 CD 在端点分别相切的圆有

A、0 个　　B、1 个　　C、2 个　　D、4 个．

4．记 $m=\log_a(\log_a x)$、 $n=\log_a x^2$、 $t=(\log_a x)^2$，则对任何 $x\in(1,a)$ 都有

A、 $m<n<t$　　B、 $m<t<n$　　C、 $n<m<t$　　D、 $t<n<m$

5．曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 和 $3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$ 的交点有

A、2 个　　B、3 个　　C、4 个　　D、其他

6．使方程 $\sin^2 x+3a^2\cos x-2a^2(3a-2)-1=0$ 有解的 a 的范围是

A、 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$　　B、 $a>1$ 或 $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$　　C、 $-\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$　　D、 $\frac{1}{2}\le a\le 1$

7．函数 $f(x)=-9x^2-6ax+2a-a^2$ 在区间 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 上的最大值为 -3，则 a 的值可为

A、 $-3/2$　　B、 $\sqrt{2}$　　C、 $\sqrt{6}+2$　　D、 $\sqrt{6}-2$

8．一对四位数中，一个数的首末两个数字对调就是另一个数（例如：1234 和 4231，1231 与 1231 都是这样的数对），那么两数和是四位数而且是完全平方数的这种数对有多少对？

A、4　　B、6　　C、8　　D、10

9．整数组 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 适合 $0<x_1\le x_2\le x_3\le x_4<7$，这样的数组共有多少组？

A、108　　B、126　　C、252　　D、其他

10．n 为不超过 1985 的正整数，若存在 θ 使 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$ 成立的 n 的总个数为

A、1985　　B、992　　C、497　　D、496

二、填充题

1．平面 M 与 N 相交成角 θ，则 M 平面上的圆在 N 平面上的正投影椭圆的离心率等于_____．

2．设 $|z|=1$，则 $|z^2-z+2|$ 的最小值为_____．

3．单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 上一动点 P，$t=0$ 时从 A 点出发沿它的棱 AB，BC 作速率为常数 v 的运动，当 P 到达 BC 棱上某一位置时，点 P 到 AB' 的距离 S 的平方表示为时间 t 的函数表达式__________．

4．命题 (a)“所有的 S 是 P”和“所有的 S 不是 P”相否定；(b)“有些 S 不是 P”，那么“有些 P 不是 S”；(c) 如果“所有的 S 都是 P”那么“有些 P 是 S”；(d)“所有的 S 是 P”和“有些 S 不是 P”相否定．上面四条命题中所有正确的命题号码为_____．

5．$[(\frac{\sqrt{3}+i}{2})+1]^n$ 当 n 取 1，2，…，100 时，可得_____个不同的数值．

6．$0<\alpha,\beta<\pi$，且$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$，则$2\alpha+\beta=$_____．

7．已知$\sin x+\sin y=\sqrt{2}$，$\cos x+\cos y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，则$\tan x\tan y=$_____．

8．单位正方体C内作一个内切大球O_1，其次在C内的一个角顶内作小球O_2，使它与大球外切，同时切于C的三个面，则球O_2的表面积为_____．

9．三棱锥$P-ABC$顶角的三个面角均为60°，三个侧面的面积分别为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、2和1，则它的体积为_____．

10．方程$x+y+z=15$的正整数解有_____组．

第二试

1．已知抛物线C_1的顶点($\sqrt{2}-1$，1)，焦点（$\sqrt{2}-\dfrac{3}{4}$，1），另一抛物线C_2的方程$y^2-ay+x+2b=0$．C_1与C_2在一个交点处它们的切线互相垂直．试证：C_2必过定点，并求该点坐标．

2．n名队员穿1至n号球衣，坐成一排．并不允许号码大于p（p为某一确定的数）的队员坐在p号队员的右侧．问共有几种坐法？

3．设正四棱锥P的底是边长为2的正方形，高是h，平面π平行于正方形的一条对角线．与P的底面交角为α，把P正投影到π上，问α为何值时，所得图形面积最大？最大值是多少？

4．已知A、B、C、D为平面上两两距离不超过1的任意四个点，今欲作一圆覆盖此四点（即A、B、C、D在圆内或圆周上）．问半径最小该为多少？试证明之．

简略答案

第一试：一、BDABD　ACDBC　　二、1．$\sin\theta$　2．$\dfrac{\sqrt{14}}{4}$　3．$(vt-1)^2+\dfrac{1}{2}$　4．c、d　5．6 6．π

7．$\dfrac{13}{7}$　8．$(7-4\sqrt{3})\pi$　9．$\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　10．91

第二试：1．定点坐标为（$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$，1）　2．$\dfrac{n!}{n-p+1}$　3．若$h\le\sqrt{6}$，则$\alpha=0$时，$(S_{P'})_{\max}=4$；若$h>\sqrt{6}$，则$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$时，$(S_{P'})_{\max}=\sqrt{2^2+4}$，其中$\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{h}$　4．$R_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1984年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、选择题

1．某大学有外语教师120名，其中教英语的有50名，教日语的有45名，教法语的有40名．有15名既教英语又教日语，有10名既教英语又教法语，有8名既教日语又教法语，有4名教英语日语和法语三门课，则不教这三门课的外语教师有多少名？

A、10　B、14　C、18　D、22　E、26

2．$\log_2(1+\frac{20\times19}{1\times2}+\frac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{20\times19\times\cdots\times1}{1\times2\times\cdots\times20})=$

A、17　B、18　C、19　D、20　E、其他

3．在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，则$\sin^2 A+2\sin B$

A、有最大值无最小值　B、有最小值无最大值　C、有最大值也有最小值　D、无最大值也有无最小值　E、等于常数

4．已知$25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，$\theta$在第二象限，则$\cos\frac{\theta}{2}=$

A、$\frac{3}{5}$　B、$\pm\frac{3}{5}$　C、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　D、$\frac{4}{5}$　E、其他

5．已知$\log_{\tan\theta}\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\theta$是锐角，则$\log_{(1+\cot^2\theta)}\frac{1}{2}\sin 2\theta=$

A、$-\frac{7}{4}$　B、$\frac{7}{4}$　C、$-\frac{1}{4}$　D、$\frac{1}{4}$　E、$-\frac{7}{10}$

6．$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$是正六棱柱，$M$是$DE$的中点，这正六棱柱过$A_1$、$C$、$M$三点的截面是

A、三角形　B、四边形　C、五边形　D、六边形　E、七边形

7．与空间不共面的四点距离相等的平面有多少个？

A、3　B、4　C、6　D、7　E、 其他

8．平面上有15条直线，其中有5条共线，它们最多能将平面划分成的区域数为

A、111　B、114　C、115　D、118　E、121

9．小于50000且含有奇数个数字“5”的五位数共有多少个？

A、2952　B、11808　C、16160　D、26568　E、36160

10．圆柱直径为4，高为22，最多能装直径为2的球多少个？

A、24　B、28　C、32　D、44　E、其他

二、填充题

1．方程$\frac{2+\sqrt{2}\sin x}{2\cos x+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cos x+2}{2\sin x+\sqrt{2}}$的解是_____．

2．不等式$|1-x|^{2x^2-7x+3}<1$的解是__________．

3．在$\triangle ABC$中，$BC=a$．且$\angle A<\angle B<\angle C$，两质点分别在$\triangle ABC$的两个顶点$B$、$C$开始沿$\triangle ABC$的边线按逆时针方向作速度相等的等速运动，则在运动过程中，它们之间的最短距离等于_____．

4．橙子奥数工作室防盗暗记．函数$f(x)=\arcsin(\arcsin x)+\arccos\frac{2\arccos x}{\pi-2}$的定义域为__________．

5．曲线：$x^2+y^2-x+2y=0$关于直线$x-y+1=0$的对称曲线方程为_______________．

6．方程$z^4=\bar{z}$（$\bar{z}$为z的共轭复数）的根为_____．

7．在$\triangle ABC$中，D、E分别是BC、CA上的点，且BD：$DC=m$：1，CE：$EA=n$：1，AD与BE相交于

F，则△ABF 的面积等于△ABC 面积的_____倍．

8．过二次曲线 $C_1: 3x^2+8y^2-6x-32y=0$ 与 $C_2: 9x^2-16y^2-18x+24y=0$ 的交点的抛物线方程为_____．

9．将 19 分成若干个正整数之和，其积最大为_____．

10．当 $x, y\in(0,1)$ 时，$\min\{2^{-x},\ 2^{x-y}, 2^{y-1}\}$ 的最大值为_____．

第二试

1．求二元函数 $f(x,y)=x^2+4xy+2y^2$ 在 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值．

2．长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=18$，$AA_1=AD=9$，BD 与 B_1C 的公垂线的垂足为 M、N，试求 MN 的中垂面与长方体截面的面积．

3．设平面上有一圆，它的每一点都以角速度 ω 绕原点 O 顺时针旋转，同时该圆周上有一点 P 以角速度 2ω 绕圆心 O' 逆时针旋转．若时间 $t=0$ 时，圆心 O' 的坐标为（$l+r$，0），动点 P 的坐标为（l，0）．求点 P 的轨迹方程．（其中 $l>0$，$r>0$）

4．设多项式 $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个不同的整数，试证 $P(x)$ 不能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积．

5．已知 k、n 为正整数，把 k 分成 n 个正整数的和，对于各种分法，他们乘积的最大值为 $F(k)$，如果 k 除以 n 得商为 q，余数为 r．

（1）求证：$F(k)=q^{n-r}(q+1)^r$　　　（2）求 $\dfrac{F(k+2)}{F(k)}$．

简略答案

第一试：一、BCDBE　DDCBE　二、1．$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in Z)$　2．$(0,1/2)\cup(2,3)$　3．$a\sin\dfrac{A}{2}$　4．$\{\sin 1\}$

5．$(x+2)^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{5}{4}$　6．$\{0\}\cup\{z\mid z=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\ (k=0,1,2,3,4)\}$　7．$\dfrac{m}{mn+m+1}$

8．$y^2-3y=0$（它是抛物线的退化情况，代表两条直线 $y=0$, $y=3$）　9．972　10．$2^{-\frac{1}{3}}$（即 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$）

第二试：1．$[f(x,y)]_{\max}=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, $[f(x,y)]_{\min}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$　2．$\dfrac{729}{4}$　3．$\dfrac{x^2}{l^2}+\dfrac{y^2}{(l+2r)^2}=1$，表示一个椭圆　4．略　5．（1）略　（2）$\dfrac{q+2}{q}$

1983 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

一、填充题

1．$\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=$_____．

2．$|\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{5}+\sqrt{2}i)(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{5}i)}^2|=$_____．

3．1 到 1000 中所有被 3 除余 2，并且被 7 除余 4 的正整数之和为_____．

4．一个椭圆内切于一个长为 m，宽为 n 的矩形，这个椭圆的内接矩形的周长的最大值是_____．

5．$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$_____．

6．如果 1、x、y 三个正数，既依次是一个等差数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，又依次是一个等比数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，那么 x、y 应满足的关系式是_____．

7．在集合{1，2，…，n}中，任意取出一个子集，计算它的元素之和，则所有各个子集元素之和的总和是_____．

8．点 P 在单位正方体的 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 CD 上滑动，过 P、A、C'做截面，所得截面的面积的最小值是_____．

二、选择题：

1．如果命题“坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点都在曲线 C 上”是不正确的，那么

A、曲线 C 上的点的坐标都满足方程 $F(x,y)=0$

B、坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点都不在曲线 C 上

C、曲线 C 上的点的坐标不都满足方程 $F(x,y)=0$

D、坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点有些在 C 上，有些不在 C 上

E、一定有不在曲线 C 上的点，其坐标满足方程 $F(x,y)=0$

2．四名甲队队员，三名乙队队员站成一排，任何两名乙队队员不靠在一起，不同的站法有

A、$4!\times 3!$　　B、$P_5^3\times 4!$　　C、$(4!)^2$　　D、$P_4^3\times 4!$　　E、以上都不是

3．已知 $x,y\in N$，$x>y$，$x^3+19y=y^3+19x$，$a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$，则 a 的取值范围是

A、$(-3,-2)$　　B、$[-2,-1]$　　C、$(-1,1)$　　D、$[1,2]$　　E、$(2,3)$

4．$\arctan(-\cot 45)=$

A、$-\dfrac{\pi}{4}$　　B、-45　　C、$45-\dfrac{29}{2}\pi$　　D、$\dfrac{29}{2}\pi-45$　　E、$(2,3)$

5．当 $k\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，方程 $\sqrt{|1-x|}=kx$ 的解的个数是

A、0　　B、1　　C、2　　D、3　　E、4

6．已知正整数 a、b、c 满足条件：① $a<b<c<30$；② 以某一正整数为底，$a(2b-a)$ 与 $c^2+60b-11$ 的对数分别为 9 与 11．则 $a+c-2b$ 的值是

A、4　　B、2　　C、0　　D、-2　　E、-4

7．已知 AD、BE、CF 为△ABC 的三条高（D、E、F 为垂足），$\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，则 $\dfrac{DE}{DF}=$

A、$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　　B、$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　C、$\dfrac{1}{2}$　　D、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　E、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第二试

1．已知$\triangle ABC$的三内角的正切$\tan A$、$\tan B$、$\tan C$满足下列两个条件，求A、B、C．

（1）$\tan A+\tan B+\tan C=-\dfrac{1}{6}$；　　（2）$\tan^2 A+\tan^3 B+\tan^3 C=-\dfrac{181}{216}$．

2．已知点$P_0(x_0,y_0)$和直线l的方程$ax+by=0\ (a\neq 0)$．令Q_1为P_0关于x轴的λ对称点，过Q_1作直线平行于l，交x轴于R_1；令P_1为Q_1关于R_1的μ对称点，同样由P_1可作Q_2，P_2；然后作Q_3、P_3；等等．如果点P_n坐标为(x_n,y_n)，问：

（1）在什么条件下，$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都收敛？　（2）它们的极限各是什么？

注：① 若线段PQ垂直于直线l，垂足为M，且$\lambda PM=MQ\ (\lambda\neq 0)$，则称$Q$为$P$关于$l$的$\lambda$对称点（是一种“线对称”）．特别地，当$P$在$l$上时，对任何$\lambda$，$P$关于$l$的$\lambda$对称点都是$P$．

② 若R为线段PQ内点，且$\mu PR=RQ\ (\mu>0)$，则称Q为P关于R的μ对称点（是一种“点对称”）．特别地，当P、R重合时，对任意μ，P关于R的μ对称点都是P．

3．设$y=\sin x$，问是否存在$n+1$个实系数的多项式$P_0(x)$，$P_1(x)$、$P_2(x)$、…、$P_n(x)$，其中n为任意正整数，$P_0(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\ (a_0\neq 0)$，使$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)\equiv 0$．

简略答案

第一试：

一、1．$\sqrt{3}$　2．8　3．24216　4．$2\sqrt{m^2+n^2}$　5．2　6．$x^{y-1}=y^{x-1}$　7．$2^{n-2}n(n+1)$　8．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

二、EBACD　EE

第二试：

1．$\dfrac{3\pi}{4}$、$\arctan\dfrac{1}{2}$、$\arctan\dfrac{1}{3}$（可以随意排列）　2．① 当$0<\lambda u<1$时，收敛点坐标为$(x_0-\dfrac{by_0\lambda(1+\mu)}{a(1-\lambda\mu)},0)$；② 当$\lambda\mu>1$且$y_0=0$时，收敛点坐标为（$x_0,0$）；③ 当$\lambda\mu=1$时，若$b\neq 0$，收敛点坐标为（$x_0,0$），若$b=0$，收敛点坐标为$(x_0,y_0)$　3．答案是否定的

1982 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．选择题

（1）如果 $c>1$，$a=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$b=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，那么

A、$a>b$　　B、$a\geq b$　　C、$a=b$　　D、$a<b$　　E、$a\leq b$

（2）如果 $y=(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_8 9)(\log_9 10)$，则

A、$0<y<1$　　B、$y=1$　　C、$1<y<2$　　D、$y=2$　　E、$2<y<3$

（3）单位圆中内接四边形的最短边的最大值

A、不存在　　B、1　　C、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D、$\frac{\pi}{2}$　　E、$\sqrt{2}$

（4）如果△ABC 和△$A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，且 $\sin B+\sin C<\sin B'+\sin C'$，那么

A、$B-C>B'-C'$　　B、$|B-C|>|B'-C'|$　　C、$B-C<|B'-C'|$

D、$|B-C|<|B'-C'|$　　E、$B-C=B'-C'$

2．已知内接于圆的四边形的边长分别为 a、b、c、d

（1）求该四边形的面积 S；

（2）如果这个四边形又有内切圆，求证 $S=\sqrt{abcd}$．

3．棱锥 $V-ABC$ 的侧棱对于底面的倾角都相等，底面为直角三角形，它的两直角边 CA，CB 分别为 a 和 $\sqrt{3}a$，又棱锥的高为 b．M、N、P、Q 分别为 AC、CB 和 BV、VA 上的中点，求四边形 $MNPQ$ 的面积．

4．已知曲线 C∶$y=x^2$ 过定点 P_1（a，0）（$a>0$）作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于点 M_1，然后过点 M_1 作 c 的切线和 x 轴相交于点 P_2，再过 P_2 作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于点 M_2，又过 M_2 作 C 的切线和 x 轴相文于点 P_3．以下，用同样的方法直至无穷．记△$P_kM_kP_{k+1}$ 的面积为 S_k．

求：$S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$的值．

5．空间有 10 个点，其中有 4 个点在同一平面上．除此之外，这 10 个点中不再有 4 个点共面．

求：以其中一点为顶点，过其他 3 个点的圆为底面的圆锥的个数．

6．已知直线 $y=kx+b\ (b\neq 0)$ 与二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 相交于 M、N 两点．

试求 OM、ON 垂直的充要条件．

7．设 $z_k\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 是 $z^n-1=0$ 的 n 个根，$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_10+a_0$，其中 m 为小于 n 的正整数．求证：$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)=a_0$．

第二试

1．已知函数 $f(x)=x^2-2x+2$，$x\in[t,t+1]$ 的最小值是 $g(t)$．写出 $S=g(t)$ 的解析表达式，并画出它的图象．

2．把 n^2 个互不相等的实数排成右表，取每行的最大数得 n 个数，其中最小的一个是 x；再取每列的最小数，又得 n 个数，其中最大的一个是 y，试比较 x^n 与 y^n 的大小．

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

3．$ABCD-A'B'C'D'$是边长为 1 的正方体，M、N 分别在棱 BB'、$C'D'$上，且 $BM=\frac{1}{2}MB'$，$D'N=\frac{1}{2}NC'$．

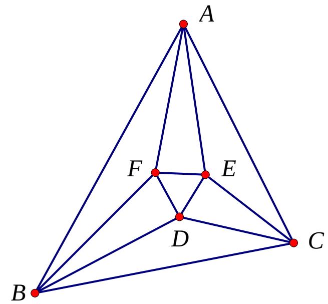
（1）指出 MN 的中垂面在已知正方体上截得的截面是一个什么样的图形，并加以说明；

（2）求出这截面在正方体的底面 $A'B'C'D'$上的射影的面积．

4．试证 n（$n \geq 2$）个互不相等的正整数的倒数平方和不能是整数．

5．从二次曲线 C 外一点 L 引 C 的两条切线，其切点的连线为直线 l，再从 C 外另外两点 M、N 同样引 C 的切线，其切点的连线分别为直线 m 和 n，又 L，M，N 三点共线，试证 l，m，n 三线共点．

6．如图，AE 和 AF、BF 和 BD、CD 和 CE 分别是△ABC 中∠A、∠B、∠C 的三等分线，求证△DEF 是等边三角形．



简略答案

第一试：

1．DCEB　2．(1) $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$；(2) 略　3．$\dfrac{1}{4}a\sqrt{2a^2+4b^2}$

4．$\dfrac{2}{7}a^3$　5．836　6．$Ab^2-2Dkb+Fk^2+Cb^2+2Eb+F=0$　7．a_0

第二试：

1．① 当 $0 \leq t \leq 1$ 时，$g(t)=1$；② 当 $t<0$ 时，$g(t)=t^2+1$；③ 当 $t>1$ 时，$g(t)=(t-1)^2+1$．图略　2．设 $x=a_{ij}$，$y=a_{pq}$，则 $a_{ij} \geq a_{iq} \geq a_{pq}$，余略　3．$\dfrac{5}{8}$　4 — 6．略

1981 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．已知 $f(x)=1+\log_x 5$， $g(x)=\log_{x^2} 9+\log_{x^3} 8$．实比较 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值的大小．

2．在△ABC 中，$\angle C$ 为钝角，AB 边上的高为 h，求证：$AB>2h$．

3．已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面与底面的夹角为 α，相邻两侧的夹角为 β，求证：$\cos\beta=-\cos^2\alpha$．

4．设 $\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{j}\sum_{k=1}^{j}k\right)\right]=275$，求正整数 n 的值．

5．设 n 为偶数，试证：$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}$．

6．设抛物线的对称轴是 $2x+y-1=0$，准线是 $x-2y-5=0$，且与直线 $2y+3=0$ 相切，求此抛物线方程．

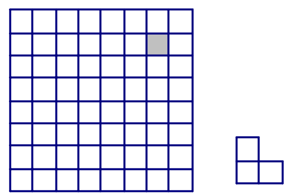
7．已知 $x^3+x^2\sin\theta+x\sin 2\theta+\sin 3\theta\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，且 $\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \gamma&\alpha&\beta\\ \beta&\gamma&\alpha\end{vmatrix}>0$，求 θ 的取值范围．

8.已知复数 z_1、z_2、z_3，$|z_1|=1$、$|z_2|=k$、$|z_3|=2-k$，$\arg z_1=\alpha$、$\arg z_2=\beta$、$\arg z_3=\gamma$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，问 k 为何值时，$\sin^2(\beta-\gamma)$ 的值为最大？

第二试

1．设 n 是正整数，k 是不小 2 的整数，试证 n^k 可以表示成 n 个相继的奇数之和．

2．试证在 $2^n\times 2^n$（n 是正整数）个相等小方格组成的棋盘上任意挖去一个小方格后，总可以由三个小方格构成的 L 形块（如图）恰好铺满（既不重叠，也不越界）．



3．橙子奥数工作室防盗暗记．计算：$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)$．

4．在方程组 $\begin{cases}ax_1^4+bx_1^3=x_2^2\\ ax_2^4+bx_2^3=x_3^2\\ ax_3^4+bx_3^3=x_4^2\\ ax_4^4+bx_4^3=x_1^2\end{cases}$ 中，a、b 是实数，且 $a\neq 0$．求证：

（1）当 $b^2+4a\geq 0$ 时，方程组至少有一组非零实数解；(2) 当 $b^2+4a<0$ 时，方程组不存在非零实数解．

5．已知边长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D$，AC' 是对角线，M、N 分别是 BB'、$B'C'$ 的中点，P 是线段 MN 的中点．求 DP 与 AC' 的距离．

6．设一圆和一条等轴双曲线交于四点 A_1、A_2、A_3、A_4，其中 A_1 和 A_2 是圆的直径的一对端点，试证：（1）A_3 和 A_4 是双曲线直径的端点；(2) 双曲线在 A_3 和 A_4 处的切线都垂直于 A_1A_2．

简略答案 :第一试 1.当 $0<x<1$ 时，$f(x)>g(x)$;当 $1<x<5/6$ 时，$f(x)<g(x)$;当 $x=5/6$ 时，$f(x)=g(x)$

6．$4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$　7．$(2n-1)\pi+\arctan 6<\theta<2n\pi+\arctan 6$ 且 $\theta\neq 2n\pi$ $(n\in Z)$　8．3/4

第二试：3．2/3　5．$1/\sqrt{86}$

1980 年上海市高中数学竞赛试题

第一试

1．已知 $a>1$, $b>1$，求证 $\log_a ab+\log_b ab\ge 4$.

2．设 x_1、 x_2 是方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根，求 $x_1^{1980}+(\frac{1}{x_2})^{1980}$ 的值．

3．设 D 为△ABC 的边 BC 上的点，连结 AD 得△ABD 和△ACD 如果这三个三角形相似，问△ABC 是怎样的三角形？为什么？

4．已知△ABC 的边 BC 上有两点 D、E，且 $BD=CE$．求证：$AB+AC>AD+AE$．

5．非零实数 a,b,c,x,y,z 满足条件 $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=ax+by+cz$ ，求证：$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

6．△ABC 中最大角 A 是最小角 C 的 2 倍，夹角 A 的两边 $b=5$，$c=4$．求第三边 a 和△ABC 的面积．

7．已知平面的斜线在此平面上的射影与该平面内过此斜线足的两直线构成等角，求证：斜线本身与上述两直线也构成等角．

8．已加函数 $y=\sin^2 x+\cos x+\frac{1}{4}$，问 x 取何值时，函数 y 有极值．

9．设 P 点在双曲线 $x^2-y^2=1$ 上运动，P 处切线与圆 $x^2+y^2=1$ 交于 A 和 B，求弦 AB 中点 Q 的轨迹方程．

第二试

1．已知△ABC 中，$\lg\tan A+\lg\tan C=2\lg\tan B$ ，求角 B 的范围．

2．在单位正方体 $ABCD—A'B'C'D'$中，在一个面的对角线 AB'上取 M 点使 $AB'=3AM$、在另一个面的对角线 BD 上取 N 点使 $BD=3BN$．求证：MN 是 AB'和 BD 的公垂线，并求 MN 的长．

3．抛物线与 Oy 轴相切于原点，直线 $x+y+1=0$ 是抛物线在顶点的切线，求此抛物线的方程．

4．证明：$F=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n-1\text{个根号}}}<\pi$.

5．设 $z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 是满足 $|z_k|\le 1$ 及 $\sum_{k=1}^{n} z_k=0$ 的 $n\ (n\ge 2)$ 个复数，求证这 n 个复数中至少有两个复数 z_s , z_l 满足 $|z_s+z_t|\le 1$.

简略答案

第一试：2．2　3．直角三角形　6．$a=6$，$S=\frac{15}{4}\sqrt{7}$　8．$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 时，$y_{\max}=\frac{3}{2}$；$x=2k\pi+\pi$ 时，$y_{\min}=-\frac{3}{4}$.（其中 k 为整数）　9．$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$，写成极坐标方程为 $\rho^2=\cos 2\theta$，是一条双纽线

第二试：1．$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　2．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　3．$x^2-2xy+y^2-8x=0$