

2015 年上海市高中数学竞赛试卷

2015 年 3 月 29 日上午 9:30~11:30

【说明】解答本试卷不得使用计算器。解答请写在答题纸上。

一、填空题（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，对任意正整数 n ，都有 $a_{n+1} + a_n = 4n - 5$ ，则 $a_{2015} =$ _____。

2. 对整数 $n \geq 3$ ，记 $f(n) = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdots \log_{n-1} n$ ，则 $f(2^2) + f(2^3) + \cdots + f(2^{10}) =$ _____。

3. 有 10 个大小相同的小球，其中 5 个是红球，5 个是白球。现将这 10 个球任意排成一排，并从左至右依次编号为 1, 2, ..., 10。则红球的编号数之和大于白球的编号数之和的排法共有_____种。

4. 在直角坐标平面 xOy 上，圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ ，圆 $O_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 。过 x 轴的左半轴上一点 M 作圆 O 的切线，与圆 O 相切于点 A ，与圆 O_1 分别相交于点 B, C ，若 $AB = BC$ ，则点 M 的坐标为_____。

5. 已知 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) < 3(\sin^5 \theta - \cos^5 \theta)$ ， $\theta \in [-\pi, \pi]$ ，则 θ 的取值范围是_____。

6. 投掷两次骰子，设第一次出现的点数为 a ，第二次出现的点数为 b ，则使得关于 x 的二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个小于 -1 的不相等实根的概率为_____。（用数字作答）

7. 已知集合 $A = \{(x, y) | x = m, y = -3m + 2, m \in N^*\}$ ， $B = \{(x, y) | x = n, y = a(a^2 - n + 1), n \in N^*\}$ ，则使得 $A \cap B \neq \emptyset$ 的整数 a 共有_____个。

8. 若实数 x, y 满足 $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$ ，则 $x + y$ 的最大值为_____。

二、解答题

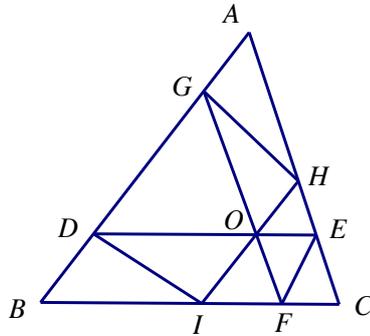
9. （本题满分 14 分）在直角坐标平面 xOy 上，已知点 A, B 在双曲线 $C: 2x^2 + 4x - y^2 = 0$ 上，且使得 $\triangle OAB$ 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，求所有这样的 $\triangle OAB$ 的个数。

10. (本题满分 14 分) 已知 p 为素数, n 为正整数. 非负整数 a_0, a_1, \dots, a_n 均小于 p , 且满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 13, \\ a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n = 2015. \end{cases}$$

求素数 p .

11. (本题满分 16 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 过 $\triangle ABC$ 内一点 O 分别引三条边的平行线 DE, FG, HI , 点 D, E, F, G, H, I 均在 $\triangle ABC$ 的边上, 求六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值.



12. (本题满分 16 分) 设 n 是正整数, 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 是由数 0 或 1 组成的数列, 即 $a_k = 0$ 或 $1 (1 \leq k \leq n)$.

(1) 若 $n \geq 3$, 由数列 A 定义另一个数列 $A': a'_1, a'_2, \dots, a'_n$, 其中

$$a'_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } a_{k-1} = a_{k+1}, \\ 1, & \text{若 } a_{k-1} \neq a_{k+1}, \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n,$$

这里 $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$.

求使得 $a_k + a'_k = 1, k=1, 2, \dots, n$ 的所有数列 A . (本小题只需写出结果, 不需解题过程)

(2) 求使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 除以 4 余 3 的数列 A 的个数.

2015 年上海市高中数学竞赛答案

一、填空题（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

- | | |
|--|---------------------|
| 1. 4000. | 2. 54. |
| 3. 126. | 4. $(-4, 0)$. |
| 5. $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. | 6. $\frac{1}{12}$. |
| 7. 10. | 8. $9+3\sqrt{15}$. |

二、解答题

9.（本题满分 14 分）在直角坐标平面 xOy 上，已知点 A, B 在双曲线 $C: 2x^2 + 4x - y^2 = 0$ 上，且使得 $\triangle OAB$ 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，求所有这样的 $\triangle OAB$ 的个数.

解 设 $l_{OA}: y = kx (k \neq 0)$ ，则 $l_{OB}: y = -\frac{1}{k}x$. 由

$$\begin{cases} y = kx, \\ 2x^2 + 4x - y^2 = 0 \end{cases}$$

得 $(2 - k^2)x^2 + 4x = 0$,

所以 $2 - k^2 \neq 0$ ， $x_A = \frac{4}{k^2 - 2}$ ，于是 $|OA| = \sqrt{1 + k^2} \left| \frac{4}{k^2 - 2} \right|$4 分

同理可得， $|OB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} \left| \frac{4}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 2} \right| = \sqrt{1 + k^2} \left| \frac{4k}{2k^2 - 1} \right|$6 分

因为 $\triangle OAB$ 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，所以 $|OA| = |OB|$ ，于是

$$\sqrt{1 + k^2} \left| \frac{4}{k^2 - 2} \right| = \sqrt{1 + k^2} \left| \frac{4k}{2k^2 - 1} \right|,$$

所以 $\frac{1}{k^2 - 2} = \pm \frac{k}{2k^2 - 1}$.

若 $\frac{1}{k^2 - 2} = \frac{k}{2k^2 - 1}$ ，则 $k^3 - 2k^2 - 2k + 1 = 0$ ，即 $(k + 1)(k^2 - 3k + 1) = 0$ ，解得

$k_1 = -1, k_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, k_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$10 分

若 $\frac{1}{k^2-2} = -\frac{k}{2k^2-1}$, 则 $k^3 + 2k^2 - 2k - 1 = 0$, 即 $(k-1)(k^2 + 3k + 1) = 0$, 解得

$$k_4 = 1, k_5 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, k_6 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因为 $k_1 \cdot k_4 = k_2 \cdot k_5 = k_3 \cdot k_6 = -1$, 所以由 k_1 和 k_4 得到的两个三角形是相同的, 同样, 由 k_2 和 k_5 得到的两个三角形是相同的, k_3 和 k_6 得到的两个三角形也是相同的.

综上所述, 满足题意的 $\triangle ABC$ 共有 3 个. \dots\dots\dots 14 分

10. (本题满分 14 分) 已知 p 为素数, n 为正整数. 非负整数 a_0, a_1, \dots, a_n 均小于 p , 且满足

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 13, \\ a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n = 2015. \end{cases}$$

求素数 p .

解 由题设可得

$$a_1(p-1) + a_2(p^2-1) + \dots + a_n(p^n-1) = 2002,$$

于是 $p-1$ 是 $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ 的正约数. \dots\dots\dots 4 分

若 $p = 2$, 则 $(a_n \dots a_1 a_0)_2$ 是 2015 的二进制表示, 因为

$$2015 = (11111011111)_2,$$

而 $1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1 = 11 \neq 13$, 矛盾. \dots\dots\dots 6 分

若 $p > 2$, 则 p 是奇数, 于是 $p-1$ 是偶数,

$$p-1 = 2 \times 7, 2 \times 11, 2 \times 13, 2 \times 7 \times 11, 2 \times 7 \times 13, 2 \times 11 \times 13, 2 \times 7 \times 11 \times 13,$$

又 p 是素数, 故 p 只可能是 3, 23, 2003. \dots\dots\dots 8 分

若 $p = 3$, 则 $(a_n \dots a_1 a_0)_3$ 是 2015 的三进制表示, 因为 $2015 = (2202122)_3$, 而 $2+2+1++2+0+2+2 = 11 \neq 13$, 矛盾. \dots\dots\dots 10 分

若 $p = 23$, 则 $(a_n \dots a_1 a_0)_{23}$ 是 2015 的 23 进制表示, 因为

$$2015 = 3 \times 23^2 + 18 \times 23 + 14,$$

而 $14+18+3 \neq 13$, 矛盾. \dots\dots\dots 12 分

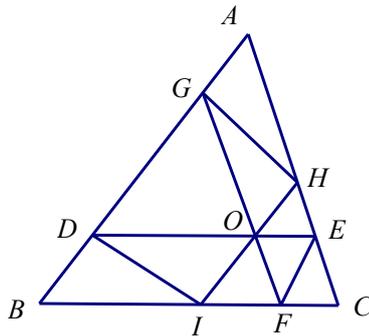
若 $p = 2003$, 则 $(a_n \cdots a_1 a_0)_{2003}$ 是 2015 的 2003 进制表示, 因为

$$2015 = 1 \times 2003 + 12,$$

而 $1 + 12 = 13$, 满足题设条件.

综上所述, 欲求的素数 p 为 2003.14 分

11. (本题满分 16 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 过 $\triangle ABC$ 内一点 O 分别引三条边的平行线 DE, FG, HI , 点 D, E, F, G, H, I 均在 $\triangle ABC$ 的边上, 求六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值.



解 由题设, 四边形 $AGOH$, 四边形 $BIOD$, 四边形 $CEOF$ 均为平行四边形.

又由题设知, $\triangle GDO \sim \triangle ABC$, $\triangle OIF \sim \triangle ABC$, $\triangle HOE \sim \triangle ABC$, 而相似三角形的面积比等于相似比的平方, 于是

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle GDO}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle OIF}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle HOE}}{S_{\triangle ABC}} &= \left(\frac{DO}{BC}\right)^2 + \left(\frac{IF}{BC}\right)^2 + \left(\frac{OE}{BC}\right)^2 \\ &= \left(\frac{BI}{BC}\right)^2 + \left(\frac{IF}{BC}\right)^2 + \left(\frac{FC}{BC}\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{BI}{BC} + \frac{IF}{BC} + \frac{FC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

从而 $S_{\triangle GDO} + S_{\triangle OIF} + S_{\triangle HOE} \geq \frac{1}{3}$10 分

所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle AGH} + S_{\triangle BID} + S_{\triangle CEF} &= \frac{1}{2}(S_{\triangle AGOH} + S_{\triangle BIOD} + S_{\triangle CEOF}) \\ &= \frac{1}{2}(S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle GDO} + S_{\triangle OIF} + S_{\triangle HOE})) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} S_{DGHEFI} &= S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AGH} + S_{\triangle BID} + S_{\triangle CEF}) \\ &\geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$
.....14 分

当 O 为 $\triangle ABC$ 的重心时, 上述不等式等号成立. 所以, 六边形 $DGHEFI$ 的面积的最小值为 $\frac{2}{3}$16 分

12. (本题满分 16 分) 设 n 是正整数, 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 是由数 0 或 1 组成的数列, 即 $a_k = 0$ 或 $1 (1 \leq k \leq n)$.

(1) 若 $n \geq 3$, 由数列 A 定义另一个数列 $A': a'_1, a'_2, \dots, a'_n$, 其中

$$a'_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } a_{k-1} = a_{k+1}, \\ 1, & \text{若 } a_{k-1} \neq a_{k+1}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

这里 $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$.

求使得 $a_k + a'_k = 1, k = 1, 2, \dots, n$ 的所有数列 A . (本小题只需写出结果, 不需解题过程)

(2) 求使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 除以 4 余 3 的数列 A 的个数.

解 (1) 数列 $A: 1, 1, \dots, 1$; 当 n 是 3 的倍数时, 数列 A 还有如下三个解:

$$A: 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0; \quad A: 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1;$$

$$A: 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0.$$

.....4 分

(2) 设 x_n, y_n, z_n, u_n 分别表示 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 除以 4 余数为 0, 1, 2, 3 的数列 A 的个数. x_n 其实表示 a_1, a_2, \dots, a_n 中有 0 个 1, 4 个 1, \dots 的数列 A 的个数, 于是

$$x_n = C_n^0 + C_n^4 + \dots. \quad \text{同理, } y_n = C_n^1 + C_n^5 + \dots, \quad z_n = C_n^2 + C_n^6 + \dots, \quad u_n = C_n^3 + C_n^7 + \dots.$$

.....6 分

因为 $(1+i)^n = C_n^0 + iC_n^1 + i^2C_n^2 + \dots + i^nC_n^n = x_n + iy_n - z_n - iu_n,$

$$(1-i)^n = x_n - iy_n - z_n + iu_n,$$

所以
$$y_n - u_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i}.$$

又
$$y_n + u_n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1},$$

所以
$$u_n = 2^{n-2} - \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{4i}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

注意到

$$(1+i) - (1-i) = 2i, \quad (1+i)^2 - (1-i)^2 = 4i,$$

$$(1+i)^3 - (1-i)^3 = 4i, (1+i)^4 - (1-i)^4 = 0,$$

及 $(1+i)^{k+4} - (1-i)^{k+4} = -4[(1+i)^k - (1-i)^k], k = 1, 2, \dots,$

所以

$$(1+i)^n - (1-i)^n = \begin{cases} (-4)^{k-1} \cdot 2i, & \text{若 } n = 4k - 3, \\ (-4)^{k-1} \cdot 4i, & \text{若 } n = 4k - 2, \\ (-4)^{k-1} \cdot 4i, & \text{若 } n = 4k - 1, \\ 0, & \text{若 } n = 4k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots.$$

于是有

$$u_n = \begin{cases} 2^{4k-5} - (-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-3}, & \text{若 } n = 4k - 3, \\ 2^{4k-4} - (-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-2}, & \text{若 } n = 4k - 2, \\ 2^{4k-3} - (-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-2}, & \text{若 } n = 4k - 1, \\ 2^{4k-2}, & \text{若 } n = 4k. \end{cases}$$

.....16 分