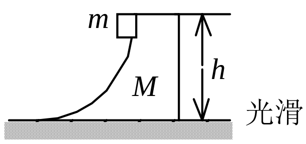
一、填空题（**每题 4 分，共计 48 分**）

1. 一个人站在平板车上掷铅球，人和车总质量为 M，铅球的质量为 m，平板车可沿水平、光滑的直轨道移动．设铅直平面为 xy 平面，x 轴与轨道平行，y 轴正方向竖直向上．已知未掷球时，人、车、球皆静止．球出手时沿斜上方，它相对于车的初速度在 xy 平面内，其大小为 υ_0，方向与 x 轴正向的夹角为θ ，人在掷球过程中对车无滑动，则球被抛出之后，车对地的速度$\vec{V}=$______________________，球对地的速度$\vec{\upsilon}=$______________________.

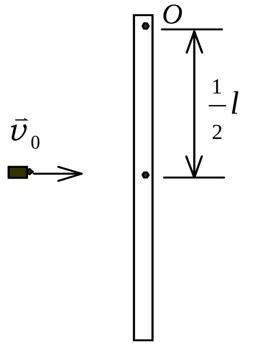
2. 如图所示，一光滑的滑道，质量为 M 高度为 h，放在一光滑水平面上，滑道底部与水平面相切．质量为 m 的小物块自滑道顶部由静止下滑，则物块滑到地面时，滑道的速度为________________________；物块下滑的整个过程中，滑道对物块所作的功为___________________.



3. 一个力 F 作用在质量为 1.0 kg 的质点上，使之沿 x 轴运动．已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x=3t-4t^2+t^3$ (SI)．在 0 到 4 s 的时间间隔内，力 F 的冲量大小 $I=$__________________；力 F 对质点所作的功 $W=$________________.

4.一块质量为 m 的均匀正方形薄板，其边长为 L，它以其一边为轴转动时转动惯量为________________；它以过中心且垂直于板的轴转动时，转动惯量为_________________.

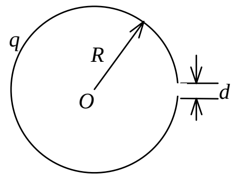
5. 如图所示，一长为 l，质量为 M 的均匀细棒悬挂于通过其上端的光滑水平固定轴上．现有一质量为 m 的子弹以水平速度 υ_0 射向棒的中心，并以$\dfrac{1}{2}\upsilon_0$的速度穿出棒．在此射击过程中细棒和子弹系统对轴的____________守恒. 如果此后棒的最大偏转角恰为 90°，则$\vec{\upsilon}_0$的大小 $\upsilon_0=$____________.



6、三个质量相等的带电小球在光滑水平面上沿一直线排列，间距为 L，$q_B=-3q$，$q_A=6q$，F 为恒定外力。为使三者始终保持间距为 L 的运动，F=______________，q_C=______________.

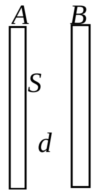
7. 一半径为 R 的带有一缺口的细圆环，缺口长度为 d (d<<R)环上均匀带有正电，电荷为 q，如图所示．则圆心 O 处的场强大小

E=________________，场强方向为_______________________．



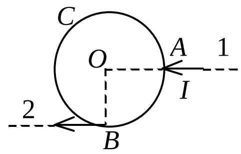
8. 如图所示，A、B 为靠得很近的两块平行的大金属平板，两板的面积均为 S，板间的距离为 d．今使 A 板带电荷 q_A，B 板带电荷 q_B，且 $q_A > q_B$．则 A 板的靠近 B 的一侧所带电荷为___________________；两板间电势差

U =_______________________．



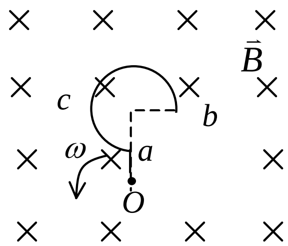
9. 如图所示，用均匀细金属丝构成一半径为 R 的圆环 C，电流 I 由导线 1 流入圆环 A 点，并由圆环 B 点流入导线 2．设导线 1 和导线 2 与圆环共面，则环心 O 处的磁感强度大小为

_________________________，方向______________________．



10 一个半径为 R、面电荷密度为σ 的均匀带电圆盘，以角速度ω绕过圆心且垂直盘面的轴线 AA' 旋转；今将其放入磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀外磁场中，$\vec{B}$ 的方向垂直于轴线 AA'．在距盘心为 r 处取一宽为 dr 的圆环，则圆环内相当于有电流__________________，该电流环所受磁力矩的大小为__________________，圆盘所受合力矩的大小为_____________________．

11. 一导线被弯成如图所示形状，acb 为半径为 R 的四分之三圆弧，直线段 Oa 长为 R．若此导线放在匀强磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向垂直图面向内．导线以角速度ω在图面内绕 O 点匀速转动，则此导线中的动生电动势$\mathscr{E}_i$ =______________________，电势最高的点是_____________．



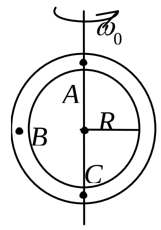
12. 在一个圆形平板电容器内，存在着一均匀分布的随时间变化的电场，电场强度为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ （E_0 和 τ 皆为常量），则在任意时刻，电容器内距中心轴为 r 处的能流密度的大小为______________________，方向为_____________________________．

二、计算题**(本题 72 分)**

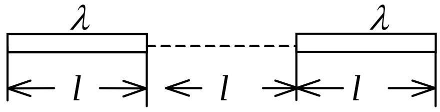
13. **(本题 10 分)**我们称两颗相距很近、相互吸引并绕其质心转动的恒星为双星，用望远镜观测双星时，亮的一颗叫主星，暗的一颗叫伴星．设主星 A 的质量为 m_1 伴星 B 的质量为 m_2，相隔距离为 a，求当它们相互吸引而绕其质心做圆周运动时的周期 T 的表达式．

14. **(本题 12 分)**飞机降落时的着地速度大小 υ =90 km/h，方向与地面平行，飞机与地面间的摩擦系数μ =0.10，迎面空气阻力为 $C_x\upsilon^2$，升力为 $C_y\upsilon^2$(υ 是飞机在跑道上的滑行速度，C_x和 C_y为某两常量)．已知飞机的升阻比 $K=C_y/C_x=5$，求飞机从着地到停止这段时间所滑行的距离．(设飞机刚着地时对地面无压力)

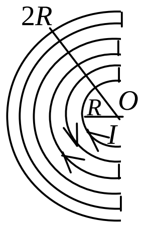
15. **(本题 10 分)**)空心圆环可绕光滑的竖直固定轴 AC 自由转动，转动惯量为 J_0，环的半径为 R，初始时环的角速度为ω_0．质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点，由于某种微小干扰，小球沿环向下滑动，问小球滑到与环心 O 在同一高度的 B 点和环的最低处的 C 点时，环的角速度及小球相对于环的速度各为多大?(设环的内壁和小球都是光滑的，小球可视为质点，环截面半径 $r<<R$.)



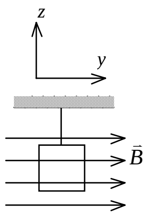
16. **(本题 10 分)**两根相同的均匀带电细棒，长为 l，电荷线密度为λ，沿同一条直线放置．两细棒间最近距离也为 l，如图所示．假设棒上的电荷是不能自由移动的，试求两棒间的静电相互作用力.



17. **(本题 15 分)**如图，电流从内部开始沿第一根导线顺时针通过后，紧挨着沿第二根逆时针返回，如此由内到外往返．最后一根导线中的电流沿 (1) 逆时针方向 (2) 顺时针方向，设导线中的电流强度为 I，R 远大于导线的直径．求(1)、(2)两种情况下，O 点处的磁感强度 $\vec{B}$ 的大小与方向.



18. **(本题 15 分)**一面积为 A、总电阻为 R 的导线环用一根扭转刚度为 K 的弹性细丝(被扭转α角时，其弹性恢复扭力矩 $M_K = K\alpha$)挂在均匀磁场 $\vec{B}$ 中，如图．线圈在 yz 平面处于平衡，设线圈绕 z 轴的转动惯量为 I．现将环从图中位置转过一个小角度θ 后释放之，忽略线圈自感, 试用已知参数写出此线圈的转角与时间的方程.



一、填空题

1. $-\dfrac{m\upsilon_0\cos\theta}{M+m}\vec{i}$　　$\upsilon_0\cos\theta(1-\dfrac{m}{M+m})\vec{i}+\upsilon_0\sin\theta\ \vec{j}$

2. $\sqrt{\dfrac{2m^2gh}{(m+M)M}}$　　$-(\dfrac{m}{m+M})mgh$

3. 16 N·s　　176 J

4. $\dfrac{1}{3}mL^2$　　$\dfrac{1}{6}mL^2$

5. 角动量　　$\dfrac{4M}{3m}\sqrt{3gl}$

6. $\dfrac{18\mathrm{kq}^2}{\mathrm{L}^2}$　　8q

7. $\dfrac{qd}{4\pi\varepsilon_0R^2\left(2\pi R-d\right)}\approx\dfrac{qd}{8\pi^2\varepsilon_0R^3}$　　从 O 点指向缺口中心点．

8. $\dfrac{1}{2}(q_A-q_B)$　　$(q_A-q_B)\dfrac{d}{2\varepsilon_0S}$

9. $\mu_0I/(4\pi R)$　　垂直纸面向内

10. $\sigma\omega r\,\mathrm{d}r$　　$\pi\sigma\omega r^3B\,\mathrm{d}r$　　$\pi\sigma\omega R^4B/4$

11. $\dfrac{5}{2}B\omega R^2$　　O 点

12. $\dfrac{\varepsilon_0r}{2\tau}E_0^2\mathrm{e}^{-2t/\tau}$　　沿半径方向指向电容器外

二、计算题

13. 解：A、B 间的相互吸引力．　$F(r)=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$，

折合质量　$\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

讨论 B 对 A 的运动，相当于 A 被固定、B 的质量变为 μ 时的运动．其运动方程为

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$$

∴
$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-G\frac{(m_1+m_2)m_2}{r^3}\vec{r}=-G\frac{Mm_2}{r^3}\vec{r}$$

这也相当于主星 A 被固定、A 的质量为 $m_1+m_2=M$ 时，伴星 B 的运动方程．而行星沿圆形轨道运行时，设轨道半径为 a

其周期　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$

类比可得　$T=2\pi\dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1+m_2)}}$

14.解：以飞机着地点为坐标原点，飞机滑行方向为 x 轴正向．设飞机质量为 m，着地后地面对飞机的支持力为 N．在竖直方向上

$$N + C_y \upsilon^2 - mg = 0 \qquad \therefore \quad N = mg - C_y \upsilon^2$$

飞机受到地面的摩擦力　$f = \mu N = \mu(mg - C_y \upsilon^2)$

在水平方向上　$-\mu(mg - C_y \upsilon^2) - C_x \upsilon^2 = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = m\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$

即　$\dfrac{m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)\upsilon^2} = -\mathrm{d}\,x$

$x = 0$ 时，$\upsilon = \upsilon_0 = 90$ km/h $= 25$ m/s．$x = S$（滑行距离）时，υ＝0

$$\int_{\upsilon_0}^{0} \frac{m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)\upsilon^2} = -\int_0^S \mathrm{d}\,x = -S$$

$$\frac{\frac{1}{2}m}{C_x - \mu C_y}\int_{\upsilon_0}^{0} \frac{\mathrm{d}[\mu mg + (C_x - \mu C_y)\upsilon^2]}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)\upsilon^2} = -S$$

解得　$S = \dfrac{\frac{1}{2}m}{C_x - \mu C_y}\ln\dfrac{\mu mg + (C_x - \mu C_y)\upsilon_0^2}{\mu mg}$

∵　飞机刚着地前瞬间，所受重力等于升力，即

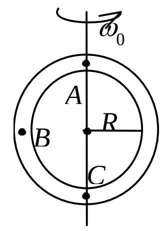
$$mg = C_y \upsilon_0^2$$

∴　$C_y = \dfrac{mg}{\upsilon_0^2}$ ，　$C_x = \dfrac{C_y}{K} = \dfrac{mg}{5\upsilon_0^2}$

代入 S 表达式中并化简，然后代入数据

$$S = \frac{5\upsilon_0^2}{2g(1-5\mu)}\ln\frac{1}{5\mu} = 221 \text{ m}$$

15.解：选小球和环为系统．运动过程中所受合外力矩为零，角动量守恒．对地球、小球和环系统机械能守恒．取过环心的水平面为势能零点．



小球到 B 点时：　$J_0\omega_0 = (J_0 + mR^2)\omega$　①

$$\frac{1}{2}J_0{\omega_0}^2 + mgR = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega^2 R^2 + \upsilon_B^2\right) \qquad ②$$

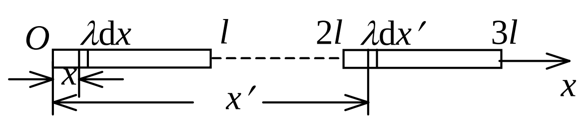
式中 υ_B 表示小球在 B 点时相对于地面的竖直分速度，也等于它相对于环的速度．由式①得：　$\omega = J_0\omega_0 / (J_0 + mR^2)$

代入式②得　$\upsilon_B = \sqrt{2gR + \dfrac{J_0\omega_0^2 R^2}{mR^2 + J_0}}$

当小球滑到 C 点时，由角动量守恒定律，系统的角速度又回复至 ω_0，又由机械能守恒定律知，小球在 C 的动能完全由重力势能转换而来．即：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_C^2 = mg(2R)\ ,\ \upsilon_C = \sqrt{4gR}$$

16.解：选左棒的左端为坐标原点 O，x 轴沿棒方向向右，在左棒上 x 处取线元 dx，其电荷为 dq＝λdx，它在右棒的 x' 处产生的场强为：



$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(x'-x\right)^2}$$

整个左棒在 x' 处产生的场强为：

$$E=\int_0^l\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(x'-x\right)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x'-l}-\frac{1}{x'}\right)$$

右棒 x' 处的电荷元 $\lambda\mathrm{d}x'$ 在电场中受力为：

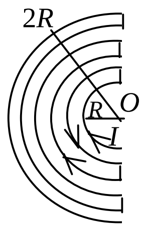
$$\mathrm{d}F=E\lambda\,\mathrm{d}x'=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x'-l}-\frac{1}{x'}\right)\mathrm{d}x'$$

整个右棒在电场中受力为：

$$F=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2l}^{3l}\left(\frac{1}{x'-l}-\frac{1}{x'}\right)\mathrm{d}x'=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$，方向沿 x 轴正向．

左棒受力 $\qquad F'=-F$

17.解：设半圆形导线来回往返共 N 次，因为第一根是顺时针的，若最后一根逆时针，则有 N／2 根逆时针，N／2 根顺时针．若最后一根顺时针，则有 $(N-1)$／2 根逆时针，$(N+1)$／2 根顺时针．



(1) 外一根为逆时针的情况，$r\to r+\mathrm{d}r$ 内单说逆时针或单说顺时针的电流为

$$\mathrm{d}I=I\frac{N}{2R}\mathrm{d}r$$

它们在 O 点产生的磁场 $\qquad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{4r}=\frac{\mu_0 IN}{8R}\frac{\mathrm{d}r}{r}$

$$\therefore\quad B=\int_R^{2R-R/N}\mathrm{d}B-\int_{R+R/N}^{2R}\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 IN}{8R}\ln\frac{2R-R/N}{R}-\frac{\mu_0 IN}{8R}\ln\frac{2R}{R+R/N}$$

$$=\frac{\mu_0 IN}{8R}[\ln 2(1-\frac{1}{2N})+\ln\frac{1+1/N}{2}]=\frac{\mu_0 IN}{8R}[\ln(1-\frac{1}{2N})+\ln(1+\frac{1}{N})]$$

$$\because\quad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

$$\therefore\quad \ln(1-\frac{1}{2N})+\ln(1+\frac{1}{N})]=-\frac{1}{2N}+\frac{1}{N}=\frac{1}{2N}$$

$$\therefore\quad B=\frac{\mu_0 I}{16R}$$

方向⊗

(2) 最外一根为顺时针的情况，

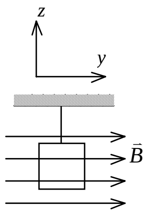
$$B=\int_R^{2R}\mathrm{d}B-\int_{R+R/N}^{2R-R/N}\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 IN}{8R}(\ln 2-\ln\frac{2R-R/N}{R+R/N})$$

$$=\frac{\mu_0 IN}{8R}[\ln(1+\frac{1}{N})-\ln(1-\frac{1}{2N})]$$

$$=\frac{\mu_0 IN}{8R}(\frac{1}{N}+\frac{1}{2N})=\frac{3\mu_0 I}{16R}$$

方向⊗

18.解：当线圈平面从图中位置转过小角度α时，穿过线圈的磁通量为：



$$\Phi = BA\sin\alpha$$

α变化时线圈中感应电动势为 $$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BA\cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

感应电流 $$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BA}{R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos\alpha$$

磁矩 $$m = iA = \frac{BA^2}{R}\cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

所受磁力矩 $$M_m = \frac{B^2A^2}{R}\cos^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

线圈还受到细丝弹性恢复力矩 $M_K = K\alpha$，两者均阻碍线圈运动.

∴ $$\frac{B^2A^2\cos^2\alpha}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + K\alpha = -I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$$

∵ $\alpha \le \theta$ $\theta \approx 0$ ∴ $\cos\alpha \approx 1$

∴ $$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{B^2A^2}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + K\alpha = 0$$

其通解为： $$\alpha = \mathrm{e}^{-\beta t}(A_1\cos rt + A_2\sin rt)$$

其中 $$\beta = \frac{B^2A^2}{2IR} \qquad r = \sqrt{\frac{K}{I} - \beta^2}$$

利用初始条件： $$\alpha\big|_{t=0} = \theta \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

可得 $A_1 = \theta$， $A_2 = 0$ $\alpha = \theta\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos rt$