$\therefore$ 原式 $=\dfrac{4k^2-27k^2+16k^2}{6k^2+48k^2+60k^2}$

$=-\dfrac{7k^2}{114k^2}=-\dfrac{7}{114}$.

5 倒数消元

例 5 已知 $a+1/b=1(a\neq 0),b+1/c=1$，求 $c+1/a$ 的值.

解 由 $a+1/b=1,b+1/c=1$，

得 $1/b=1-a$，$b=(c-1)/c$.

$\because \dfrac{1}{b}\times b=1. \therefore (1-a)\cdot\dfrac{c-1}{c}=1,ca+1=a$，

$\because a\neq 0,\therefore (ac+1)/a=1,\therefore c+1/a=1$.

6 取值消元

例 6 多项式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式是 $x+y-2$，求 $a+b$ 的值.

解 设已知多项式的另一因式为 M.

$\therefore x^2+axy+by^2-5x+y+6$

$=M(x+y-2)$，

取 $x=1,y=1$，得 $1+a+b-5+1+6=0$.

$\therefore a+b=3$.

换元法在数学竞赛中的应用

福建安溪光德中学 叶葱葱

有些数学竞赛题目如用常规方法求解，会带来很大的计算量，甚至不得要领，无从下手.下面介绍初中数学竞赛中用到换元法的几种形式，对于减少运算量，化难为易，带来很大的方便.

1 常值换元法

例 1 计算 $\dfrac{(2000^2-1999)\times 2001}{2000^2-2000\times 1999+1999^2}$ 的结果等于______.(十二届"希望杯"初二培训题)

解 设 $a=2000$，则

原式 $=\dfrac{[a^2-(a-1)](a+1)}{a^2-a\times(a-1)+(a-1)^2}$

$=\dfrac{(a^2-a+1)(a+1)}{a+a^2-2a+1}=a+1=2001$.

例 2 计算 $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{1997})(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{1996})-(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{1997})(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{1996})$ $=$________.(第八届"希望杯"初一试题)

解 设 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{1996}$ 则

原式 $=(x+\dfrac{1}{1997})(1+x)-x(1+x+\dfrac{1}{1997})$

$=x+x^2+\dfrac{1}{1997}+\dfrac{1}{1997}x-x-x^2-\dfrac{1}{1997}x$

$=1/1997$.

2 均值换元法

例 3 设 x、y 满足 $x+3y+|3x-y|=19$，① $2x+y=6$ ②，则 $x=$______，$y=$______.(第十届"希望杯"初一试题)

解 据②可设 $2x=3+t$ 或

$x=(3+t)/2,y=3-t$ ③

把③代入①，得

$(3+t)/2+3(3+t)$

$+|3(3+t)/2-(3-t)|=19$，

解得：$t=2$，

把 $t=2$ 代入③得：$x=1/2,y=5$.

例 4 解方程 $\dfrac{13x-x^2}{x+1}(x+\dfrac{13-x}{x+1})=42$.

解 $\because \dfrac{13x-x^2}{x+1}+(x+\dfrac{13-x}{x+1})=13$，

$\therefore$ 可设 $\dfrac{13x-x^2}{x+1}=\dfrac{13}{2}+t$， ①

$x+\dfrac{13-x}{x+1}=\dfrac{13}{2}-t$. ②

把①、②代入原方程，解得 $t=\pm 1/2$.

把 $t=\pm\dfrac{1}{2}$ 代入①得

$(13x-x^2)/(x+1)=6$

或 $(13x-x^2)/(x+1)=7$.

解得：$x_1=1,x_2=6,x_3=3+\sqrt{2},x_4=3-\sqrt{2}$.

经检验，它们都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根为：

$x_1=1,x_2=6,x_3=3+\sqrt{2},x_4=3-\sqrt{2}$.

3 整体换元法

例 5 解方程 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$,

解 $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=24$,

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$,

令 $x^2+5x+5=t$ ①,则原方程可化为:

$(t-1)(t+1)=24, t=\pm 5$.

把 $t=\pm 5$ 代入①得: $x^2+5x+5=\pm 5$,

解得: $x_1=0, x_2=-5$.

$\therefore$ 原方程的根为: $x_1=0, x_2=-5$.

4 对称换元法(适用于含有三个对称字母的一类数学问题)

例 6 解方程组 $\begin{cases} xy+zx=8-x^2, \\ xy+yz=12-y^2, \\ yz+zx=-4-z^2. \end{cases}$

(1996 年湖北“英才杯”)

解 设 $S=x+y+z$,显然 $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$,

则原方程组可化为: $\begin{cases} xS=8, \\ yS=12, \\ zS=-4, \end{cases}$

三式相加得: $(x+y+z)S=16$,

即 $S^2=16, S=\pm 4$.

当 $S=4$ 时, $x=2, y=3, z=-1$,

$S=-4$ 时, $x=-2, y=-3, z=1$.

$\therefore$ 原方程组的解为: $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \\ z_1=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-3, \\ z_2=1, \end{cases}$

例 7 已知 $abc\neq 0$,且 $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$,则 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值是_____或____.(第八届“希望杯”初二试题)

解 设 $S=a+b+c$,则原式可化为:

$\dfrac{S-2c}{c}=\dfrac{S-2b}{b}=\dfrac{S-2a}{a}$, $\therefore \dfrac{S}{c}=\dfrac{S}{b}=\dfrac{S}{a}$.

$\therefore S=0$ 或 $a=b=c$.

当 $S=a+b+c=0$ 时,

原式 $=\dfrac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$;

当 $a=b=c$ 时,原式 $=8$.

5 比值换元法

例 8 已知 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y+z}=\dfrac{5}{z+x}$,则 $\dfrac{x-2y}{2y+z}=$______.(2001 年重庆初三数学竞赛题)

解 设 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y+z}=\dfrac{5}{z+x}=k$,则

$\begin{cases} x=1/k, \\ y+z=3/k, \\ z+x=5/k, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1/k, \\ y=-1/k, \\ z=4/k. \end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1/k-2\times(-1/k)}{2\times(-1/k)+4/k}=\dfrac{3}{2}$.

6 平方换元法

例 9 已知 $1/x+1/y=5$ ①, $1/\sqrt{x}+1/\sqrt{y}=3$ ②,那么 $1/x-1/y=$______.(十二届“希望杯”培训题)

解 设 $1/\sqrt{x}=u, 1/\sqrt{y}=v$,

则 $u^2=1/x, v^2=1/y$ ③

把③代入①、②得: $\begin{cases} u+v=3, \\ u^2+v^2=5. \end{cases}$

解得: $\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=1, \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=1, \\ v_2=2. \end{cases}$

即 $\begin{cases} 1/\sqrt{x}=2, \\ 1/\sqrt{y}=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1/\sqrt{x}=1, \\ 1/\sqrt{y}=2. \end{cases}$

$\therefore 1/x=4, 1/y=1$,或 $1/x=1, 1/y=4$.

$\therefore 1/x-1/y=\pm 3$.

例 10 化简代数式 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.(十三届“希望杯”培训题)

解 设 $m=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$,则 $m>0$.

$\because m^2=6, \therefore m=\sqrt{6}$.

这些例子充分体现了换元法的应用功能,不但可以培养学生灵活运用知识解决实际问题的能力,而且符合“人人学有用的数学,不同的人学不同的数学”的新课程标准的理念,更能激发学有余力的学生的兴趣,让他们能跳出题海,举一反三,事半功倍地学数学.