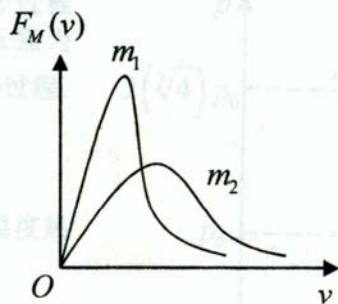
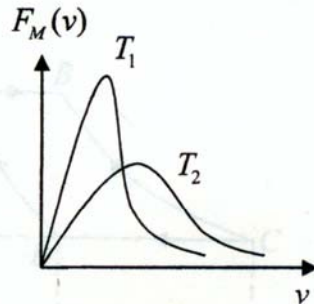


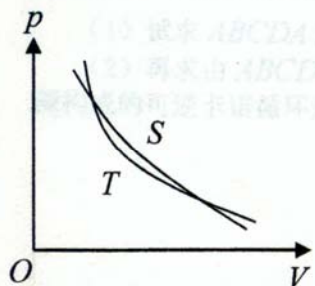
4. 右图 (a) 和 (b) 分别是不同分子质量下的麦克斯韦速率分布曲线和不同温度下的麦克斯韦速率分布曲线, 必有 m_1 _____ m_2 和 T_1 _____ T_2 (填“大于”或“小于”).



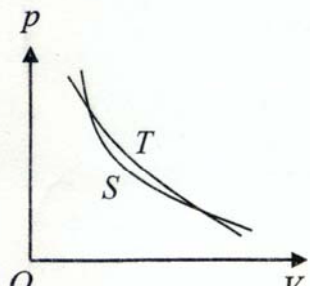
(a)



5. 某理想气体在 $p-V$ 坐标面上的一条绝热过程线 (S 线) 和一条等温过程线 (T 线) 之间的几何关系如左图 (a) 或 (b) 所示, 则违反热力学第一定律的是其中图 _____, 违反热力学第二定律的是其中图 _____。

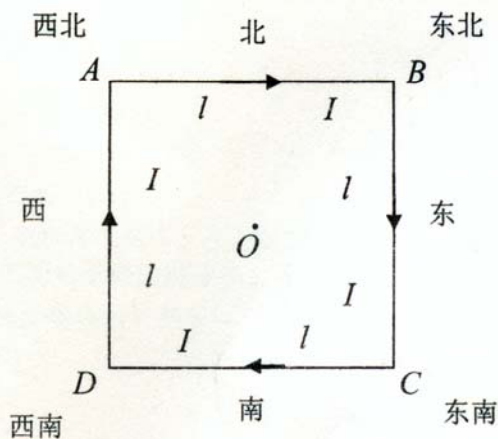


(a)



(b)

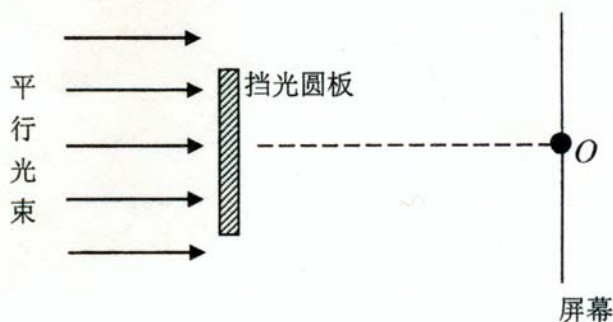
6. 已知电荷面密度处处为有限量时, 电荷面分布系统的全空间电场能等于系统电势能。(1) 半径为 R 的导体球带电量为 Q , 静电平衡后全空间电场能 $W_{e1} =$ _____。(2) 每边长 $2R$ 的立方体导体块带电量为 Q , 静电平衡后全空间电场能 W_{e2} _____ W_{e1} (填“大于”、“等于”或“小于”).



7. 每边长为 l 的正方形导体框架 $ABCD$ 中, 有如右上图所示方向的稳定电流 I 。按图中给出的八个基本方向, 框架中 AB 边电流所受合安培力的方向为 _____。已知图中电流框架在中心 O 处的磁感应强度大小为 B_1 , 若将框架每边长增为 $2l$, 电流 I 不变, 框架中心 O 处的磁感应强度大小则为 $B_2 =$ _____。

8. 惠更斯—菲涅耳原理的文字表述为 _____

_____。
据此可知, 右图所示实验装置的圆板中心正右方的屏幕中心 O 处为 _____ (填“亮点”或“暗点”)。

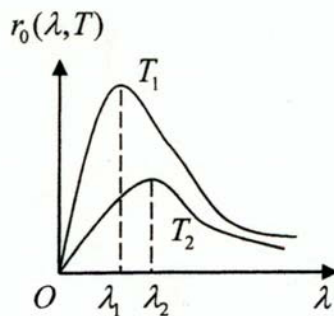


9. 牛顿环干涉图样中与平行膜小倾角等倾干涉环图样中, 边缘环比中央环密集的是 _____, 边缘环比中央环干涉级高的是 _____。

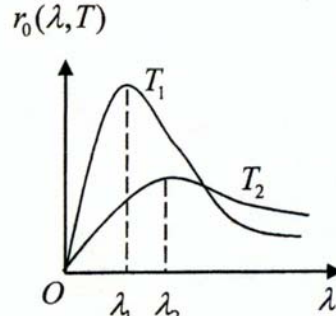
_____。

(每个空白处, 或填写 1 个干涉图样, 或填写 2 个干涉图样)。

10. 右图 (a) 和 (b) 各自画出了绝对黑体辐射本领 $r_0(\lambda, T)$ 的两条曲线, 定性正确的是 _____ 填“图 (a)”或“图 (a) 和 (b)”或“图 (b)”。正确的图中 λ_1 、 λ_2 设为已知量, 将 T_1 曲线、 T_2 曲线各自与 λ 轴所夹全部面积分别记为 S_1 、 S_2 , 则 $S_1:S_2 =$ _____。



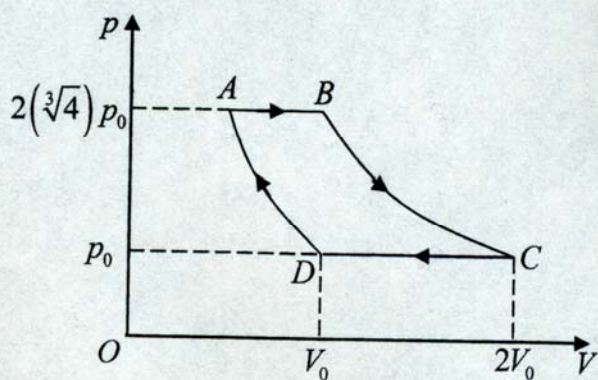
(a)



(b)

12. (15 分) 单原子分子理想气体经历的循环过程 $ABCD$ 如图所示, 其中 AB 和 CD 过程分别是压强为 $2(\sqrt[3]{4})p_0$ 和 p_0 的等压过程, BC 和 DA 过程都是绝热过程, 状态 D 和 C 的体积分别为 V_0 和 $2V_0$ 。

- (1) 试求 $ABCD$ 过程效率;
- (2) 再求由 $ABCD$ 过程中最高温度热源和最低温度热源构成的可逆卡诺循环过程的效率。



 线

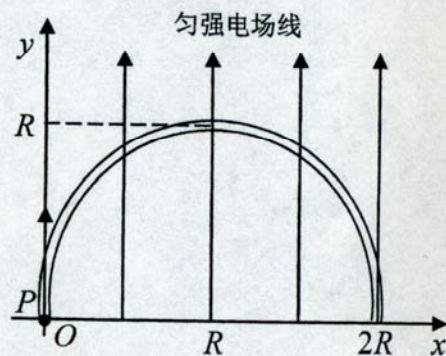
 装

 订

 线

 装

13. (15分) 如图所示, 在水平 $O-xy$ 坐标平面的第I象限上, 有一个内外半径几乎同为 R , 圆心位于 $x=R$ 、 $y=0$ 处的半圆环形固定细管道, 坐标平面上有沿着 y 轴方向的匀强电场。带电质点 P 在管道内, 从 $x=0$ 、 $y=0$ 位置出发, 在管道内无摩擦地运动, 其初始动能为 E_{k0} 。 P 运动到 $x=R$ 、 $y=R$ 位置时, 其动能减少了二分之一。



- (1) 试问 P 所带电荷是正的, 还是负的, 为什么?
- (2) P 所到位置可用该位置的 x 坐标来表示, 试在 $2R \geq x \geq 0$ 范围内导出 P 的动能 E_k 随 x 变化的函数。
- (3) P 在运动过程中受管道侧壁的弹力 \vec{N} 也许是径向朝里的 (即指向圆心的), 也许是径向朝外的 (即背离圆心的)。通过定量讨论, 判定在 $2R \geq x \geq 0$ 范围内是否存在 \vec{N} 径向朝里的 x 取值区域, 若存在, 试给出该区域; 继而判定在 $2R \geq x \geq 0$ 范围内是否存在 \vec{N} 径向朝外的 x 取值区域, 若存在, 请给出该区域。

14. (15分) 衍射光栅相对于正入射光波的多缝干涉因子中有下边两个公式:

$$d \sin \theta = k \lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

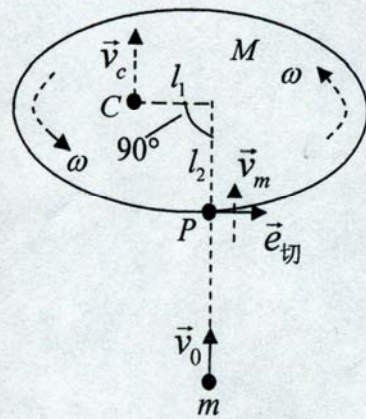
$$N d \sin \theta = m \lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2 \cdots, \text{ 但 } m \neq kN$$

其中 N 为缝数, d 为缝间距, θ 为衍射角, λ 为入射光的波长。

(1) 指出上述两个公式中, 哪一个是关于多缝干涉取极小值的公式?

(2) 双缝干涉装置可视为 $N = 2$ 的“光栅”。将白光(波长范围: $4000\text{\AA} - 7000\text{\AA}$) 正入射到缝距 $d = 1.00\text{mm}$ 双缝干涉装置上, 用焦距 $f = 1.00\text{m}$ 的平行透镜将双缝干涉条纹聚焦在其焦平面的屏幕上。若在屏幕上距中央白色亮条纹 3.00mm 处开一小孔, 在该处检查进入小孔的光, 试问其中缺少哪些波长的光?

15. (20分) 如图所示, 质量为 m 的运动质点与质量为 M 的静止平面刚体在同一平面内。刚体相对过质心转轴的转动惯量为 I_C , 质点的速度 \vec{v}_0 对准刚体边界点 P , 且与过 P 点的边界切线方向矢量 $\vec{e}_{\text{切}}$ 垂直, 刚体中的两个几何参量 l_1 、 l_2 的含义也已在图中示出。设质点与刚体的碰撞是弹性的, 碰后瞬间, 质点速度 \vec{v}_m 、刚体质心速度 \vec{v}_C 、绕过质心转轴转动角速度 ω , 均在图中用虚线箭头示出。试通过定量推导, 判断质点与刚体 P 部位在 \vec{v}_0 方向线上的碰后分离速度大小是否等于碰前接近速度大小?



16. (20分) 图示电路中空气平行板电容器可处理为真空平行板电容器, 电键 K 合上后, 充电过程已完成。图中外力 \vec{F} 以朝右为正方向画出, \vec{F} 的真实方向也可能朝左。

(1) 若将电键 K 断开, 利用图示外力 \vec{F} 让介质块缓慢地全部进入电容器两极板之间。

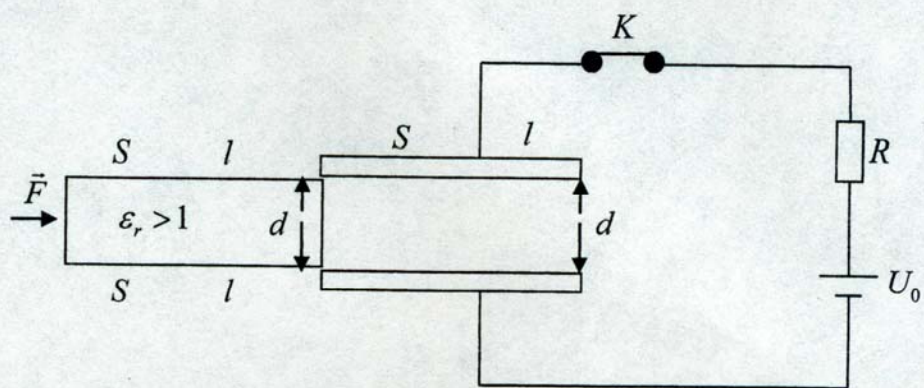
(1.1) 试求全过程中 \vec{F} 作功量 A_1 ;

(1.2) 再求该过程中, 介质块进入的长度为 x ($l > x > 0$) 时, \vec{F} 的方向和大小。

(2) 改设电键 K 未被断开, 利用图示外力 \vec{F} 让介质块缓慢地全部进入电容器两极板之间。

(2.1) 试求全过程中 \vec{F} 作功量 A_2 ;

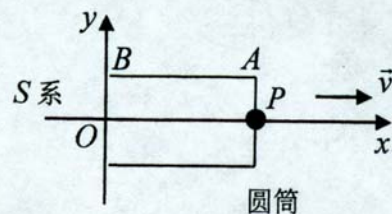
(2.2) 再求该过程中, 介质块进入的长度为 x ($l > x > 0$) 时, \vec{F} 的方向和大小。



考场_____姓名_____准考证号_____所属学校_____

*****装*****订*****线*****装*****订*****线*****

17. (20 分) 半径 R 、静长 l_0 ，内壁不反射光的圆筒 AB ， A 端封口，中心有一尚未点亮的固定点光源 P ， B 端开口。设圆筒在惯性系 S 中已处于匀速运动状态，速度 \vec{v} 沿 x 轴方向，筒的中央轴与 x 轴重合， A 端在前， B 端在后，如图所示。筒的 B 端运动到 $x=0$ 位置时， S 系中 $x=0$ 处的时钟读数为 $t=0$ ，圆筒系中 B 端的时钟读数也为 $t'=0$ ，圆筒系此时将 P 点亮，而后连续发光。



(静长 l_0 ，半径 R)

(1) 将 S 系测得 P 被点亮的时刻记为 t_{p0} ， S 系在 $O-yz$ 平面上的屏幕刚开始被照亮的时刻记为 t_0 ，试求 t_{p0} 、 t_0 。

(2) 令 $\beta = v/c$ 。设 $R/l_0 = \sqrt{1-\beta^2}$ ，并把该式记为 γ (即令 $R/l_0 = \sqrt{1-\beta^2} = \gamma$)。 S 系中任意 $t \geq t_0$ 时刻， $O-yz$ 平面屏幕被照亮的圆区域半径记为 r ，试导出 r 与 t 之间的函数关系(表述成 $r = r(t)$ 的形式)，答案中不可出现 R 、 γ 。

(3) 取 $\gamma = 0.6$ 、 $\beta = 0.8$ ，导出 (2) 问所得 r 与 t 之间的函数关系，答案中不可出现除去 c 、 l_0 的字符量。

第 30 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷
参考答案(2013.12.07)

1. $0, 2\omega^2 R$. 2. 内力和重力, $|W_+|$ 。

3. $\sqrt{k/m}, \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$. 4. 大于, 小于。

5. (a) 和 (b), (b)、或 (b) 和 (a) (均算对)。

6. $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$, 小于。 7. 朝北, $B_1/2$ 。

8. 波前 Σ 上每个面元 $d\Sigma$ 都可以看成是新的振动中心, 它们发出球面次波, 在空间某一点 P 的振动是所有球面次波在该点的相干迭加。 亮点。

9. 牛顿环干涉图样和平行膜等倾干涉环图样, 牛顿环。

10. 图 (a), $\lambda_2^4 : \lambda_1^4$ 。

11. (15 分)

(1) 引入题解图所示的几何参量, 小物块的初速度可记为 $\sqrt{2v}$, 有功能关系式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\sqrt{2v})^2 - \frac{1}{2}mv^2 &= (\mu mg \cos \theta_1) \overline{AB} \\ &+ (\mu mg \cos \theta_2) \overline{BC} \\ &= \mu mgl_1 + \mu mgl_2 \\ &= \mu mgl \quad m: \text{小物块质量} \end{aligned}$$

解得 $\mu = v^2 / 2gl$ (6 分)

(2) 求解 v_A 的功能关系与 (1) 问解答所述相同, 即为

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{2v})^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = (\mu mg \cos \theta_1) \overline{AB} + (\mu mg \cos \theta_2) \overline{BC}$$

故必有 $v_A = v$ (2 分)

求解 v_B 的功能关系式为

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{2v})^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = (\mu mg \cos \theta_2) \overline{BC} + mgh = \mu mgl_2 + mgh$$

即有 $v_B^2 = 2v^2 - 2\mu gl_2 - 2gh$ (2 分)

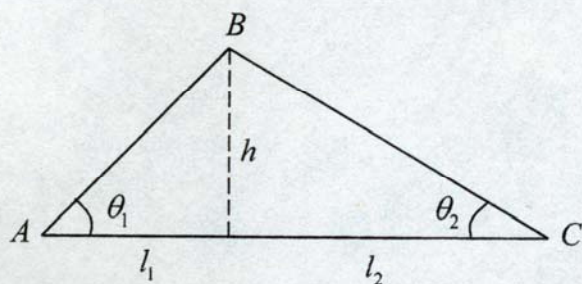
又由几何关系

$$l_1 = h \cot \theta_1, \quad l_2 = h \cot \theta_2, \quad l_1 + l_2 = l$$

可得 $l_2 = \frac{\cot \theta_2}{\cot \theta_1 + \cot \theta_2} l, \quad h = \frac{l}{\cot \theta_1 + \cot \theta_2}$

与 $\mu = v^2 / 2gl$ 一起代入前式, 既得

$$v_B = \left[\frac{2 \cot \theta_1 + \cot \theta_2}{\cot \theta_1 + \cot \theta_2} v^2 + \frac{2gl}{\cot \theta_1 + \cot \theta_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3 \text{ 分})$$



题解图

取 $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, 则 $\cot \theta_1 = 1$, $\cot \theta_2 = \sqrt{3}$, 得

$$v_B = \left[\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} \right) 2gl \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2gl} = v \quad (2 \text{分})$$

12. (15分)

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

(1) DA 绝热线:

$$p_0 V_0^\gamma = p_A V_A^\gamma = 2^\gamma p_0 V_A^\gamma \Rightarrow V_A = \frac{1}{2} V_0$$

BC 绝热线:

$$p_0 (2V_0)^\gamma = p_B V_B^\gamma = 2^\gamma p_0 V_B^\gamma \Rightarrow V_B = V_0$$

令 $T_0 = T_D = p_0 V_0 / \nu R$, 则有

$$T_A = p_A V_A / \nu R = 2^{\frac{5}{3}} p_0 \frac{1}{2} V_0 / \nu R = \sqrt[3]{4} T_0$$

$$T_B = p_B V_B / \nu R = 2^{\frac{5}{3}} p_0 V_0 / \nu R = 2\sqrt[3]{4} T_0$$

$$T_C = p_C V_C / \nu R = p_0 2V_0 / \nu R = 2T_0$$

$$Q_{\text{吸}} = Q_{AB\text{吸}} = \nu C_{mP} (T_A - T_B) = \frac{5}{2} \nu R \sqrt[3]{4} T_0$$

$$Q_{\text{放}} = Q_{CD\text{放}} = \nu C_{mP} (T_C - T_D) = \frac{5}{2} \nu R (2T_0 - T_0) = \frac{5}{2} \nu R T_0$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{Q_{\text{放}}}{Q_{\text{吸}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 1 - \frac{1}{1.587} \cong 0.370 = 37.0\% \quad (9 \text{分})$$

(2)

$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 升温, } T_B \text{ 最高} \\ BC \text{ 降温, } T_B \text{ 最高} \\ CD \text{ 降温, } T_D \text{ 最低} \\ DA \text{ 升温, } T_D \text{ 最低} \end{array} \right\}$	$ABCD\text{A过程}$	$\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{max}} = T_B = 2\sqrt[3]{4} T_0 \\ T_{\text{min}} = T_D = T_0 \end{array} \right.$
---	------------------	--

$$\eta_{\text{卡可逆}} = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} = 0.685 = 68.5\% \quad (6 \text{分})$$

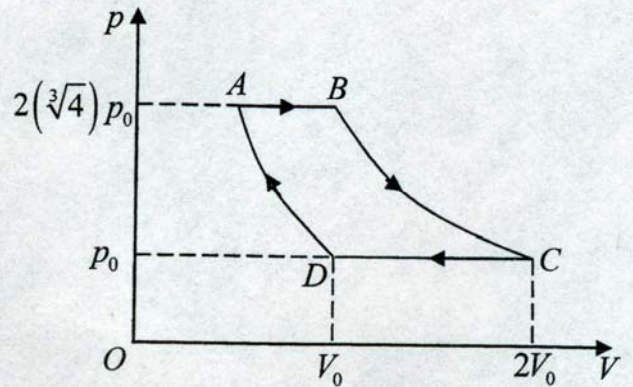
13. (15分)

(1) P 所带电荷是负的。因无摩擦, P 从 $x=0$ 、 $y=0$ 运动到 $x=R$ 、 $y=R$ 位置时, 动能减少必定使电势能增加, 只有 P 带负电沿电场线方向运动, 其电势能才是增加的。 (2分)

(2) 匀强电场大小记为 E , P 所带电量记为 $-q$, $q > 0$ 。 P 所到位置 x 坐标对应的 y 坐标为

$$y = \sqrt{R^2 - (R-x)^2} \quad \text{①} \quad (1 \text{分})$$

据能量守恒, 有



$$qER = \frac{1}{2} E_{k0} \Rightarrow qE = \frac{E_{k0}}{2R} \quad (1分) \quad (2)$$

$$E_k = E_{k0} - qEy \quad (1分) \quad (3)$$

联立①、②、③式，即可解得

$$E_k = \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{R} \left(2 - \frac{x}{R} \right)} \right] E_{k0} \quad (2分) \quad (4)$$

(3) 将 P 的质量记为 m ，考虑到对称性，先在 $R \geq x \geq 0$ 区域内讨论 \vec{N} 的方向。

参考题解图， P 在 x 坐标对应位置处时，有

$$N = \frac{mv^2}{R} - qE \cos \phi \quad (2分) \quad (5)$$

开始时 $x=0$ ， $\cos \phi = 0$ ， v 也取极大，对应 N 为最大，有

$$N_{\max} = \frac{mv^2}{R} = \frac{2E_{k0}}{R} > 0 \quad (1分) \quad (6)$$

而后 x 增大， mv^2/R 减小， $qE \cos \phi$ 增大， N 减小。

当 $x=R$ 时， mv^2/R 达最小， $qE \cos \phi = qE$ 达最大，此时 N 达最小值，记为 N_{\min} 。由此时

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} E_{k0}, \quad qE = E_{k0}/2R$$

$$\text{得} \quad N_{\min} = \frac{E_{k0}}{R} - \frac{E_{k0}}{2R} = \frac{E_{k0}}{2R} > 0 \quad (3分) \quad (7)$$

即得

$R \geq x \geq 0$ 区域内 $N > 0$ ， \vec{N} 径向朝里。

由对称性可知，在 $2R \geq x \geq R$ 区域内仍有 $N > 0$ ， \vec{N} 径向朝里。

结论：在 $2R \geq x \geq 0$ 范围内， \vec{N} 始终是径向朝里的；

不存在 \vec{N} 是径向朝外的 x 取值区域。 (2分)

14. (15分)

$$(1) Nd \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ 公式。} \quad (3分)$$

(2) 双缝干涉强度分布取极小值的 λ 满足下式

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \text{ (注意 } m \neq k \times 2 \text{)} \quad (2分)$$

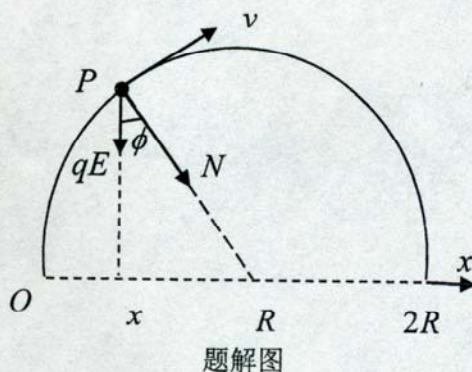
屏幕上 $x = 3.00 \text{ mm}$ 处对应的衍射角

$$\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = x/f \quad (2分)$$

$\lambda_1 = 4000 \text{ \AA}$ 对应的 m_1 :

$$m_1 = 2d \frac{x}{f} / \lambda_1 = 2 \times 1.0 \times 10^{-3} \times 3.0 \times 10^{-3} / (1.0 \times 4000 \times 10^{-10}) = \frac{60}{4} = 15$$

$\lambda_2 = 7000 \text{ \AA}$ 对应的 m_2 :



$$m_2 = 2d \frac{x}{f} / \lambda_2 = 2 \times 1.0 \times 10^{-3} \times 3.0 \times 10^{-3} / (1.0 \times 7000 \times 10^{-10}) = \frac{60}{7} = 8.57$$

得

$$m \text{ 可取值: } 15, 13, 11, 9 \text{ (不取“—”值)} \quad (4 \text{ 分})$$

故小孔处缺少光的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= 2d \frac{x}{f} / m = \frac{2 \times 1.0 \times 10^{-3} \times 3.00 \times 10^{-3}}{1.0 \times m} \times 10^{10} \text{ \AA} \\ &= \frac{60}{m} \times 10^3 \text{ \AA} \Big|_{m=15,13,11,9} \\ &= \begin{cases} 4000 \text{ \AA} \\ 4615 \text{ \AA} \\ 5455 \text{ \AA} \\ 6667 \text{ \AA} \end{cases} \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

15. (20 分)

在图示惯性系中, 凡涉及角动量定理的内容, 均取刚体质心 C 尚未运动时在此惯性系中所在点为参考点。碰撞前后可列下述三个动力学守恒方程:

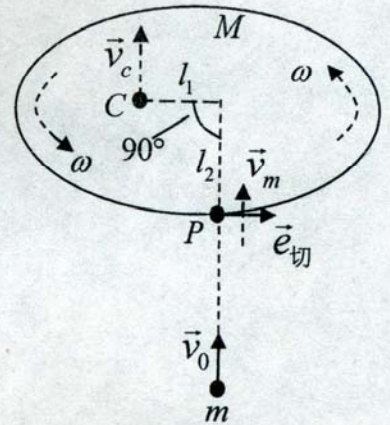
$$Mv_C + mv_m = mv_0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$I_C \omega + l_1 m v_m = l_1 m v_0 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3 \text{ 分})$$

引入参量 γ 、 α , 使得

$$M = \gamma m, \quad I_C = \alpha l_1 m \quad \begin{cases} \gamma: \text{纯数} \\ \alpha: \text{含长度单位} \end{cases}$$



上述三式可化简成

$$v_m = v_0 - \gamma v_C \quad (1)$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha} (v_0 - v_m) = \frac{\gamma}{\alpha} v_C \quad (2)$$

$$\gamma v_C^2 + \alpha l_1 \omega^2 + v_m^2 = v_0^2 \quad (3)$$

将 (1)、(2) 式代入 (3) 式, 得

$$\gamma v_C^2 + \frac{l_1}{\alpha} \gamma^2 v_C^2 + (v_0 - \gamma v_C)^2 = v_0^2$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{l_1 \gamma}{\alpha} + \gamma \right) v_C = 2v_0$$

解得

$$v_C = 2v_0 / \left(1 + \frac{l_1 \gamma}{\alpha} + \gamma \right) \quad (4)$$

代入 (2) 式, 得

$$\omega = 2\gamma v_0 / \alpha \left(1 + \frac{l_1 \gamma}{\alpha} + \gamma \right) \quad (5)$$

(4) 式再代入 (1) 式, 得

$$v_m = \frac{1 + \frac{l_1 \gamma}{\alpha} - \gamma}{1 + \frac{l_1 \gamma}{\alpha} + \gamma} v_0 \quad (6)$$

(或简称为

$$v_c = \frac{2\alpha v_0}{\alpha + l_1 \gamma + \alpha \gamma}, \quad \omega = \frac{2\gamma v_0}{\alpha + l_1 \gamma + \alpha \gamma}, \quad v_m = \frac{\alpha + l_1 \gamma - \alpha \gamma}{\alpha + l_1 \gamma + \alpha \gamma} v_0)$$

质点与刚体 P 部位在 \bar{v}_0 方向线上的碰后分离速度大小为

$$(v_c + \omega l_1) - v_m = \frac{2\alpha + 2\gamma l_1 - (\alpha + l_1 \gamma - \alpha \gamma)}{\alpha + l_1 \gamma + \alpha \gamma} v_0 = v_0 \quad (12 \text{ 分})$$

即等于在 \bar{v}_0 方向上的碰前接近速度大小。

16. (20 分)

对充电过程完成, 电键 K 未断开的初态, 引入下述物理量, 其含义不言自明。

$$C_0 = \epsilon_0 S / d, \quad Q_0 = C_0 U_0, \quad W_0 = \frac{1}{2} Q_0 U_0 = Q_0^2 / 2C_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2$$

(1) K 断开后, 介质块进入过程中, 电容器极板电量始终为 Q_0 , 极板间电压将从 U_0 开始变化。

(1.1) 介质块全部进入后, 相应地写出下述物理量:

$$C = \epsilon_r C_0, \quad Q = Q_0, \quad U = U_0 / \epsilon_r, \quad W = W_0 / \epsilon_r$$

由功能关系, 得

$$A_1 = W - W_0 = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) W_0 < 0, \quad W_0 \text{ 表达式见前} \quad (4 \text{ 分})$$

即过程中 \bar{F} 作负功, 故 \bar{F} 为方向朝左的拉力, 避免介质块被电场力快速吸入。

(1.2) 参考题解图, 有

$$C_{\text{左}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \frac{x}{l} S}{d} = \frac{\epsilon_r S \epsilon_0 x}{d l} = \frac{\epsilon_0 x}{l} C_0$$

$$C_{\text{右}} = \frac{\epsilon_0 \frac{l-x}{l} S}{d} = \frac{l-x}{l} C_0$$

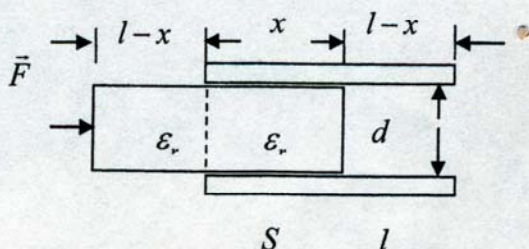
$$C_x = C_{\text{左}} + C_{\text{右}} = \frac{(\epsilon_r - 1)x + l}{l} C_0 \quad W_x = Q_0^2 / 2C_x = \frac{Q_0^2}{2C_0} \frac{l}{(\epsilon_r - 1)x + l} = \frac{l}{(\epsilon_r - 1)x + l} W_0$$

$x \rightarrow x + dx$ 之过程中静电能增量为

$$dW = \frac{-(\epsilon_r - 1)l}{[(\epsilon_r - 1)x + l]^2} W_0 \cdot dx$$

由功能关系, 得

$$F_x dx = dW \Rightarrow F_x = \frac{-(\epsilon_r - 1)l W_0}{[(\epsilon_r - 1)x + l]^2}$$



题解图

即此时

$$\vec{F} \left\{ \begin{array}{l} \text{方向朝左 (实为拉力)} \\ \text{大小为 } F = \frac{(\epsilon_r - 1)lW_0}{[(\epsilon_r - 1)x + l]^2} \end{array} \right\} \quad (6\text{分})$$

(2) K 未断开, 介质块缓慢进入过程中, 极板电量缓慢变化 (类似于热学中的准静态过程), 电路中电流强度 I 及电流密度 \vec{j} 均可略, 电阻 R 内的电场强度 $\vec{E} = \rho\vec{j}$ (ρ : 电阻率) 也可略。无论从宏观上或微观上考察, 都是电阻两端电势差为零, 电阻又消耗能量。全过程中, 电源电压 U_0 全部加在电容上, 电源通过流出电量做功输出的能量不会被电阻消耗一部分, 而全部输向电容。

(2.1) 介质块全部进入后, 相应地写出下述物理量:

$$C = \epsilon_r C_0, \quad Q = \epsilon_r Q_0, \quad U = U_0, \quad W = \epsilon_r W_0$$

由功能关系, 得

$$\begin{aligned} A_2 + A_{\text{电源}} &= W - W_0 = (\epsilon_r - 1)W_0, \quad A_{\text{电源}} = (Q - Q_0)U_0 = (\epsilon_r - 1)Q_0U_0 = 2(\epsilon_r - 1)W_0 \\ &\Rightarrow A_2 = -(\epsilon_r - 1)W_0 < 0, \quad W_0 \text{ 表达式见前} \quad (4\text{分}) \end{aligned}$$

\vec{F} 作负功, \vec{F} 方向朝左, 实为拉力, 避免介质块被电场力快速吸入。

(2.2) 根据题解图, 有

$$C_x = \frac{(\epsilon_r - 1)x + l}{l} C_0, \quad W_x = \frac{1}{2} C_x U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon_r - 1)x + l}{l} C_0 U_0^2 = \frac{(\epsilon_r - 1)x + l}{l} W_0$$

$x \rightarrow x + dx$ 之过程中静电能增量为

$$dW = \frac{\epsilon_r - 1}{l} W_0 \cdot dx$$

$x \rightarrow x + dx$ 之过程中电源做功量为

$$\begin{aligned} dA_{\text{电源}} &= U_0 dQ_x, \quad Q_x = C_x U_0 = \frac{(\epsilon_r - 1)x + l}{l} C_0 U_0, \quad dQ_x = \frac{(\epsilon_r - 1)dx}{l} C_0 U_0 \\ &\Rightarrow dA_{\text{电源}} = \frac{(\epsilon_r - 1)dx}{l} C_0 U_0^2 = 2 \frac{(\epsilon_r - 1)}{l} W_0 dx \end{aligned}$$

由功能关系, 得

$$F_x dx = dW - dA_{\text{电源}} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{l} W_0 dx \Rightarrow F_x = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{l} W_0$$

即此时

$$\vec{F} \left\{ \begin{array}{l} \text{方向朝左} \\ \text{大小为 } F = |F_x| = \frac{(\epsilon_r - 1)}{l} W_0 \quad (\vec{F} \text{ 为恒力}) \end{array} \right\} \quad (6\text{分})$$

17. (20分)

(1) 圆筒系中 P 被点亮事件的空时坐标为 $x'_{P0} = l_0, t'_{P0} = 0$, 洛伦兹变换, 得

$$t_{P0} = \frac{t'_{P0} + \frac{v}{c^2} x'_{P0}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v}{c^2} l_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1) \quad (2\text{分})$$

顺便给出
$$x_{P0} = \frac{x'_{P0} + vt'_{P0}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2)$$

t_{p0} 时刻从 P 射出的光束中, 沿 x 轴负方向的一束光线能最早到达 $O-yz$ 屏幕, 照亮处即为中心点 O 。参照题解图 1, 可得

$$t_0 = t_{p0} + \frac{x_{p0}}{c} = \frac{\frac{v}{c^2} l_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{l_0}{c}$$

$$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{l_0}{c} \quad (3) \quad (3 \text{分})$$

(2) 如题解图 2 所示, 设 P 在某个 t_p 时刻朝 y 轴

发出一条光线, 与 t_1 时刻到达 $O-yz$ 屏幕上 $y=r_{12}$ 点; P 在而后 $t_p + \Delta t$ 时刻朝 y 轴发出的两条光线, 其一于 t_2 时刻也到达 $y=r_{12}$ 点, 其二于 t_3 时刻到达 $y=r_3=r_{12} + \Delta r$ 点, 则必有

$$t_3 > t_2 > t_1$$

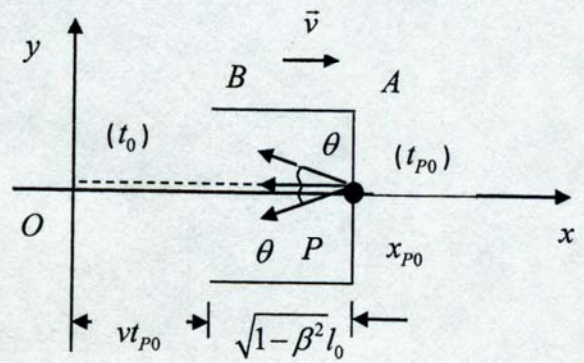
据此可知, P 在 t_p 时刻发出的光束中, 题解图 1 中发射角 $\theta=0$ 的光线最先于 t_0 时刻到达 $O-yz$ 屏幕上的 O 点。而后, $\theta > 0$ 的光线相继达到屏幕, 使得亮区半径 r 连续增大。此过程中, t 时刻亮区边界点的入射光线必定是 P 在 t_{p0} 时刻发出的光线, 不会是 P 在 t_{p0} 后发出的光线。如此继续下去, 直到某个上限 θ_m 对应的光线刚好未被圆筒内壁挡住, 能于某个 t_{m1} 时刻到达 $O-yz$ 屏幕, 构成 t_{m1} 时刻亮区时刻边界点, 对应的半径记为 r_{m1} 。 P 在 t_{p0} 时刻发出的光束中 $\theta > \theta_m$ 的光线均被圆筒内壁挡住, 对亮区 r 的增大无贡献。

t_{m1} 以后, 任一时刻形成亮区边界的入射光线, 只能是 P 在 t_{p0} 之后某一相应时刻 t_p 发出的光束中 $\theta = \theta_m$ 对应的光线。

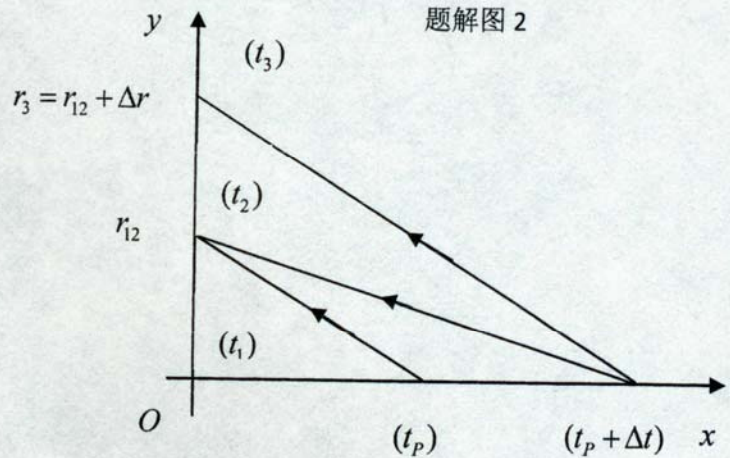
综上所述, 可将 t 时刻亮区圆半径 r 随 t 增大过程分为两个时段进行讨论。

时段 1: $t_{m1} \geq t \geq t_0$

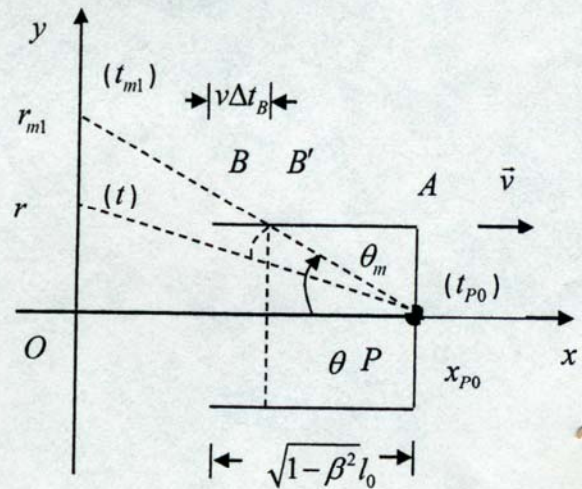
P 在 t_{p0} 时刻发出的光束中, 出射角为 θ_m 和某一个 $\theta < \theta_m$ 的两条光线如题解图 3 所示。 θ_m 光线从 P 射到圆筒 B 端经过时间 Δt_B , 此时 B 端已从原位置右行到虚直线所示 B' 位置。同过图中所画虚线小圆弧, 很容易看出, 在 $t_{p0} + \Delta t_B$ 时刻 $\theta < \theta_m$ 光线所达到位置在 B' 下方, 此光线不会被圆筒内壁挡住, 可到达 $O-yz$ 屏幕。



题解图 1



题解图 2



题解图 3

设 θ 角光线于 $t = t_{p0} + \Delta t$

时刻达到 $O-yz$ 屏幕, 对应亮区半径为 r , 则有

$$r^2 = c^2 (\Delta t)^2 - x_{p0}^2 = c^2 (t - t_{p0})^2 - x_{p0}^2$$

即得

$$t_{m1} \geq t \geq t_0 \text{ 时段: } r = \sqrt{c^2 (t - t_{p0})^2 - x_{p0}^2},$$

$$r_{m1} \geq r \geq 0 \quad (4) \quad (4 \text{ 分})$$

t_{p0} 、 x_{p0} : 见 (1)、(2) 式

下面依次确定 θ_m 、 t_{m1} 和 r_{m1} 。

θ_m 的确定:

据题解图 3, 有

$$c \cdot \sin \theta_m \cdot \Delta t_B = R, \quad c \cdot \cos \theta_m \cdot \Delta t_B = \sqrt{1 - \beta^2} l_0 - v \Delta t_B$$

$$\Rightarrow \cos \theta_m + \beta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\gamma} \sin \theta_m, \quad \gamma = \frac{R}{l_0}$$

由题设 $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$

即得

$$(\cos \theta_m + \beta)^2 = \sin^2 \theta_m = 1 - \cos^2 \theta_m \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \theta_m + 2\beta \cos \theta_m - (1 - \beta^2) = 0$$

解得

$$\begin{cases} \cos \theta_m = \frac{1}{2} (\sqrt{2 - \beta^2} - \beta) \\ \text{或 } \theta_m = \arccos \left[\frac{1}{2} (\sqrt{2 - \beta^2} - \beta) \right] \end{cases} \quad (6)$$

t_{m1} 的确定:

光从 P 发出达到屏幕经时 Δt_m , 则有

$$t_{m1} = t_{p0} + \Delta t_m, \quad \Delta t_m = x_{p0} / c \cos \theta_m$$

将 (1)、(2)、(6) 式代入, 得

$$t_{m1} = \frac{l_0}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \left(\beta + \frac{2}{\sqrt{2 - \beta^2} - \beta} \right) \quad (7) \quad (2 \text{ 分})$$

r_{m1} 的确定:

$$r_{m1} = \sqrt{(c \Delta t_m)^2 - x_{p0}^2} = \sqrt{\frac{x_{p0}^2}{\cos^2 \theta_m} - x_{p0}^2} = \tan \theta_m \cdot x_{p0}$$

由 (5)、(6) 式, 并作分母有理化处理, 得

$$\tan \theta_m = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = \frac{\cos \theta_m + \beta}{\cos \theta_m} = \frac{\sqrt{2 - \beta^2} + \beta}{\sqrt{2 - \beta^2} - \beta} = \frac{1 + \beta \sqrt{2 - \beta^2}}{1 - \beta^2}$$

与 (2) 式一起代入上式, 得

$$r_{m1} = \frac{1 + \beta\sqrt{2 - \beta^2}}{(1 - \beta^2)^{3/2}} l_0 \quad (8) \quad (2 \text{分})$$

时段 2: $t > t_{m1}$

如题解图 4 所示, 在 $t_p > t_{p0}$ 时刻处于 $x_p = vt_p + \sqrt{1 - \beta^2} l_0$ 位置的点光源 P 发出的 $\theta = \theta_m$ 光线, 经 Δt 时间间隔射到 $O - yz$ 屏幕上, 形成可用 $y = r$ 标记的亮区的新边界点。由方程

$$t = t_p + \Delta t, \quad c \cdot \cos \theta_m \cdot \Delta t = vt_p + \sqrt{1 - \beta^2} l_0$$

得

$$t_p = \frac{1}{\cos \theta_m + \beta} \left(\cos \theta_m \cdot t - \sqrt{1 - \beta^2} \frac{l_0}{c} \right)$$

$$\Delta t = \frac{1}{\cos \theta_m + \beta} \left(\beta t + \sqrt{1 - \beta^2} \frac{l_0}{c} \right)$$

继而可得

$$\begin{aligned} x_p &= vt_p + \sqrt{1 - \beta^2} l_0 = c \cdot \sin \theta_m \cdot \Delta t \\ &= c \cdot \sin \theta_m \frac{1}{\cos \theta_m + \beta} \left(\beta t + \sqrt{1 - \beta^2} \frac{l_0}{c} \right) \end{aligned}$$

将 $\sin \theta_m = \cos \theta_m + \beta$ 代入后, 即得

$$t > t_{m1} \text{ 时段: } r = vt + \sqrt{1 - \beta^2} l_0 \quad r > r_{m1} \quad (9) \quad (5 \text{分})$$

t_{m1} 、 r_{m1} : 见 (7)、(8) 式

(令 (9) 式中 $t \Rightarrow t_{m1}$ 即可验证 $r \Rightarrow r_{m1}$, 略。)

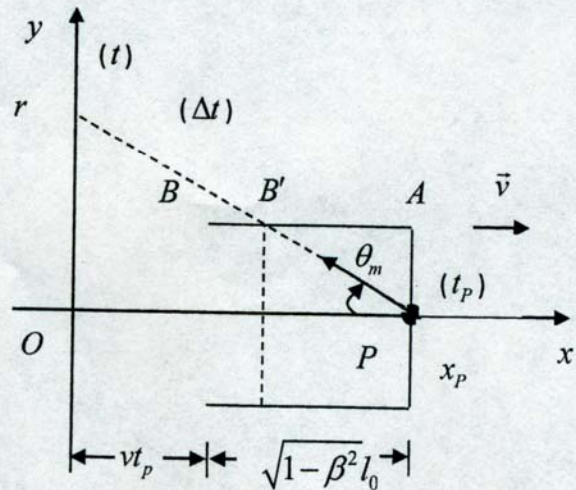
(3) $\gamma = 0.6$ 、 $\beta = 0.8$ 时, 可得

$$t_{p0} = \frac{4 l_0}{3 c}, \quad x_{p0} = \frac{5}{3} l_0, \quad t_0 = 3 \frac{l_0}{c},$$

$$\theta_m = 79.4^\circ, \quad t_{m1} = 10.44 \frac{l_0}{c}, \quad r_{m1} = 8.95 l_0$$

$r \sim t$ 函数关系可表述为

$$\left. \begin{aligned} 10.44 \frac{l_0}{c} \geq t \geq 3 \frac{l_0}{c} \text{ 时段: } 8.95 l_0 \geq r &= \sqrt{c^2 \left(t - \frac{4 l_0}{3 c} \right)^2 - \left(\frac{5}{3} l_0 \right)^2} \geq 0 \\ t > 10.44 \frac{l_0}{c} \text{ 时段: } r &= 0.8 ct + 0.6 l_0 > 8.95 l_0 \end{aligned} \right\} (10) \quad (2 \text{分})$$



题解图 4