第十五章　狭义相对论

第一节　洛仑兹变换

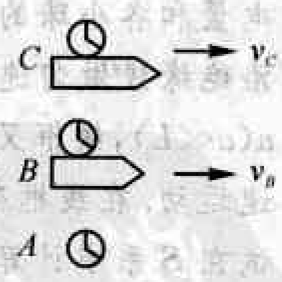
1. 一列火车以速度 V 相对地面运动. 如果地面上的人测得，某光源发出的闪光同时到达车厢的前壁和后壁，那么按照火车上人的测量，闪光先到达前壁还是后壁？火车上的人怎样解释自己的测量结果？

2. A,B,C 是三个完全相同的时钟，A 放在地面上，B,C 分别放在两个火箭上，以速度 V_B,V_C 朝同一方向飞行，$V_B<V_C$. 地面上的观察者认为哪个时钟走得最慢？哪个走得最快？

3. 以 8km/s 的速度运行的人造卫星上一只完好的手表走过了 1min，地面上的人认为它走过这 1min"实际"上花了多少时间？通过这个题目我们可以看到，即使对于人造卫星这样飞快的速度，相对论效应也是微不足道的.

4. 一枚静止时长 30m 的火箭以 3km/s 的速度从观察者的身边掠过，观察者测得火箭的长度应为多少？火箭上的人测得火箭的长度应为多少？如果火箭的速度为光速的 1/2 呢？

参考答案



1. **分析与解**　前壁，火车上的人认为两闪光非同时发生，或发光点并不在火车中央.

2. **分析与解**　物体运动时胀尺缩，所以 C 钟最慢，A 钟最快.

3. **分析与解**　$\Delta t'=\Delta t/\sqrt{1-\beta^2}$，$v=8000\text{m/s}$　$\Rightarrow\Delta t'=(1+3.56\times10^{-10})\text{min}$.

4. **分析与解**　若以 3km/s 过，火箭上人认为 $l_0=30\text{m}$，观察者 $l=l_0\sqrt{1-\beta^2}=(30-1.5\times10^{-9})\text{m}$，

若以 $\frac{c}{2}$ 过，$l_0=30\text{m}$，$l'=l_0\sqrt{1-\beta^2}=15\sqrt{3}\text{m}$.

第二节 时间和长度的相对论效应

1. 一辆车轮半径为 R 的“汽车”以接近光速的恒定速度 v 相对于地面沿直线运动. 一个相对于地面静止的观察者所看到的汽车车轮形状是什么样的? 并加以证明.

2. 一艘宇宙飞船以 0.8c 的速度于中午飞经地球, 此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点. (1)按飞船上的时钟于午后 12 点 30 分飞经一星际宇航站, 该站相对于地球固定, 且该宇航站上的时钟指示的是地球时间. 试问飞船到达该站时宇航站的时钟所指的时刻? (2)试问按地球上的坐标测量, 宇航站离地球多远? (3)于飞船时间午后 12 点 30 分从飞船向地球发送无线电信号, 试问地球上的观察者何时(按地球时间)接收到该信号? (4)若地球上的观察者在接收到信号后立即发出回答信号, 试问飞船何时(按飞船时间)接收到回答信号?

3. 设有一 π^+ 介子, 在静止下来后, 衰变成 μ^+ 子和中微子 ν, 三者的静止质量分别为 m_π, m_μ 和零. 求 μ^+ 子和中微子的动能.

4. 太空火箭(包括燃料)的初始质量为 M_0, 从静止起飞, 向后喷出的气体相对火箭的速度 u 为常量. 任意时刻火箭速度(相对地球)为 v 时火箭的静止质量为 m_0. 忽略引力影响, 试求比值 $\dfrac{m_0}{M_0}$ 与速度 v 之间的关系.

5. 如图 15-2-4 所示, 有一均匀带负电的正方形绝缘线框 $ABCD$, 每边边长为 L, 线框上串有许多带正电的小球(看成质点), 每个小球的带电量为 q, 每边的总带电量为零(即线框的带电量和各小球的带电量互相抵消). 今各小球相对线框以速率 u 沿绝缘线做匀速运动, 在线框参考系中测得相邻两小球的间距为 $a(a \ll L)$, 线框又沿 AB 边以速率 v 在自身平面内相对 S 系做匀速运动. 在线框范围内存在一均匀电场 E, 其方向与线框平面的倾角为 θ. 考虑相对论效应, 试在 S 系中计算以下各量.

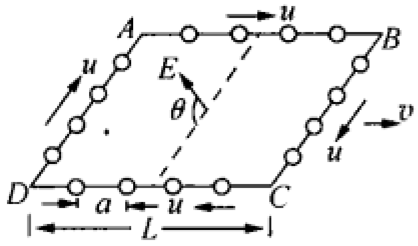


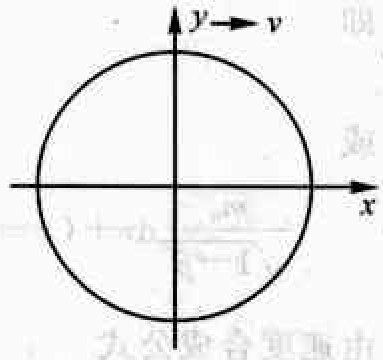
图 15-2-4

(1)线框各边上相邻两小球的间距 $a_{AB}, a_{BC}, a_{CD}, a_{DA}$;

(2)线框各边的净电量 $Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD}, Q_{DA}$;

(3)线框和小球系统所受的电力矩大小; (4)线框和小球系统的电势能.

参考答案



1. **分析与解** 椭圆，证明如下：如图所示以车为参照系取一坐标，则车轮方程为：

$x^2+y^2=R^2$， ①

换到地面参照系，取车轮上一点(x,y)，

$$x'=x\sqrt{1-(v/c)^2},\ y'=y$$

代入①式 $\Rightarrow \dfrac{x'^2}{1-(v/c)^2}+y'^2=R^2$，即为椭圆方程，得证.

2. **分析与解** (1)$t'_1=t_1/\sqrt{1-(v/c)^2}=50$ 分钟，所以所指时刻为 12 点 50 分

(2)$s=vt'_1=7.2\times10^{11}\,\text{m}=7.2\times10^{8}\,\text{km}$

(3)$t'_2=\dfrac{s}{c}=2400s=40$ 分，所以地球时间 13 点 30 分收到信号

(4)$t_2=t'_2\sqrt{1-(v/c)^2}=24$ 分，设以飞船时间，自地球发信号到接信号用时 t_3.

$$v(t_1+t_2)+vt_3=ct_3 \quad \Rightarrow t_3=\frac{v(t_1+t_2)}{c-v}=216\text{ 分钟}.$$

所以 $t_2+t_3=240$ 分钟$=4$ 小时，

所以飞船接到信号为 16 点 30 分.

3. **分析与解** 由动量守恒：$\dfrac{hv}{c}=m'_\mu v_1$，$m'_\mu=m_\mu/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

由能量守恒：$m_\pi c^2=m'_\mu c^2+hv$.

所以 $E_{k\mu}=m'_\mu c^2-m_\mu c^2=\dfrac{(m_\mu-m_\pi)^2c^2}{2m_\pi}$

$E_{k\nu}=hv=\dfrac{(m_\pi^2-m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$.

4. **分析与解** 设在地球参照系中，时刻 t 火箭的质量为 m，火箭的速度为 v，m 与相应静止质量 m_0 之间的关系为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中 $\beta=\dfrac{v}{c}$，火箭动量为 mv，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内喷出气体的质量为

$$|\mathrm{d}m|=-\mathrm{d}m=-\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

喷出气体的速度(相对地球)为 $v_气$，火箭速度增量为 $\mathrm{d}v$，在$(t+\mathrm{d}t)$时刻，系统的总动量为$[(m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v)+v_气|\mathrm{d}m|]$. 由动量守恒，有

$$mv=(m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v)+v_气|\mathrm{d}m|,$$

即

$$m\mathrm{d}v+(v_{气}-v)|\mathrm{d}m|=0,$$

或

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+(v-v_{气})\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=0. \tag{1}$$

由速度合成公式 $$v_{气}=\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}.$$

代入(1)式,得 $$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+\frac{u(1-\beta^2)}{1-\frac{u}{v}\beta^2}\left[\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{m_0\frac{v}{c^2}\mathrm{d}v}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right]=0.$$

化简后,得 $$m_0\mathrm{d}v=u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0.$$

或 $$m_0c\mathrm{d}\beta=u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0,$$

分离变量,得 $$\frac{\mathrm{d}m_0}{m_0}=\frac{c}{u}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta^2-1},$$

积分,得 $$\ln m_0=\frac{c}{2u}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}+c. \tag{2}$$

初条件为 $t=0$ 时,$\beta=0$,$m_0=M_0$,故　　$C=\ln M_0$

代入(2)式,得 $$\ln\frac{m_0}{M_0}=\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u}$$

即 $$\frac{m_0}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u}. \tag{3}$$

上述结果是瞬间关系,即火箭的瞬时静止质量 m_0 与同一瞬间的速度 $v=\beta c$ 之间的关系,当火箭加速时,向后喷气,式中的 $u>0$,火箭减速时,若速度变为零(即 $\beta=0$)时的终质量为 M'_0,则(3)式中的积分常量 $C=\ln M'_0$,于是有

$$\frac{m_0}{M'_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u}. \tag{4}$$

式中 $u<0$(因向前喷气).

5. **分析与解**　首先建立坐标系,设进行观测的坐标系为 S,绝缘线框静止的坐标系为 S',小球静止的坐标系为 S'',各坐标系的 x 轴与 AB 边一致,求 a_{AB} 时,首先将 S' 系中的小球间距根据洛仑兹收缩公式转换成 S'' 系中的间距,再由相对论速度合成法则求出小球(即 S'' 系)相对 S 系的运动速度,再次利用洛仑兹收缩公式,将 S'' 系中的间距转换到 S 系中,其他各边的间距可用同法求得.

计算各边净带电量时,必须注意以下事实,即带电量是交换不变量,所以绝缘线的带电量不因坐标变换而改变.但计算小球总的带电量时,必须考虑边长的洛仑兹收缩和小球间距的改变,前者仅与速度 v 有关,后者不仅与 v,而且还与 u 有关,故两者对小球带电量的影响不能抵消,从面出现不为零的净电荷.

各边的净电量算出后,电力矩和电势能就容易求得.

(1)先算 a_{AB},设在 S''系中相邻两小球的间距为 a_0,它是静止长度,题给间距 a 是 S'系中的间距,S'和 S''的相对速度为 u,根据洛仑兹收缩公式,有

$$a_0=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

按速度合成法则,小球(即 S''系)相对 S 系的速度为

$$u_{AB}=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}, \tag{2}$$

把 S''系中的间距转换到 S 系,得出 S 系中的间距为

$$a_{AB}=\sqrt{1-\frac{u_{AB}^2}{C^2}}\cdot a_0.$$

把(1)、(2)式代入,化简后得

$$a_{AB}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}}a. \tag{3}$$

计算 a_{CD} 时,因小球相对线框的速度反向,故只需把(3)式中的 u 用 $-u$ 代替即可,得

$$a_{CD}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}a.$$

由于 BC 和 DA 边与线框的运动方向垂直,故线度测量在 S'与 S 系间无洛仑兹收缩,所以

$$a_{BC}=a_{DA}=a.$$

(2)在 S'系中每边绝缘线上的电量为 $Q_L=-\frac{L}{a}q$,

式中 $\frac{L}{a}$ 为各边上的小球数,因电量是变换不变量,故在 S 系中也是该值.

先算 Q_{AB},在 S 系中边长为 $L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$,小球间距为 a_{AB},故 AB 边上小球带电总量为

$$Q_{AB,球}=\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{AB}}q,$$

把(3)式代入,得 $$Q_{AB,球}=\frac{L}{a}\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)q,$$

于是 AB 边净电量为 $$Q_{AB}=Q_L+Q_{AB,球}=\frac{Luv}{ac^2}q.$$

同理可得 CD 边上小球的带电总量为

$$Q_{CD,球}=\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{CD}}q=\frac{L}{a}\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)q.$$

CD 边净电量为 $$Q_{CD}=Q_L+Q_{CD,球}=-\frac{Luv}{c^2}q.$$

在 S 系中测得 BC 和 DA 的边长仍为 L，小球间距仍为 a，故

$$Q_{BC,球}=Q_{DA,球}=\frac{L}{a}q.$$

这两条边的净电量为

$$Q_{BC}=Q_{DA}=Q_L+\frac{L}{a}q=0.$$

总之，AB 和 CD 两边所带净电量等量异号，而 BC 和 DA 两边不带电（正、负电之和为零）.

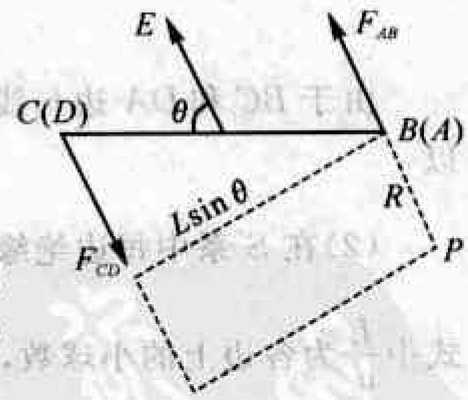
(3) AB 和 CD 边所受电场力分别为

$$\boldsymbol{F}_{AB}=Q_{AB}\boldsymbol{E}=\frac{Luv}{ac^2}q\boldsymbol{E}.$$

$$\boldsymbol{F}_{CD}=Q_{CD}\boldsymbol{E}=-\frac{Luv}{ac^2}q\boldsymbol{E}.$$

上述两力对线框形成力偶矩，其大小为

$$M=|F_{AB}|L\sin\theta=\frac{L^2uv}{ac^2}qE\sin\theta.$$



(4) 因 AB 和 CD 边均与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，故 AB 和 CD 边均处于 $\boldsymbol{E}$ 场的等势位置，设它们的电势分别为 U_{AB} 和 U_{CD}，则线框的电势能为

$$W=Q_{AB}U_{AB}+Q_{CD}U_{CD}.$$

为确定 U_{AB} 和 U_{CD}，如图所示，建立与 E 垂直的参照平面 P，AB 边与 P 平面的垂直距离为 R，并规定 P 平面的电势为零，则 AB 和 CD 边的电势为

$$U_{AB}=-ER, U_{CD}=-E(R+L\cos\theta).$$

故线框电势能为 $$W=-ERQ_{AB}-E(R+L\cos\theta)Q_{CD}.$$

因 $Q_{AB}=-Q_{CD}$，代入，得 $$W=ELQ_{AB}\cos\theta=\frac{L^2uv}{c^2a}\cos\theta.$$

第三节 综合训练

1. 已知隧道 A_1B_1 的长度为 L_1，火车 A_2B_2 的静长为 L_2，$L_2>L_1$.(1)如图 15-4-2 所示，设火车 A_2B_2 以匀速率 v 驶进隧道，使得地面 S_1 系中的观察者发现 A_2 与 A_1 相遇时，B_2 与 B_1 也相遇. 试求 v 值；(2)引入随火车一起运动的惯性系 S_2，在 S_2 系中的观察者必定认为 A_2 与 A_1 先相遇，而后 B_2 与 B_1 相遇. 试求其间的时间间隔 Δt_2.

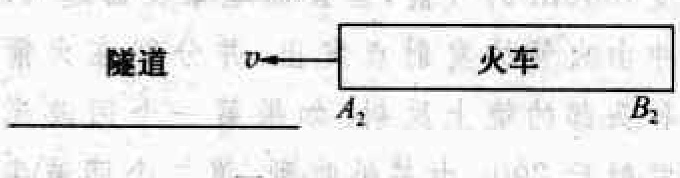


图 15-4-2

2. 一矩形平行平板电容器充电后与电源断开，沿矩形的一边相对于地面以恒定速度 v（接近光速）运动. 确定相对于地面上静止的观察者而言，电容器二极板间的电场是多少？已知电容器在地面上静止时二极板间的电场为 E_0.

3. 如图所示，在某恒星参照系 S 中，飞船 A 和飞船 B 以相同速率 βc（c 为真空中光速）做匀速直线运动. 飞船 A 的运动方向与 $+x$ 方向一致，而飞船 B 的运动方向与 $-x$ 方向一致. 两飞船轨迹之间的垂直距离为 d. 当 A 和 B 靠得最近时，从 A 向 B 发出一细束无线电联络信号. 试问：

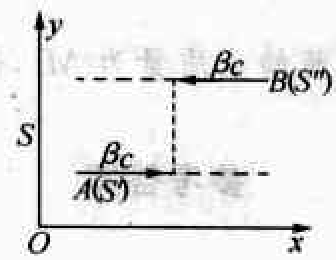


图 15—4—3

(1)为使 B 能接收到信号，A 中的宇航员认为发射信号的方向应与自己的运动方向成什么角？

(2)飞船 B 接收信号时，B 中宇航员认为自己与 A 飞船相距多少？

4. 如图所示，平面反射镜 M 固定在 S' 系的 $x'y'$ 平面内，其法线方向与 x' 轴一致，反射镜相对 S 系以速度 v 沿法线做平移运动. 试求光在反射镜上反射时，入射角与反射角所遵从的关系.

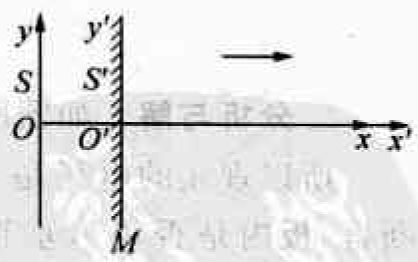


图 15-4-4

5. 如图 15-4-5(a)所示，波长为 λ_0 的光子与一运动的自由电子相碰，碰后电子静止，原光子消失，产生一个波长为 λ_1 的光子，后者的运动方向与原光子的运动方向成 $\theta=60°$ 角. 之后，此光子又与一个静止的自由电子相碰，碰后此光子消失，同时产生一个波长为 $\lambda_2=0.125\text{nm}$ 的光子. 后者的运动方向又与碰前光子的运动方向成 $\theta=60°$ 角，如图 15-4-5(b)所示. 试求第一个运动电子的德布罗意波长.

6. 波长为 λ 的 X 射线与静止的自由电子碰撞后，在与入射光束成 θ 角的方向上，可以探测到波长为 λ' 的散射光的现象叫康普顿效应，亦称康普顿散射，康普顿散射与光电效应现象均表明电磁波的粒子性. 在康普顿散射中，X 光子与电子在碰撞前后总动量与总能量均守恒，散射光与入射光的波长差 $\Delta\lambda$ 与康普顿波长 λ_c 的关系是 $\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta)$.(1)试证

明，在康普顿散射中光子的散射角θ与电子的散射角φ之间的关系是$\cot\dfrac{\theta}{2}=\left(1+\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\varphi$；(2)在某康普顿散射实验中，散射光线与入射光线的夹角为60°，散射光波长为0.0254nm．试求反冲电子的动能和动量．

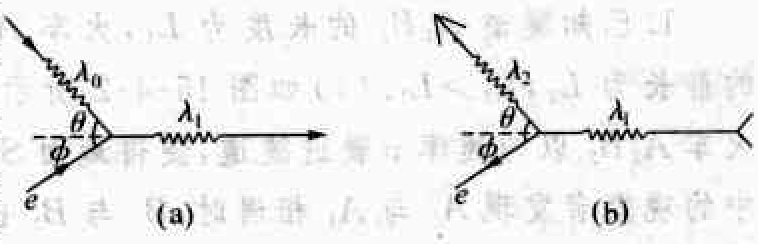


图 15-4-5

7．原长(即在相对静止的坐标系量得的长度)600m的火箭，垂直从地球表面起飞．一光脉冲由火箭的发射点发出，并分别在火箭的尾部和头部的镜上反射．如果第一个回波光脉冲在发射后200s由基地收到，第二个回波尖脉冲延迟了17.4μs才收到，试计算：(1)火箭接收到光脉冲时离基地的距离；(2)火箭相对地球的速度；(3)火箭上的观察者测量火箭头尾两镜收到光脉冲的时间差是多少？

8．光子火箭从地球起程时初始静止质量(包括燃料)为M_0，向相距为$R=1.8\times10^6$(l.y)(光年)的远方仙女座星云飞行．要求火箭在25年(火箭时间)后到达目的地，引力影响不计．(1)忽略火箭加速和减速所需时间，试问火箭的速度应为多大？(2)设到达目的地时火箭静止质量为M_0'，试问$\dfrac{M_0}{M_0'}$的最小值是多少？

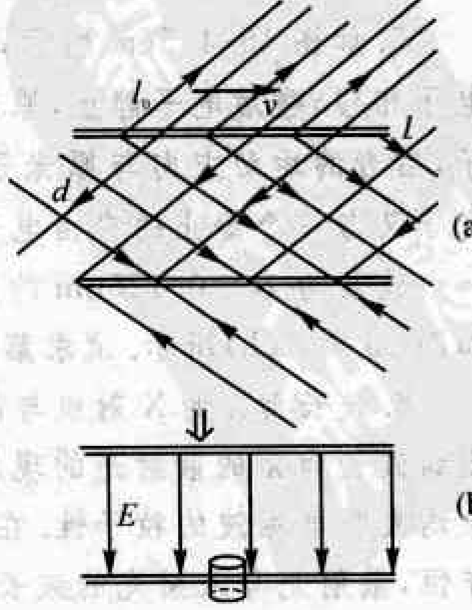
参考答案

1．分析与解　(1)$L_1=L_2\sqrt{1-(v/c)^2}\Rightarrow\dfrac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^2}\Rightarrow v=c\sqrt{1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^2}$

(2)$L'_1=L_1\sqrt{1-(v/c)^2}$，$\Delta t_2=\dfrac{L_2-L'_1}{v}=\dfrac{L_2-\dfrac{L_1^2}{L_2}}{c\sqrt{1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^2}}=\dfrac{L_2}{c}\sqrt{1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^2}$

2．分析与解　如图所示，当矩形板运动后，其上的电荷也随之运动，

所以现在的电场是一个运动的电场，我们已无法简单地断言，板内是否仍为垂直于板的匀强电场，板外是否场强为零．很显然，对于单块板而言其产生的电场线必有倾斜．



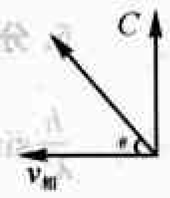
对于运动电场，库仑定律已不成立，但高斯定理仍适用．如右图(a)，设电场线有这样的倾斜，则上下板电场叠加后如右图(b)．

所以板外$E=0$，板内E仍垂直于板面．现取一如图高斯面：$E\cdot ds=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sigma'\cdot ds\Rightarrow E=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$．

又$E_0=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$，$\sigma_0\cdot l_0b=\sigma'\cdot l\cdot b$，$l=l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$

所以 $\sigma'=\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$，所以 $E=E_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

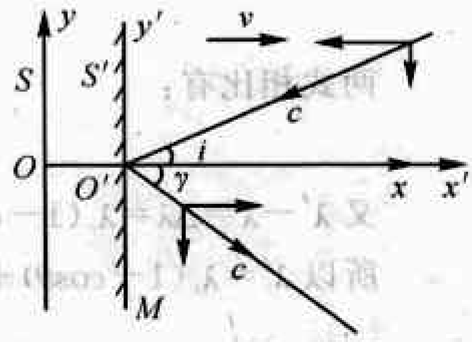
3. **分析与解** (1) $v_{相}=\dfrac{\beta c+\beta c}{1+\dfrac{\beta c}{c^2}\beta c}=\dfrac{2\beta c}{1+\beta^2}$ $\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{v_{相}}{c}=\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}$.



所以与运动方向夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{2\beta}{1-\beta^2}$.

(2) $\Delta t=\dfrac{d}{c}$， $s=\sqrt{d^2+(v_{相}\ \Delta t)^2}=d\sqrt{1+\dfrac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2}}=\dfrac{d}{1+\beta^2}\sqrt{(1+\beta^2)^2+4\beta^2}$

4. **分析与解** 对入射光线 S 系 $v_x=-c\cos i, v_y=-c\sin i$.



S' 系 $v'_x=\dfrac{v-v_x}{1-v_xv/c^2}=\dfrac{v+c\cos i}{1+v\cos i/c}$.

$v'_y=\dfrac{v_y\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1-v_xv/c^2}=\dfrac{-c\sin i\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1+v\cos i/c}$.

对反射光线 S 系 $u_x=c\cos\gamma, u_y=-c\sin\gamma$.

S' 系 $u'_x=\dfrac{v-u_x}{1-vu_x/c^2}=\dfrac{v-c\cos\gamma}{1-v\cos\gamma/c}$.

$u'_y=\dfrac{u_y\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1-vu_x/c^2}=\dfrac{-c\sin\gamma\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1-v\cos\gamma/c}$.

由反射定律有：$v'_x=-u'_x, v'_y=u'_y$.

$\Rightarrow\dfrac{v+c\cos i}{1+v\cos i/c}=-\dfrac{v-c\cos\gamma}{1-v\cos\gamma/c}$

$\dfrac{-c\sin i\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1+v\cos i/c}=\dfrac{-c\sin\gamma\ \sqrt{1-(v/c)^2}}{1-v\cos\gamma/c}$

化简得：$\dfrac{\sin i}{\cos i+\beta}=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma-\beta}$

其中 $\beta=\dfrac{v}{c}$，即为入射角与反射角所遵守的关系.

5. **分析与解** 第二次碰撞为第一次碰撞的逆过程：

所以 $\lambda_0=\lambda_2=0.125\text{nm}$.

设电子速度 v，则：$m'_e=\dfrac{m_e}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$，

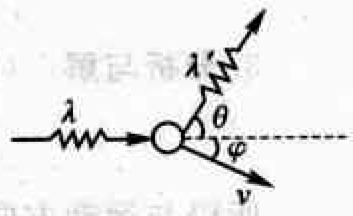
由能量守恒： $m'_ec^2+\dfrac{hc}{\lambda_0}=m_ec^2+\dfrac{hc}{\lambda_1}$

由动量守恒有：$m'_ev\cos\varphi+\dfrac{h}{\lambda_0}\cos\theta=\dfrac{h}{\lambda_1}$，$m'_ev\sin\varphi=\dfrac{h}{\lambda_0}\sin\theta$.

解得：电子动量 $p=m'_ev=\dfrac{m_ev}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=5.327\times10^{-24}\text{kg}\cdot\text{m/s}$.

所以电子德布罗意波长 $\lambda=\dfrac{h}{p}=0.1244\text{nm}$.

6. 分析与解 (1)证明:由动量守恒有:$\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta+m'_e v\cos\varphi$.



$\dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta=m'_e v\sin\varphi$, $m'_e=\dfrac{m_e}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

$$\Rightarrow\begin{cases} m'_e v\cos\varphi=\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta & ① \\ m'_e v\sin\varphi=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta & ② \end{cases}$$

两式相比有: $\tan\varphi=\dfrac{\dfrac{1}{\lambda'}\sin\theta}{\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\cos\theta}=\dfrac{\lambda\sin\theta}{\lambda'-\lambda\cos\theta}$.

又 $\lambda'-\lambda=\Delta\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta)$,

所以 $\lambda'=\lambda_c(1-\cos\theta)+\lambda$,

代入,则:$\tan\varphi=\dfrac{\lambda\sin\theta}{(\lambda+\lambda_c)(1-\cos\theta)}=\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_c}\cdot\cot\dfrac{\theta}{2}$

即 $\cot\dfrac{\theta}{2}=\left(1+\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\cdot\tan\varphi$,得证.

(2)由能量守恒有:$\dfrac{hc}{\lambda}+m_ec^2=\dfrac{hc}{\lambda'}+m'_ec^2$ ③

①、②、③式联立,解得动能 $E_K=m'_ec^2-m_ec^2=3.92\times10^{-16}\text{J}=2451.66\text{eV}$.

动量 $p=m'_ev=2.68\times10^{-23}\text{kg}\cdot\text{m/s}$.

$$\left(m'_e=\frac{m_e^2c^2+\dfrac{h}{\lambda'}\left(\dfrac{h}{\lambda'}-m_ec\right)(1-\cos\theta)}{m_ec^2-\dfrac{hc}{\lambda'}(1-\cos\theta)}\right).$$

7. 分析与解 (1)$s=c\times\dfrac{1}{2}t_1=3\times10^{10}\text{m}$,在火箭尾部的镜面上反射.

(2)$l=l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$,射向火箭头部的脉冲比射向火箭尾部的脉冲多行了一段

$$\Delta s=v\cdot\frac{1}{2}\Delta t+l,\Delta s=c\cdot\frac{1}{2}\Delta t.$$

所以 $(c-v)\cdot\dfrac{1}{2}\Delta t=l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$

解得:$v=\dfrac{(c\Delta t)^2-4l_0^2}{(c\Delta t)^2+4l_0^2}=0.9c=2.7\times10^8\text{m/s}$

(3)$\Delta t'=\dfrac{l_0}{c}=2\times10^{-6}\text{s}$.

8. **分析与解** 光子火箭是一种设想的飞行器，它利用“燃料”物质向后辐射定向光束，使火箭获得向前的动量. 求解第 1 向，可以先将火箭时间 $\tau_0=25\mathrm{a}$(年)变换成地球时间 τ，然后由距离 R 求出所需的火箭速度. 火箭到达目的地时，比值 $\frac{M_0}{M'_0}$ 是不定的，所谓最小比值是指火箭刚好能到达目的地亦即火箭的终速度为零，所需“燃料”量最少. 利用本章第 2 节第 4 题的结果即可求解第 2 问.

(1)因火箭加速和减速所需时间可略，故火箭以恒定速度 v 飞越全程，走完全程所需火箭时间(本征时间)为 $\tau_0=25\mathrm{a}$(年)，利用时间膨胀公式，相应的地球时间为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

因

$$\tau=\frac{R}{v},$$

故

$$\frac{R}{v}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

解出

$$v=\frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2\tau_0^2}{R^2}}}\approx c\left(1-\frac{c^2\tau_0^2}{2R^2}\right)=c(1-0.96\times10^{-10}),$$

可见，火箭几乎应以光速飞行.

(2)火箭从静止开始加速至上述速度 v，火箭的静止质量从 M_0 变为 M，然后作匀速运动，火箭质量不变，最后火箭作减速运动，比值 $\frac{M_0}{M'_0}$ 最小时，到达目的地时的终速刚好为零，火箭质量从 M 变为最终质量 M'_0. 加速阶段的质量变化可应用本章第二节第 4 题的(3)式求出. 因光子火箭喷射的是光子，以光速 c 离开火箭，即 $u=c$，于是有

$$\frac{M}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

$v=\beta c$ 为加速阶段的终速度，也是减速阶段的初速度. 对减速阶段，可应用本章第二节第 4 题的(4)式，式中的 m_0 以减速阶段的初质量 M 代入，又因减速时必须向前辐射光子，故 $u=-c$，即有

$$\frac{M}{M'_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$\frac{M_0}{M'_0}=\frac{1+\beta}{1-\beta}=\frac{4R^2}{c^2\tau_0^2}-1\approx\frac{4R^2}{c^2\tau_0^2}=4\times10^{10}.$$