所在学校________ 准考证号________ 姓名________ 考场________

*********************线*********************封**********************密**********************

考生类别____________

第27届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　2010.12.12

题号	一	二			
	1～10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					

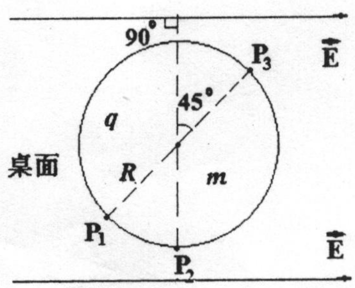
题号	三			总分
	15	16	17	
分数				
阅卷人				

答题说明：前14题是必做题，满分是120分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理B组限做15题，满分140分；非物理A组限做15、16题，满分160分；物理组限做15、17题，满分160分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一、填空题（必做，共10题，每题2空，每空3分，共60分）

1.将地面重力加速度记为 g，地球半径记为 R，则第一宇宙速度 $v_1=$ ____________，第二宇宙速度 $v_2=$ ____________。

2.如图所示，光滑绝缘水平桌面上有场强为 $\vec{E}$ 的均匀电场，质量 m、半径 R 的匀质薄圆板均匀带电，电量 $q>0$。可以过圆周上的 P_1 或 P_2 或 P_3 点设置一个竖直、光滑、绝缘转轴，P_1、P_2、P_3 的方位已经在图中示出。设置转轴后，从静止释放的圆板便会作定轴转动，转动角速度的最大值依次记为 $\omega_{1\max}$、$\omega_{2\max}$、$\omega_{3\max}$，三个中最大者为____________。当角速度达到此值时，转轴提供的支持力大小为____________。



3.多普勒效应示意图见右，波源 S 的振动频率为ν_0，S 朝着接收者 B 的运动速度为v_S。机械波在介质中的传播速度为 u，B 朝着 S 运动的速度为v_B。则当 $u>v_S>0, v_B=0$ 时，B 的接收频率ν_1=__________；当$v_S=0$，$v_B>0$时，B 的接收频率ν_2=________________。

4.已知 40°C 和 0°C 的饱和水蒸气压强分别为 $55mmHg$ 和 $5mmHg$。处于 40°C 的某高温作业区大气相对湿度为 75%（即其中水气分压强等于饱和水蒸气压强的 0.75 倍），压强为 $760mmHg$。在一试管中充满此种大气后封口，再将其温度降至 0°C，此时试管内 ________（填写"会"或"不会"）出现小水珠，试管内气体压强为______________$mmHg$。

5.将系统的等温线简称为 T 线，绝热线简称为 S 线。图 1、2 中 T 线与 S 线都有两个交点，这两幅图中违反热力学第一定律的是________________（填"图 1"或"图 2"或"图 1 和图 2"），违反热力学第二定律的是________________（同上）。

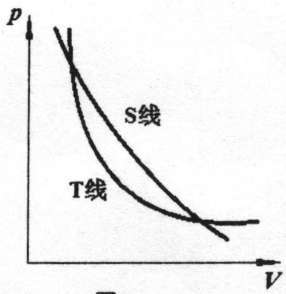


图1

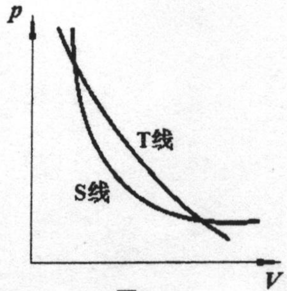


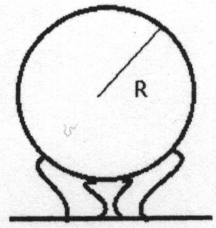
图2

6. 真空中一正点电荷 q 处于一立方体内中心处，则通过该立方体表面的总电通量为__________________ ；通过该立方体的上表面的电通量为__________________。

7. 已知空气的击穿场强为 E_0，则置于空气中的半径为 R 的球形高压起电器（可看作图示导体球壳置于绝缘底座上）最高电压为 __________；若此高压起电器置于真空中，导体球壳上所带电量有无上限（回答有、无、不确定)，并说明原因 ____________

____

____。



考场__________ 姓名__________ 准考证号__________ 所在学校__________

密 封 线

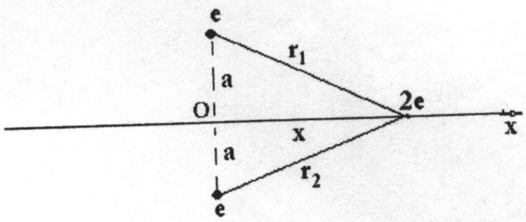
8. 一折射率为$n=1.5$的透明薄膜，厚度为$d=6.0\times10^{-4}cm$,将此薄膜放置在杨氏双缝干涉装置的一条狭缝之后，若取正入射，光源波长为$\lambda=5000A^{\circ}$，则从两狭缝到接受屏中央点的光程差为______________________ cm，与未放置薄膜前的干涉条纹相比，接收屏上的干涉条纹移动了__________________条。

9.高空遥测用照相机离地面$L=40.0km$，刚好能分辨地面相距$l=20.0cm$的两点，据此可知照相机物镜的直径 d=____________cm；假如照相机的焦距$f=50cm$，为了充分利用照相机的分辨本领，所选择的感光片上每毫米可以分辨的线数（即感光片分辨率）应该为________________ 线/mm。

10.一艘无人飞船和一颗彗星相对于地面参考系，分别以 0.6c 和 0.8c 的速度相向运动。地面系时钟读数$t_S=0$时，恰好飞船时钟读数也为$t=0$。地面系认为$t_S=5s$（s：秒）时，飞船会与彗星碰撞，飞船则认为$t=$_________s时，自己会与彗星碰撞，而且飞船在$t=0$时认为彗星与它相距______________ cs（光秒）。

二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

11. （15分）如图所示，水平面上两个带有电量 $+e$ 的点电荷，距离为 $2a$，有一α粒子（所带电量为$+2e$），很快地从这两个点电荷中间穿过，其路径恰好在两点电荷连线的中垂线上。如果α粒子的速度很快，以致于两点电荷在α粒子穿过时仍保持静止，试求



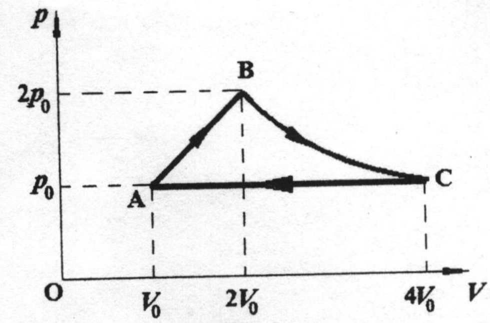
1）当α粒子处在位置 x 处时，两点电荷构成的体系与α粒子之间的相互作用能；

2）α粒子在哪些位置时受作用力最大。

考场______ 姓名______ 准考证号______ 所在学校______

********密**********封**********线********

12.（15 分）n 摩尔单原子分子理想气体所经循环过程 ABCA 和相关状态量如图所示，其中 AB 是斜直线，BC 是等温线，CA 是等压线。



（1）计算三段过程的每一段过程中，系统对外作功量；

（2）计算每一段过程中，系统内能的增加量；

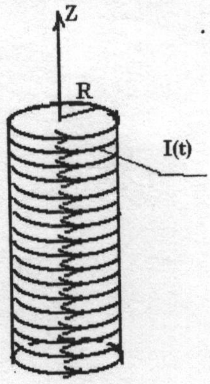
（3）计算每一段过程中，系统的吸热量；

（4）计算此循环过程的效率。

（注：如需要可参考下列数据：

$\ln 2 = 0.6931,\qquad \ln 3 = 1.099,\qquad \ln 5 = 1.609$）

13.（15 分） 等离子体是部分或完全电离的气体，即由大量自由电子和正离子及中性原子、分子组成，所含正负电荷数处处相等，宏观上近似电中性。电离了的正离子和自由电子的数密度相等，但离子质量$m_{离子}$>>电子质量m_e。图示的半径为 R 的载流长直螺线管，单位长度绕有 N 匝线圈。若在螺线管内沿轴向放置一个半径为R_0的圆柱形长直玻璃管，半径R_0略小于 R（可视为$R_0 \approx R$），管内充满等离子体气体，电子和离子数密度均为n_0，令 t=0 时刻，螺线管接通电流$I(t) = kt$(k为正常数，电流方向如图所示)。

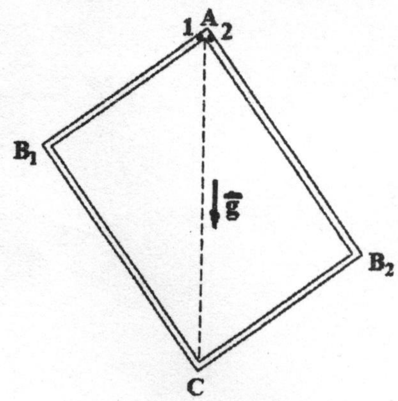


1）求通电以后某$t > 0$时刻管内的磁感应强度的大小和方向以及管内外涡旋电场的大小和方向；

2）上述玻璃管内产生涡旋电场后，求出t时刻等离子体中距中心轴r处的感应电流密度及其方向；

3）忽略感应电流所产生的轴向磁场，说明正离子和自由电子在螺线管产生的磁场中受到的洛伦兹力的方向，并讨论通电后管内气体的运动状况，并说明理由。

14.（15 分）将一条边 AB_1 长度等于 3L、另一条边 AB_2 长度等于 4L 的长方形闭合光滑细管道 AB_1CB_2，按图示方式悬挂在竖直平面内，上端点 A 和下端点 C 均被固定，对角线 AC 处于竖直方位。$t=0$ 时刻，将静止在 A 端两侧的小球 1、2 同时释放。假设管道在 B_1、B_2 处有极小圆弧段，可确保小球无碰撞地拐弯，且拐弯时间可略。



（1）试求球 1 沿 AB_1C 通道到达 C 端的时刻 T_1 和球 2 沿 AB_2C 通道到达 C 端的时刻 T_2（不考虑球 1、2 是否会碰撞）；

（2）将（1）问所得 T_1 、T_2 中小者记为 T_0，假设管道匀质，球 1、2 质量同为 m，将固定端 C 所受水平外力记为 $\vec{F}$，试在 $0 \le t < T_0$（略去小球在 B_1 或 B_2 拐弯处的无穷小时段）时间范围内，确定 $\vec{F}$ 的方向（朝右还是朝左）和大小 F。

三. 计算题（每题 20 分。文管组和农林医组不做；非物理 B 组限做第 15 题；非物理 A 组限做第 15、16 题；物理组限做第 15、17 题）

15.（20 分，文管组和农林医组不做，其他组必做）

四块面积同为 S、原不带电的导体薄平板 A、B、C、D，依次平行放置，相邻间距很小，分别记为 d_1、d_0、d_2，如图 1 所示。给 B 充以电量 $q>0$，再用图 1 中虚直线所示的细导线连接 B、C，最终达到静电平衡。

(1) 试求 A 到 D 的电势降 U_{AD}；

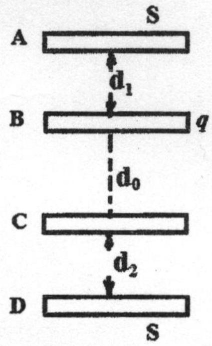


图1

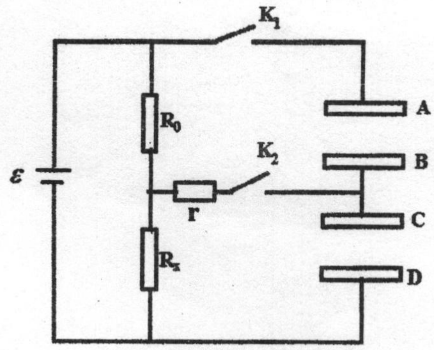


图2

现将图 1 所示系统达到静电平衡后，通过理想导线，电键 K_1 和 K_2，电动势为 ε 的直流电源以及电阻分别为 R_0、R_x 和 r 的电阻器连接成图 2 所示电路。开始时 K_1、K_2 均断开，而后接通 K_1，直到电路达到稳定状态。

(2) 试求该过程中从电源正极朝平板 A 流去的电量 Q，并判断 Q 的正负号；

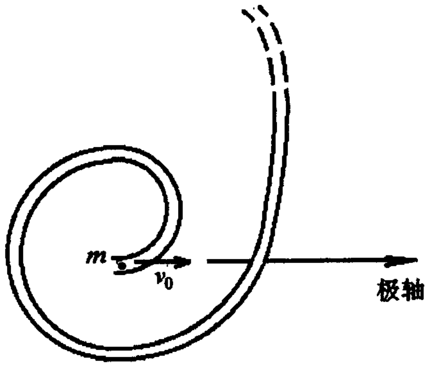
最后再接通 K_2，测得流过电阻器 r 的电流强度始终为零。

(3) 设 R_x 为未知量，试求 R_x，并给出 ε 的取值范围。

考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

*********************密*********************封**********************线***********************

16. （20 分，非物理 A 组必做，其他组不做）如图所示，按阿基米德螺线方程 $r = r_0\theta/\pi$ 设置的水平固定细长管道，内壁光滑。质量为 m 的小球在管道内以 v_0 速度，从 $r=0$、$\theta=0$ 位置开始运动，直到 $\theta = 2k\pi(k=1,2\cdots)$ 为止。



(1)参考题文后的提示，试求全过程所经时间 T_k 。

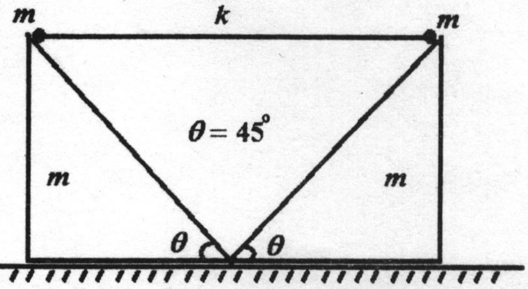
(2) 将小球在运动过程中受管壁弹力的大小记为 N，试求全过程时间段内 N 的平均值 $\overline{N}$，再给出 k 很大时 $\overline{N}$ 的近似表达式。

（提示：平面极坐标系中无限小曲线段长度 $\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2}$

积分参考公式 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$）

17．（**20 分，物理组必做，其他组不做**）

如图所示，质量同为 m 的两个相同等腰直角三角形斜木块平放在光滑水平地面上，且已通过某种约束使其始终不会翻转，斜面底端相互接触。一根劲度系数为 k，自由长度恰好等于每个斜木块底面长度两倍的弹性轻杆，两端分别连接质量同为 m 的小球，开始时两个小球静止在两个斜木块的顶端。自由释放后，两个小球可以无摩擦地沿斜面滑动，斜木块底面作水平运动，弹性杆随之在竖直方向上运动，过程中假设杆始终处于水平状态。将斜木块给小球支持力大小记为 N，已知小球开始运动后 N 第二次达到极小值时，杆刚好落地，试求 N 第二次达到极大值时杆的长度。



第 27 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷参考答案

一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

1. $v_1=\sqrt{gR}$ ； $v_2=\sqrt{2gR}$ 。 2. $\omega_{3\max}$ ； $\frac{1}{3}(7+2\sqrt{2})qE$

3. $v_1=\dfrac{u}{u-v_S}v_0$ ； $v_2=\dfrac{u+v_B}{u}v_0$ 。4. 会；632 $mmHg$

5. 图 1 ； 图 1 和图 2 。 6. q/ε_0 ； $q/6\varepsilon_0$

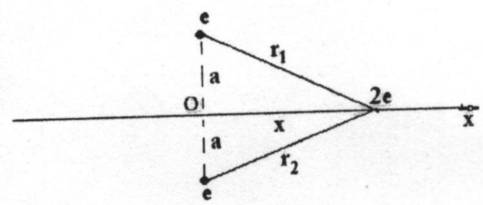
7. $U_M=RE_0$ ；有，表面受扩张力，电量太大扩张力大，导致导体壳撑破

8. $L=(n-1)d=3\times10^{-4}$ cm，$N=L/\lambda=6$ 条

9. d= 12.2 cm； N= 400 线/mm 。 10. $t=$ 4s； $\dfrac{140}{37}$ cs（光秒）

二、计算题（必做，共 4 题，每题 15 分，共 60 分）

11. 解：设α粒子在轨道上任一点的位置为 x，两个正电荷之间的距离为 2a，则两正电荷在α粒子处的总电势为：



$$U_P=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{e}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\quad（3\text{ 分}）$$

两正电荷构成的系统与α粒子之间的相互作用能为

$$W_{互}=q_iU_i=2e\cdot\frac{e}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\quad（3\text{ 分}）$$

2）求α粒子所受的作用力：

方法一：用库仑力做，两正电荷与α之间的库仑力为

$$F_x=2F_e\cos\theta=2\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\frac{e^2x}{\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+a^2)^3}},\text{方向}\rightarrow\quad（3\text{ 分}）$$

方法二：用虚功原理做 $\vec{F}=-\dfrac{dW_{互}}{dx}=\dfrac{e^2x}{\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\vec{i}$

求α粒子所受的作用力的极值，即求力$\vec{F}$模$|\vec{F}|$的极值，

$$\frac{d|\vec{F}|}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^2|x|}{\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\right\}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+a^2)-3x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^5}}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^5}}=0$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dx}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^5}}=0\longrightarrow a^2-2x^2=0,x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}};\quad（3\text{ 分}）$$

所以在$x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$处，α受力取极值，极值可能极大，可能极小，再由

$$\frac{d^2|\vec{F}|}{dx^2}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left[\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^5}}\right]=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{2|x|(3x^2-2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^7}},$$

因为在$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$处，$3x^2-2a^2=-\frac{a^2}{2}<0$，所以，

$\frac{d^2|\vec{F}|}{dx^2}=\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{2|x|(3x^2-2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^7}}<0$，即在$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$处，$\alpha$受作用力达到极大值。（3 分）

12 解： $T_A=\frac{p_AV_A}{nR}=\frac{p_0V_0}{nR}=T_0,\qquad T_B=T_C=\frac{4p_0V_0}{nR}=4T_0$ （3分）

（1） $W_{AB}=\frac{1}{2}(p_A+p_B)(V_B-V_A)=\frac{3}{2}p_0V_0$

$W_{BC}=nRT_B\ln\frac{V_C}{V_B}=4p_0V_0\ln 2$

（3 分）

$W_{CA}=-3p_0V_0$

（2） $\Delta U_{AB}=\frac{3}{2}nR(T_B-T_A)=\frac{9}{2}nRT_0=\frac{9}{2}p_0V_0$

$\Delta U_{BC}=0$

（3 分）

$\Delta U_{CA}=\frac{3}{2}nR(T_A-T_C)=-\frac{9}{2}p_0V_0$

（3） $Q_{AB}=W_{AB}+\Delta U_{AB}=6p_0V_0$

（3分）

$Q_{BC}=W_{BC}+\Delta U_{BC}=4p_0V_0\ln 2$

$Q_{CA}=W_{CA}+\Delta U_{CA}=-\frac{15}{2}p_0V_0$

（4） $\eta=1-\frac{-Q_{CA}}{Q_{AB}+Q_{BC}}=1-\frac{15}{12+8\ln 2}=\frac{8\ln 2-3}{12+8\ln 2}=14.5\%$ （3分）

13.解：1）t=0 时刻，螺线管接通电流，则由于电流变化，管内磁场也将随时间变化，对长直螺线管内，有

$$B=\mu_0NI(t)=\mu_0Nkt$$ （2 分），

因为 B 变化，在管内外会产生涡旋电场，

$2\pi rE_{旋内}=-\frac{dB}{dt}\pi r^2=-\mu_0Nk\pi r^2$；$E_{旋内}=-\frac{\mu_0Nkr}{2}\quad r<R$

方向与螺线管的电流反向 （2 分）

$2\pi rE_{旋外}=-\frac{dB}{dt}\pi R^2=-\mu_0Nk\pi R^2$；$E_{旋外}=-\frac{\mu_0NkR^2}{2r}\quad r>R$

方向与螺线管的电流电流反向 （2 分）

2)求感应电流密度及其方向

由 1）可见，管内涡旋电场的大小取决于 r 的大小,越靠近螺线管壁处，涡旋电场越大。等离子体中，正、负离子在涡旋电场的作用下作环绕轴线的圆周运动，正负离子均受涡旋电场力作用，电子和离子受到大小相等方向相反的切向力而获得相反方向的切向加速度： 就其大小而言，

对于电子：$eE_{旋}=m_e\dfrac{dv_e}{dt}$，对于离子：$eE_{旋}=(m_{离子})\dfrac{dv_{离}}{dt}$

由于 $m_{离子}>>m_e$，因此电子在切向获得加速度>>离子所获得的加速度，因而使等离子体内形成以电子流动为主的与涡旋电场方向相反的电子流，略去离子流贡献。（3 分）

距中心为 r 处的电流密度的大小便为 $j(r,t)=n_0eu(r,t)$

其中 $u(r,t)$ 是 t 时刻，r 处电子在涡旋电场作用下获得的切向运动速度（与电流密度方向相反）。对上式两边求导得

$$\frac{\partial j(r,t)}{\partial t}=n_0e\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}=n_0ea(r,t)=n_0e\frac{F}{m_e}\quad F=eE_{旋}$$

于是有 $$\frac{\partial j(r,t)}{\partial t}=\frac{n_0e^2}{m_e}E_{旋}=\frac{\mu_0Nkn_0e^2r}{m_e}$$

所以，当 r 一定时，$$j(r,t)=\int_0^t\frac{\mu_0Nn_0e^2kr}{m_e}dt=\frac{\mu_0Nn_0e^2kr}{m_e}t$$ （3 分）

电流密度是正电荷流动的方向，因此应该和涡旋电场方向相同。

3）感应电流方向与螺线管中通有的电流方向相反。忽略感应电流产生的轴向磁场，则电离了的正负离子由于有运动，它们均受到轴线磁场的洛伦兹力，正离子与涡旋电场同方向运动，电子反方向运动，轴向磁场向上，两者受到的洛仑兹力均指向轴线，洛伦兹力使正负离子均向轴线运动，因此除了有切向运动外，正负离子还有向轴线运动的趋势。又由于外层涡旋电场大，正负离子获得的切向速度大于内层，所以外层等离子体薄层会向轴线迅速压缩，（3 分）

14. 解：（1）参考题解图 1 T_1 的计算：

球 1 从 A 到 B_1 所经时间记为 t_{11}，到达 B_1 的速度大小记为 v_{10}

有

$$3L=\frac{1}{2}g\sin\phi\cdot t_{11}^2\Rightarrow t_{11}=\sqrt{10L/g}$$

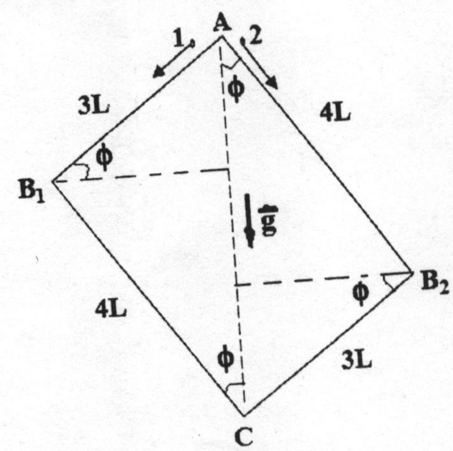
$$v_{10}=g\sin\phi\cdot t_{11}=\frac{3}{5}\sqrt{10gL}$$

将球 1 从 B_1 到 C 时间记为 t_{12}，有

$$4L=v_{10}t_{12}+\frac{1}{2}g\cos\phi\cdot t_{12}^2=\frac{3}{5}\sqrt{10gL}\cdot t_{12}+\frac{2}{5}gt_{12}^2$$

取其解为 $$t_{12}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10L}{g}}$$

合成，得 $$T_1=t_{11}+t_{12}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{10L}{g}}$$ （4分）



题解图1

T_2 的计算：

仿照球 1 所引参量，有

$$4L=\frac{1}{2}g\cos\phi\cdot t_{21}^2\Rightarrow t_{21}=\sqrt{10L/g}(=t_{11})$$

$$v_{20}=g\cos\phi\cdot t_{21}=\frac{4}{5}\sqrt{10gL}$$

$$3L=v_{20}t_{22}+\frac{1}{2}g\sin\phi\cdot t_{22}^2=\frac{4}{5}\sqrt{10gL}\cdot t_{22}+\frac{3}{10}gt_{22}^2$$

$$t_{22}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10L}{g}}$$

$$T_2=t_{21}+t_{22}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{10L}{g}}$$ （3 分）

（2）由（1）问解答可知 $$T_0=T_2=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{10L}{g}}$$

球 1、2 于　　　　　$t_{11}=t_{21}=\sqrt{10L/g}\overset{令}{=}t_1$

分别同时到达 B_1、B_2 。据此将讨论的时间范围分为两段：　$0\le t<t_1$　和 $t_1<t<T_0$

$0\le t<t_1$ 时间段 $\vec{F}$ 的求解：

此时间段内，t 时刻球 1、2 所在位置到竖直线 AC 的水平距离分别为

$$x_1=(\frac{1}{2}g\sin\phi\cdot t^2)\cdot\cos\phi,\ x_2=(\frac{1}{2}g\cos\phi\cdot t^2)\cdot\sin\phi$$

即有　　　　　　　　　　　$x_1=x_2$

重力　$m_1\vec{g}=m\vec{g}$、$m_2\vec{g}=m\vec{g}$ 相对 A 点力矩之和为零，故有解

$$\vec{F}=0\qquad（4分）$$

$t_1<t<T_0$ 时间段 $\vec{F}$ 的求解：

参考题解图 2，球 1、2 朝 AC 线水平加速度分别为

$$(g\cos\phi)\cdot\sin\phi=\frac{12}{25}g,\ (g\sin\phi)\cos\phi=\frac{12}{25}g$$

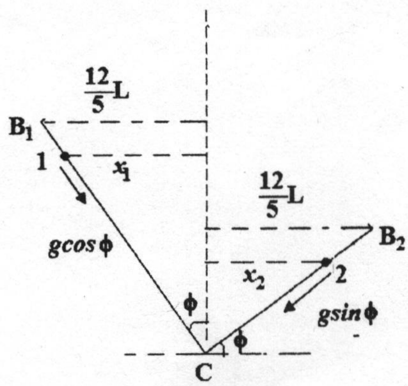
即相同。t 时刻重力矩之和为

$$\Delta\vec{M}\begin{cases}方向：水平朝外\\ 大小：\Delta M=m_1gx_1-m_2gx_2\end{cases}$$

$$x_1=\frac{12}{5}L-\left[v_{10}\sin\phi\cdot(t-t_1)+\frac{1}{2}\times\frac{12}{25}g(t-t_1)^2\right]$$

$$x_2=\frac{12}{5}L-\left[v_{20}\cos\phi\cdot(t-t_1)+\frac{1}{2}\times\frac{12}{25}g(t-t_1)^2\right]$$

$$x_1-x_2=(v_{20}\cos\phi-v_{10}\sin\phi)(t-t_1)=\frac{7}{25}\sqrt{10gL}(t-t_1)$$



题解图 2

为平衡此力矩，要求

$$\vec{F}\begin{cases}方向：水平朝左\\ 大小：F=\Delta M/5L=\frac{7}{125}\sqrt{10}mg\sqrt{\frac{g}{L}}(t-t_1),\qquad t_1=\sqrt{10L/g}\end{cases}\qquad（4分）$$

三．15.（**20 分，文管组和农林医组不做，其他组必做**）

解：（1）参考题图 1。静电平衡后，各导体板内场强为零，由高斯定理得　A 板下表面与 B 板上表面电荷等量异号

　　　C 板下表面与 D 板上表面电荷等量异号

B、C 板连成一个导体，等势，B 板下表面和 C 板上表面若有电荷，均应处理为无穷大均匀带电平面，其间电场线必定与板面垂直，使 B、C 间有电势差，与 B、C 等势矛盾。因此，要求

　　　B 板下表面电量为零，C 板上表面电量为零，

各导体板内场强为零，又要求

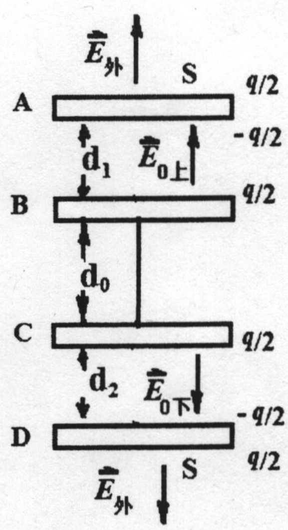
　　　A 板下表面与 B 板上表面电荷等量异号

由电荷守恒要求

　　　A 板总电量为零，B、 C 板电量之和为零，D 板总电量为零

根据上述要求建立 8 个方程，可解（过程略）得 A、B、C、D 板上、下表面电量分布如题图 1 所示。各区域场强方向也已在图中示出，且有

$$E_{0上}=E_{0下}=q/2\varepsilon_0S$$

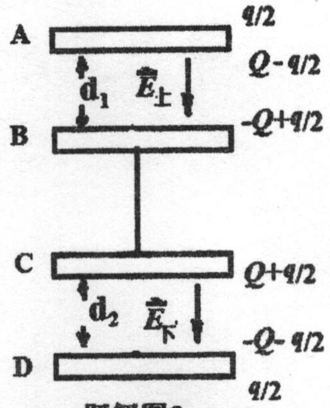


题解图 1

便得 $U_{AD}=-E_{0上}d_1+E_{0下}d_2=\dfrac{q}{2\varepsilon_0 S}(d_2-d_1)$ （8分）

（2）电量 Q 从电源正极流到 A 板达到平衡后，A、B、C、D 板的电荷分布及板间场强分布如题解图 2 所示。图中 $\vec{E}_{上}$、$\vec{E}_{下}$ 的方向均以向下为正，带有正、负号的 $E_{上}$、$E_{下}$ 分别为

$$E_{上}=\frac{2Q-q}{2\varepsilon_0 S},\qquad E_{下}=\frac{2Q+q}{2\varepsilon_0 S}$$



题解图2

继而得

$$U_{AB}=E_{上}d_1=\frac{2Q-q}{2\varepsilon_0 S}d_1,\qquad U_{CD}=E_{下}d_2=\frac{2Q+q}{2\varepsilon_0 S}d_2$$

$$\varepsilon=U_{AB}+U_{CD}=\frac{2Q(d_1+d_2)+q(d_2-d_1)}{2\varepsilon_0 S}$$

可解得 $Q=\dfrac{2\varepsilon_0 S\varepsilon+q(d_1-d_2)}{2(d_1+d_2)}$

对 Q 的正负号判断如下：

$$Q\le 0 \qquad 当\frac{q(d_2-d_1)}{2\varepsilon_0 S}\ge\varepsilon \text{ 时}$$

$$Q>0\begin{cases}0<Q\le\dfrac{q}{2} & 当\dfrac{q(d_2-d_1)}{2\varepsilon_0 S}<\varepsilon\le\dfrac{qd_2}{\varepsilon_0 S}\text{ 时}\\ Q>\dfrac{q}{2} & 当\qquad \varepsilon>\dfrac{qd_2}{\varepsilon_0 S}\text{ 时}\end{cases}$$ （7分）

（3）R_0、R_x 分压之比为

$$U_0/U_x=R_0/R_x$$

k_1 接通稳定后，k_2 未接通时，有

$$2Q-q=\frac{2\varepsilon_0 S\varepsilon-2qd_2}{d_1+d_2},2Q+q=\frac{2\varepsilon_0 S\varepsilon+2qd_1}{d_1+d_2}$$

k_2 接通后，流过 r 的电流若是始终为零，则 k_2 接通前便应有

$$\frac{R_0}{R_x}=\frac{U_0}{U_x}=\frac{U_{AB}}{U_{CD}}=\frac{(2Q-q)d_1}{(2Q+q)d_2}=\frac{(2\varepsilon_0 S\varepsilon-2qd_2)d_1}{(2\varepsilon_0 S\varepsilon+2qd_1)d_2}$$

解得 $R_x=\dfrac{(\varepsilon_0 S\varepsilon+qd_1)d_2}{(\varepsilon_0 S\varepsilon-qd_2)d_1}R_0$ （4分）

出现此种情况的 ε 取值范围为

$$\varepsilon>\frac{qd_2}{\varepsilon_0 S}$$ （1分）

16. （**20 分，非物理 A 组必做，其他组不做**）

（**提示：平面极坐标系中无限小曲线段长度** $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}$，

积分参考公式 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$）

解：T_k **的计算：**

$$dl=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}=\frac{r_0}{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

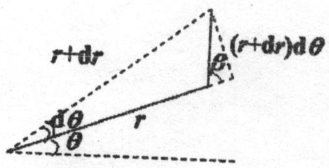
$$L_K=\int_0^{2k\pi}dl=\frac{r_0}{\pi}\int_0^{2k\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=\frac{r_0}{\pi}\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{2k\pi}=\cdots$$

$$T_k=\frac{L_K}{v_0}=\frac{r_0}{\pi v_0}\left[k\pi\sqrt{1+4k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2k\pi+\sqrt{1+4k^2\pi^2})\right]$$ （5分）

小球速度方向转角 $\Delta\phi_k$ **的计算：**

参考题解图 1，小球到 r、θ **位置时螺线切线方向线与矢径方向线夹角记为** β**，有**



题解图1

$$\tan\beta=\frac{(r+dr)d\theta}{dr}=\frac{rd\theta}{dr}=\theta$$

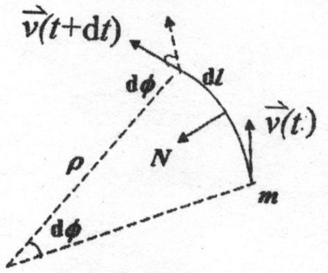
得 $\theta=0$ **时，**$\beta_0=0$; $\theta=2k\pi$ **时，**$\beta_k=\arctan(2k\pi)$

小球速度方向转角便为

$$\Delta\phi_k=2k\pi+(\beta_k-\beta_0)=2k\pi+\arctan(2k\pi)$$ （5分）

$\overline{N}$ **的计算：**

dt **时间段内小球运动和受力情况，如题解图 2 所示，有**



题解图2

$$N=m\frac{v^2}{\rho}\Rightarrow Ndt=mv\frac{vdt}{\rho}=mv\frac{dl}{\rho}=m\,v\,\phi$$

得 $\int_0^{T_k}Ndt=\int_0^{T_k}mvd\phi=mv_0\Delta\phi_k$

$$\overline{N}=\frac{\int_0^{T_k}Ndt}{T_k}=\frac{\pi mv_0^2}{r_0}\frac{2k\pi+\arctan(2k\pi)}{k\pi\sqrt{1+4k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2k\pi+\sqrt{1+4k^2\pi^2})}$$ （8分）

k **很大时** $\overline{N}$ **的近似表达式：**

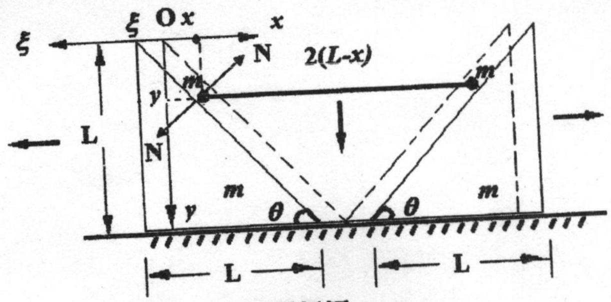
$$2k\pi+\arctan(2k\pi)\approx 2k\pi+\frac{\pi}{2}\approx 2k\pi$$

$$k\pi\sqrt{1+4k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2k\pi+\sqrt{1+4k^2\pi^2}\right)\approx 2k^2\pi^2+\frac{1}{2}\ln 4k\pi\approx 2k^2\pi^2$$

$$\Rightarrow\qquad \overline{N}\approx\frac{mv_0^2}{kr_0}$$ （2分）

17．（20分，物理组必做，其他组不做）

解：参考题解图，图中虚线所示为两个斜木块初始位置，顶端取为坐标原点 O，为左侧小球朝右、朝下运动设置 x、y 坐标轴，为左侧斜木块朝左运动设置 ξ 坐标。每一个斜木块底面长记为 L 则高也为 L 。建立下述方程：



题解图

球：
$$N\cdot\sin\theta-k\cdot 2x=m\ddot{x},$$
$$mg-N\cos\theta=m\ddot{y}$$

木块：　$N\cdot\sin\theta=m\ddot{\xi}$

运动关联：$y=(x+\xi)\tan\theta$

将其中木块方程所得

$$N={m\ddot{\xi}}\Big/{\sin\theta}$$

代入小球方程，并将 $\theta=45^{o}$ 代入，经数学处理后，可得

$$\ddot{\xi}=\ddot{x}+\frac{2k}{m}x \qquad (1)$$

$$\ddot{y}+\ddot{\xi}=g \qquad (2) \qquad\qquad (6分)$$

$$\ddot{y}=\ddot{x}+\ddot{\xi} \qquad (3)$$

1：$\ddot{x}$ 方程的建立和求解

（2）（3）式联立，消去 $\ddot{y}$，得　$\ddot{x}+2\ddot{\xi}=g$　　(4)

将（1）式代入（4）式，得　$\ddot{x}+\dfrac{4m}{3m}x=\dfrac{g}{3}$

通解为
$$\begin{cases}x=A\cos(\omega t+\phi)+\dfrac{mg}{4k}, & \omega=\sqrt{\dfrac{4k}{3m}}\\ \dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\phi)\end{cases}$$

由初条件　　$t=0$ 时，$x=0,\ \dot{x}=0$

得　　$A\cos\phi+\dfrac{mg}{4k}=0$

$$-\sqrt{\frac{4k}{3m}}A\sin\phi=0 \qquad \Rightarrow\phi=0 \text{ 或 } \pi$$

取　$\phi=0$，则 $A=-\dfrac{mg}{4k}\Rightarrow x=[1-\cos\omega t]\dfrac{mg}{4k}$

取　$\phi=\pi$，则 $A=\dfrac{mg}{4k}\Rightarrow x=[1+\cos(\omega t+\pi)]\dfrac{mg}{4k}$

可统一为　　$x=(1-\cos\omega t)\dfrac{mg}{4k}$

$$\ddot{x}=\frac{g}{3}\cos\omega t,\ \omega=\sqrt{\frac{4k}{3m}} \qquad\qquad (5分)$$

II：$\ddot{\xi}$方程的建立和求解

由（1）式，得 $$\ddot{\xi}=\ddot{x}+\frac{2k}{m}x=\frac{g}{3}\cos\omega t+\frac{2k}{m}(1-\cos\omega t)\frac{mg}{4k}$$

$$\ddot{\xi}=-\frac{g}{6}\cos\omega t+\frac{g}{2}$$

积分，得 $$\dot{\xi}=-\frac{g}{6\omega}\sin\omega t+\frac{1}{2}gt+C_1,\ t=0\text{ 时},\dot{\xi}=0\Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow\xi=\frac{g}{6\omega^2}\cos\omega t+\frac{1}{4}gt^2+C_2,\ t=0\text{ 时},\xi=0\Rightarrow C_2=-\frac{g}{6\omega^2}$$

$$\Rightarrow\xi=\frac{g}{6\omega^2}(\cos\omega t-1)+\frac{1}{4}gt^2$$

$$\Rightarrow\xi=\frac{mg}{8k}(\cos\omega t-1)+\frac{1}{4}gt^2$$ （4分）

讨论： $$\ddot{\xi}=-\frac{g}{6}\cos\omega t+\frac{g}{2},\Rightarrow\frac{2}{3}g\ge\ddot{\xi}\ge\frac{g}{3}>0$$

$\Rightarrow N=\dfrac{m\ddot{\xi}}{\sin\theta}>0$，故弹性杆落地前，小球不会离开斜面。

III：：$y\sim t$的求解：由$y=(x+\xi)\tan\theta=x+\xi$，得

$$y=\frac{mg}{8k}(1-\cos\omega t)+\frac{1}{4}gt^2$$ （1分）

IV：斜木块底面长度L

$$N=\frac{m\ddot{\xi}}{\sin\theta}=\sqrt{2}m(-\frac{g}{6}\cos\omega t+\frac{g}{2})$$

N第二次极小值，对应 $t=2T=2\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

此时有 $$L=y(t=2T)=\frac{1}{4}gt^2\Big|_{t=2\pi\sqrt{3m/k}}$$

得 $$L=\frac{3\pi^2mg}{k}$$ （2分）

V：N第二次达到极大值时杆的长度l.

N第二次极大值，对应 $t=\dfrac{3}{2}T=\dfrac{3\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

此时杆长为

$$l=(2L-2x)\Big|_{t=\frac{3}{2}T}=\left[2L-2(1-\cos\omega t)\frac{mg}{4k}\right]_{\cos\omega t=-1}=2L-\frac{mg}{k}$$

得 $$l=\frac{(6\pi^2-1)mg}{k}$$ （2分）