2007年北京市中学生数学竞赛高一年级试题

参考答案

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	B	C	A	D	A

二、填空题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	6	2π	$2a$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1007012

三、解　设 $F(x,y)=ax+b+ay+b-xy$，由已知得

$F(0,0)=2b\geqslant-\frac{1}{4}$，　即　$b\geqslant-\frac{1}{8}$　①

$F(0,1)=a+2b\leqslant\frac{1}{4}$　②

$F(1,1)=2a+2b-1\geqslant-\frac{1}{4}$，

即　$a+b\geqslant\frac{3}{8}$　③

由②－③得　$a+2b-(a+b)\leqslant\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$，即 $b\leqslant-\frac{1}{8}$. 结合①立得 $b=-\frac{1}{8}$.

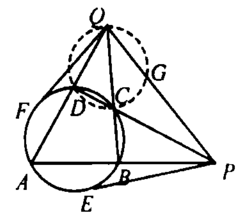
此时以 $b=-\frac{1}{8}$ 代入②、③分别得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$a\geqslant\frac{1}{2}$. 因此得 $a=\frac{1}{2}$.

因此所求的一次函数只能是 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$.

另外当 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$ 时，$F(x,y)=\left|\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{4}-xy\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}-y\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 对任意的 $x,y\in[0,1]$ 都成立.

答：所求的一次函数是 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$.

四、证明　过 Q,D,C 三点作辅助圆，交 PQ 于 G 点，连接 CG，因为 D,C,G,Q 四点共圆，所以 $\angle PGC=\angle QDC=\angle ABC$. 所以 P,G,C,B 四点共圆，有



$QF^2=QC\cdot QB=QG\cdot QP$.

又　$PE^2=PC\cdot PD=PG\cdot PQ$.

相加得 $PE^2+QF^2=PG\cdot PQ+QG\cdot QP$

$=PQ(PG+GQ)=PQ^2$.

所以，以线段 PE,QF,PQ 为边构成的三角形是直角三角形.

五、证明　不难看出，数列的各项都是正数，且是递增的，即

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$$

而 $x_n^2=\left(x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2=x_{n-1}^2+\frac{1}{x_{n-1}^2}+2$，

$x_{n-1}^2=\left(x_{n-2}+\frac{1}{x_{n-2}}\right)^2=x_{n-2}^2+\frac{1}{x_{n-2}^2}+2$，

…　…　…　…

$x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2=x_1^2+\frac{1}{x_1^2}+2$，

$x_1^2=\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)^2=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+2$.

上述 n 个式子相加得

$$x_n^2=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{x_{n-2}^2}+\frac{1}{x_{n-3}^2}+\cdots+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_0^2}+x_0^2+2n \qquad ⊛$$

当 $n=1000$，由⊛式可得

$x_{1000}^2>x_0^2+2\times1000=5^2+2000=2025$，

所以　$x_{1000}>45$.

又当 $n=1000$ 时，则

$x_{1000}^2=\frac{1}{x_{999}^2}+\frac{1}{x_{998}^2}+\frac{1}{x_{997}^2}+\cdots+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_0^2}+x_0^2+2\times1000$

(下转第6页)

简析略证 如图1，记x轴与准线l交点E，过A作$AD\perp l$，垂足为D，则$AD/\!/FE/\!/BC$.

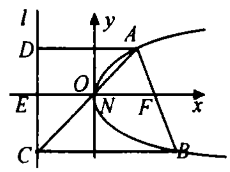


图1

连结AC，与EF相交于点N，则由平几知识得

$$\frac{|EN|}{|AD|}=\frac{|CN|}{|AC|}=\frac{|BF|}{|AB|},\quad \frac{|NF|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|},$$

根据抛物线的几何性质

$$|AF|=|AD|,\quad |BF|=|BC|,$$

$$\therefore\quad |EN|=\frac{|AD|\cdot|BF|}{|AB|}=\frac{|AF|\cdot|BC|}{|AB|}=|NF|,$$

即N是EF的中点，与抛物线的顶点O重合，

$\therefore$ 直线AC经过原点O.

4. 巧用向量

向量是高中教材的新增内容，由于向量具有几何和代数的双重属性，以向量为工具，改变了传统的平面三角、解析几何、立体几何等内容的学习体系，使几何问题彻底代数化了，使数形结合思想体现的更深刻、更完善.

例4 已知圆C：$x^2+y^2=4$和两个定点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，点P为圆C上的动点，过点P的圆C的切线为l，点A关于l的对称点为A'，求$|A'B|$的最大值.

分析 本题的常规解法是：首先求出点A'的轨迹方程，再利用两点间距离公式去求$|A'B|$的表达式(要运用点A'的轨迹方程将二元函数问题转化为一元函数最值)，进而求出$|A'B|$的最大值. 显然，该方法的运算量大，过程繁琐. 而平面向量的几何计算灵活方便，运用平面向量的运算法则合理安排运算，使问题的解决变得简洁.

解 如图2，设AA'与直线l交于点Q，连接OP，OQ，由O，Q分别为AB，AA'的中点，得$OQ/\!/A'B$，且$|A'B|=2|OQ|$.

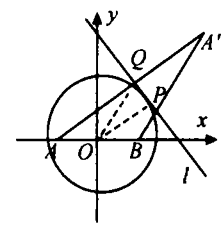


图2

又$AA'\perp l$，$OP\perp l$，故$OP/\!/AA'$.

设 $\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{OP}(m>0)$， $|\overrightarrow{OP}|=2$，

则 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OP}$，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+(m-1)\overrightarrow{OP}$，

由题意得$OP\perp PQ$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$.

即 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+(m-1)\overrightarrow{OP}^2=0$，

得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4(m-1)$.

又
$$|\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OA}^2+2m\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+m^2\cdot\overrightarrow{OP}^2=-4(m-1)^2+5,$$

$\because$ $m>0$，

$\therefore$ 当$m=1$时，$|\overrightarrow{OQ}|^2_{\max}=5$，

$\therefore$ $|\overrightarrow{OQ}|_{\max}=\sqrt{5}$.

$\therefore$ $|A'B|_{\max}=2|\overrightarrow{OQ}|_{\max}=2\sqrt{5}$，

此时$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OP}$，点$P$的坐标为$(0,\pm2)$，切线方程为$y=\pm2$，点$A'$的坐标为$(-1,\pm4)$.

(责审 余炯沛)

(上接第7页)

$$<\underbrace{\frac{1}{x_{100}^2}+\frac{1}{x_{100}^2}+\cdots+\frac{1}{x_{100}^2}}_{900个}+\underbrace{\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0^2}+\cdots+\frac{1}{x_0^2}}_{100个}+2025$$

$$\leqslant\frac{900}{15^2}+\frac{100}{5^2}+2025$$

$$=4+4+2025$$

$$<45^2+9<45^2+2\times45\times0.1+0.1^2$$

$$=(45+0.1)^2$$

$$=45.1^2.$$

所以，$x_{1000}<45.1$.

综上可得 $45<x_{1000}<45.1$.

(北京数学会普委会提供)