2004年北京市中学生数学竞赛高一年级初赛试题及参考答案

一、选择题(满分36分)

1. 满足条件 $f(x^2)=[f(x)]^2$ 的二次函数是(　　).

(A) $f(x)=x^2$　(B) $f(x)=ax^2+5$

(C) $f(x)=x^2+x$

(D) $f(x)=-x^2+2004$

2. 在 R 上定义的函数 $y=\sin x$, $y=\sin 2004$, $y=\sin|x|$, $y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 中,偶函数的个数是(　　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 方程 $||x|-1|=a$ 恰有3个实数解,则 a 等于(　　).

(A) 0　(B) 0.5　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

4. 实数 a,b,c 满足 $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,并且是个严格的减函数,即若 $x_1<x_2$,就有 $f(x_1)>f(x_2)$. 则(　　).

(A) $2f(a)+f(b)+f(c)=0$

(B) $f(a)+f(b)+f(c)<0$

(C) $f(a)+f(b)+f(c)>0$

(D) $f(a)+2f(b)+f(c)=2004$

5. 已知 a,b,c,d 四个正整数中, a 被9除余1, b 被9除余3, c 被9除余5, d 被9除余7,则一定不是完全平方数的两个数是(　　).

(A) a,b　(B) b,c　(C) c,d　(D) d,a

6. 正实数列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中, a_1,a_2,a_3 成等差数列, a_2,a_3,a_4 成等比数列,且公比不等于1,又 a_3,a_4,a_5 的倒数成等差数列,则(　　).

(A) a_1,a_3,a_5 成等比数列

(B) a_1,a_3,a_5 成等差数列

(C) $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_5}$ 成等差数列

(D) $\frac{1}{6a_1},\frac{1}{3a_3},\frac{1}{2a_5}$ 成等比数列

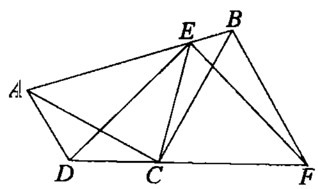
二、填空题(满分64分)

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x & (x<0)\\ \sqrt{3} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \log_{\frac{1}{3}}x & (x>1)\end{cases}$,试确定 $f\{f[f(-2004)]\}$ 的值.

2. 已知 $a=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\cdots+2001+2002+2003+2004$,求 a 被17除的余数.

3. 已知 $f(x)=x^2+x-1$,若 $ab^2\neq 1$,且有 $f(a^{-1})=f(b^2)=0$,试确定 $\frac{a}{1+ab^2}$ 的值.

4. 如图所示,等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 C 在等腰直角三角形 DEF 的斜边 DF 上, E 在 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 上,如果凸四边形 $ADCE$ 的面积等于5平方厘米,那么凸四边形 $ABFD$ 的面积等于多少平方厘米?



5. 若 $a,b\in R$,且 $a^2+b^2=10$,试确定 $a-b$ 的取值范围.

6. a 和 b 是关于 x 的方程 $x^4+m=9x^2$ 的两个根,且满足 $a+b=4$,试确定 m 的值.

7. 求 $\cos20°\cos40°\cos60°\cos80°$ 的值.

8. 将2004表为 n 个彼此不等的正整数的和,求 n 的最大值.

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	C	B	B	A

二、填空题

题号	1	2	3	4
答案	$-\frac{1}{2}$	1	-1	10

题号	5	6	7	8
答案	$[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$	$\frac{49}{4}$	$\frac{1}{16}$	62

即　$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c$.

例 5　(1999 年"希望杯"全国数学邀请赛高一培训题). 已知 $a、b、c>0$, $ab=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, 求: $bc+ca$ 的最大值.

解　考虑 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,　$c^2+a^2\geqslant 2ca$,

$a^2+b^2\geqslant 2ab$,

累加 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(bc+ca+ab)$,

即　$12\geqslant 2(bc+ca+2)$,

$\therefore$　$bc+ca\leqslant 4$,　$(bc+ca)_{\max}=4$.

例 6　设 $a、b、c\in R^+$, $a+b+c=1$, 求证: $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant abc$.

(1984 年列宁格勒数学竞赛题)

证明　由 $a+b+c=1$, 只要证明 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant abc(a+b+c)$, 即 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$. 思考 $a^3b+(\quad)\geqslant 2a^2bc$(右边系数凑为 2).

可得　$a^3b+abc^2\geqslant 2a^2bc$　①

$b^3c+a^2bc\geqslant 2ab^2c$　②

$c^3a+ab^2c\geqslant 2abc^2$　③

由①+②+③得 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$, 原式成立.

例 7　(1987 年中国数学奥林匹克集训队试题)若 $a、b、c\in R^+$, 求证: $a^5+b^5+c^5\geqslant a^3bc+ab^3c+abc^3$.

证明　只要证 $\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\geqslant a^2+b^2+c^2$.

思考 $\frac{a^4}{bc}+(\quad)\geqslant 2a^2$, 可得

$\frac{a^4}{bc}+bc\geqslant 2a^2$,

$\frac{b^4}{ac}+ac\geqslant 2b^2$,

$\frac{c^4}{ab}+ab\geqslant 2c^2$, 累加

$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}+ab+bc+ca$

$\geqslant 2a^2+2b^2+2c^2$.

又　$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,

$\therefore$　$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}+a^2+b^2+c^2$

$\geqslant 2a^2+2b^2+2c^2$.

即　$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ac}+\frac{c^4}{ab}\geqslant a^2+b^2+c^2$. 证毕.

例 8　设 $\alpha、\beta、\gamma$ 均为锐角, 且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$. 求证:

$$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}\geqslant 1.$$

(《数学通报》1994(10)数学问题 912 号)

证明　只要证 $\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha}\geqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^\gamma$, 思考 $\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+(\quad)\geqslant 2\sin^2\alpha$ 可得

$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\sin\alpha\sin\beta\geqslant 2\sin^2\alpha$,

$\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\sin\beta\sin\gamma\geqslant 2\sin^2\beta$,

$\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}+\sin\gamma\sin\alpha\geqslant 2\sin^2\gamma$,

累加可得

$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}+\sin\alpha\sin\beta$

$+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$

$\geqslant 2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma$.

又　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$.

$\therefore$　$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}$

$+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$\geqslant 2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma$,

$\therefore$　$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}$

$\geqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$=1$.

证毕.

(责审　周春荔)