

2002年北京市中学生数学竞赛复赛 高一年级试题及参考答案

2002年5月19日 8:30~10:30

一、填空题(满分40分)

1. n 是正整数,若不超过 n 的正整数中质数的个数与合数的个数相等,这样的 n 称为“怪异数”,则“怪异数”的集合是_____.

2. 已知 $0 \leq x, y < \pi$, 且 $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1 \\ (0.25)^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 0.5, \end{cases}$

则 $\sin(x+y) =$ _____.

3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, G 是棱 CC_1 的中点,则异面直线 AG 与 BD_1 所成角的余弦值等于_____.

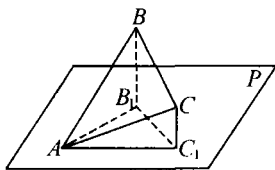
4. 已知 $f(x+1) = |x-1| - |x+1|$ 且 $f(f(x)) = f(2002) + 1$, 则 $x =$ _____.

5. 四面体 $SABC$ 中,面 ABC 为等腰直角三角形,其中 $\angle ABC = 90^\circ, SC = AB = a, SC \perp$ 面 ABC , 则棱 SB 与 AC 之间的距离等于_____.

二、(满分15分)是否存在函数 $f: R \rightarrow R$, 使得对所有的 $x \in R$, 都有 $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$, 且对任意的 $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 总成立? 如果存在, 试举一例; 如果不存在, 请说明理由.

三、(满分15分) 如图

$\triangle ABC$ 在平面 P 上的射影是正 $\triangle AB_1C_1$. 已知 $AB = \sqrt{14}, AC =$



$3, \cos \angle BAC = \frac{17\sqrt{14}}{84}$, 请你计算异面直线 AB 与 CC_1 所成角的正切值.

四、(满分15分) 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ 都是实数, 在集合

$$\{a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \dots, \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}}{100}\}$$

中至少有 51 个元素的数值相等, 求证: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ 中有两个数相等.

五、(满分15分) 在平面上放置着 n 条线段, 其中任两

条都不平行也不共线, 它们的长度之和等于 1. 请你证明: 在这平面上存在这样的直线 l , 使得这 n 条线段在 l 上射影长的和小于 $\frac{2}{\pi}$.

参考答案

一、填空题

题号	1	2	3	4	5
答案	{1, 9, 11, 13}	$\frac{1}{2}$ 或 -1	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$

二、不存在这样的函数 $f: R \rightarrow R$, 理由如下:

如果存在这样的函数 $f: R \rightarrow R$, 则对任意的实数 x , 都有 $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$, 那么, 当 $x=0$ 时,

有 $f^2(0) - 2 \times f(0) \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 \leq 0$, 所以

$[f(0) - \frac{1}{2}]^2 \leq 0$, 但 $[f(0) - \frac{1}{2}]^2 \geq 0$, 所以

$$[f(0) - \frac{1}{2}]^2 = 0, \text{ 也就是 } f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{①}$$

同理, 当 $x=1$ 时, 有 $f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{②}$

①、②的结果与“对任意的 $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 总成立”的条件矛盾. 因此, 满足题设条件的函数 $f: R \rightarrow R$ 不存在.

三、因为 $BB_1 \parallel CC_1$, 所以, $\angle ABB_1$ 即是异面直线 AB 与 CC_1 所成角, 因此, 只须计算 $\angle ABB_1$ 的正切值.

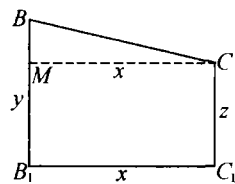


图 1

已知 $AB = \sqrt{14}$,

$AC = 3, \cos \angle BAC = \frac{17\sqrt{14}}{84}$, 由余弦定理得

$$BC^2 = 14 + 9 - 2 \sqrt{14} \times 3 \times \frac{17\sqrt{14}}{84} = 6,$$

$$\therefore BC = \sqrt{6}.$$

如图1,过C作 $CM \perp BB_1$ 于M,设 $B_1C_1 = x$, $BB_1 = y, CC_1 = z$,则

$$AC_1 = AB = B_1C_1 = MC = x, BM = y - z.$$

在 $Rt\triangle ABB_1$ 中,有 $x^2 + y^2 = 14$ ①

在 $Rt\triangle ACC_1$ 中,有 $x^2 + z^2 = 9$ ②

在 $Rt\triangle BCM$ 中,有 $x^2 + (y - z)^2 = 6$ ③

由①、②得 $y^2 - z^2 = 5$ ④

将③展开得 $x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 6$ ⑤

以①代入⑤得 $2yz - z^2 = 8 \Rightarrow y = \frac{8 + z^2}{2z}$ ⑥

以⑥代入⑤整理得 $3z^4 + 4z^2 - 64 = 0$.

注意到 z 为正数,解得 $z = 2$,进一步求得

$$y = 3, \quad x = \sqrt{5}.$$

因为 $BB_1 \parallel CC_1$,所以, $\angle ABB_1$ 即是异面直线 AB 与 CC_1 所成的角,

$$\tan \angle ABB_1 = \frac{AB_1}{BB_1} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

所以异面直线 AB 与 CC_1 所成角的正切值为

$$\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

四、令 $b_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i}{i}, i = 1, 2, 3, \dots, 100$, 已知其中至少有 51 个元素的数值相等, 设这个数值为 p .

易知, 若 $b_i = b_{i+1} = p$, 则 $a_{i+1} = p$. (*)

事实上, $b_i = b_{i+1}$, 即 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i}{i} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i + a_{i+1}}{i+1}$, 化简得

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i + a_{i+1} = (i+1)a_{i+1},$$

$$\text{即 } a_{i+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i + a_{i+1}}{i+1} = p.$$

当 $b_1 = p$ 时, 则 $a_1 = p$. 将 $b_1, b_2, \dots, b_{99}, b_{100}$ 分成如下 50 组:

$$\{b_1, b_2\}, \{b_3, b_4\}, \dots, \{b_{99}, b_{100}\}$$

因为在 $b_i (i = 1, 2, 3, \dots, 100)$ 这 100 个元素中至少有 51 个的数值相等, 根据抽屉原则, 必有一组的两个数相等. 设 $b_{2k+1} = b_{2k+2} = p$, 由 (*), 则 $a_{2k+2} = p$.

于是 $a_1 = a_{2k+2}$.

当 $b_1 \neq p$ 时, 则将 $b_2, \dots, b_{99}, b_{100}$ 这 99 个元素分成如下 50 组:

$$\{b_2, b_3\}, \{b_4, b_5\}, \dots, \{b_{98}, b_{99}\}, \{b_{100}\}$$

因为在 $b_i (i = 2, 3, \dots, 100)$ 这 99 个元素中至少有 51 个的数值相等, 根据抽屉原则, 必有一组的两个数相等. 设 $b_{2m} = b_{2m+1} = p$, 由 (*), 则 $a_{2m+1} = p$.

再将 $b_2, \dots, b_{99}, b_{100}$ 这 99 个元素分成如下 50 组:

$$\{b_2\}, \{b_3, b_4\}, \dots, \{b_{99}, b_{100}\}$$

因为在 $b_i (i = 2, 3, \dots, 100)$ 这 99 个元素中至少有 51 个的数值相等, 根据抽屉原则, 必有一组的两个数相等. 设 $b_{2n+1} = b_{2n+2} = p$, 由 (*), 则 $a_{2n+2} = p$.

于是 $a_{2m+1} = a_{2n+2}$.

综上所述, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ 中必有两个数相等.

五、已知 n 条线段记

作 $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, 在平面上任取一点 M , 将

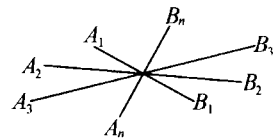


图 2

这 n 条线段平移,

使各线段的中点都过点 M .

再任取平面上的点 P , 作 $PP_1 \parallel MA_1, P_1P_2 \parallel MA_2, \dots, P_{n-1}P_n \parallel MA_n, P_nQ_1 \parallel MB_1, \dots, Q_{n-1}P \parallel MB_n$, 这样, 得到一个凸 $2n$ 边形 Γ . Γ 的对边平行且相等, 是个中心对称图形, 设 Γ 的对称中心为 O .

选择 Γ 的 n 组平行且相等的对边中距离最小的一组, 不失一般性, 设这组对边就是 P_1P_2 和

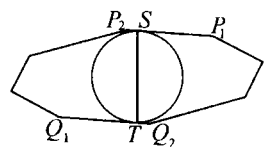


图 3

Q_1Q_2 , 其距离为 d . 以 O 为圆心, d 为直径的圆, 这个圆含于 Γ 的内部, 与 P_1P_2 和 Q_1Q_2 分别切于点 S 和点 T , 易知, $\pi d < \Gamma$ 的周长 $= 1$, 即 $d < \frac{1}{\pi}$.

注意到, 多边形 Γ 的各边在直线 ST 上的射影长的和等于已知的 n 条线段在 ST 上的射影长的和, 等于 $2d$, 所以 $2d < \frac{2}{\pi}$.

令直线 ST 为直线 l , 这表明, 在这平面上存在这样的直线 l , 使得这 n 条线段在 l 上射影长的和小于 $\frac{2}{\pi}$. \square