数学竞赛中的概率问题

徐胜林

(华中师范大学数学竞赛与数学普及研究所，430079)

概率研究的是确定性现象和随机现象，概率的计算既要用到排列、组合的知识来解答，也要用到排列、组合的解题思路. 概率统计的内容进入高中数学以后，使教学内容增添了更多的变量数学，也为数学竞赛增添了新的考点和应用的领域，主要考查概率和数学期望的计算.

求解概率问题时，应善于运用以下结论来处理.

(1) 古典概型：如果基本事件只有 n 种，并且各种基本事件出现的可能性相同，而事件 A 由其中 m 种基本事件组成，则事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$.

(2) 几何概型：在几何区域 D 中，随机地取一点，记事件"该点落在其内部一个区域 d 内"为事件 A，则事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{d\text{ 的测度}}{D\text{ 的测度}}$. 这里要求 D 的测度不为 0，其中"测度"的意义由 D 确定，当 D 分别是线段、平面图形和立体图形时，相应的"测度"分别是长度、面积和体积.

(3) 设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，在事件 B 发生的前提下事件 A 发生的条件概率为 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

(4) 设事件 A 的概率为 $P(A)$，则对立事件 $\overline{A}$ 的概率为 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(5) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

(6) 设 A,B 是两个事件，则：

①$P(A-B)=P(A)-P(AB)$，其中 $A-B$ 表示 A 发生且 B 不发生；

②$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

例1　将号码分别为 1,2,3,…,9 的九个小球放人一个袋中，这些小球仅号码不同，其余完全相同. 甲从袋中摸出一个球，其号码为 a，放回后，乙从此袋中再摸出一个球，其号码为 b. 则使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件发生的概率是多少?

分析　首先考虑基本事件的总个数，然后计算使不等式 $a-2b+10>0$ 成立的事件数，可用列举法求解.

解　甲、乙二人各摸一个小球，各有 9 种不同的结果，故基本事件的总数为 $9\times9=81$ 种.

由不等式 $a-2b>10$，得 $2b<a+10$.

当 $b=1,2,3,4,5$ 时，a 可取 $1,2,3,\cdots,9$ 中的每一个值，都能使不等式成立，则共有 $9\times5=45$(种)；

当 $b=6$ 时，a 可取 3,4,5,6,7,8,9，有 7 种；

当 $b=7,8,9$ 时，对应的 a 的取值分别有 5,3,1 种.

于是所求概率 $P=\frac{45+7+5+3+1}{81}=\frac{61}{81}$.

例2　(2010年江西省预赛试题) 将 1,2,…,9 随机填入图 1 中正方形 $ABCD$ 的九个格子中，每格填一数，则其每列三数自上而下、每行三数自左至右顺次成等差数列的概率 $P=$ ________.

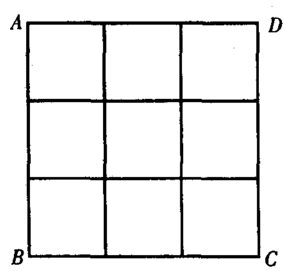

图1　例2图

分析　解题的关键是求出符合条件的填法数，故需根据条件分析出填数的规律.

解　1,2,…,9 随机填入图中正方形 $ABCD$ 的九个格子中，共有 9! 种填法.

设三行填数的和依次为 S_1,S_2,S_3，则 S_1,S_2,S_3 也成等差数列，而它们的和 $S_1+S_2+S_3=1+2+\cdots+9=45$，所以 $3S_2=45$，故 $S_2=15$.

设第二行的三个数顺次为 a,b,c，由于 a,b,c 成等差数列，$a+b+c=15$，所以 $3b=15$，于是 $b=5$，$a+c=10$，$\{a,c\}$ 的取值只有 $\{1,9\}$，$\{2,8\}$，$\{3,7\}$，$\{4,6\}$ 四种情况.

但 a,c 作为所在列的等差中项，不能取1和9；根据对称性，1和9也不能在中间列，故只能在正方形的角块上，且既不同行也不同列(否则中项为5)，即1和9只能在正方形的对角块上.

同理，$\{3,7\}$ 也不能被 $\{a,c\}$ 取到，故3和7必在正方形的另一对角块上.

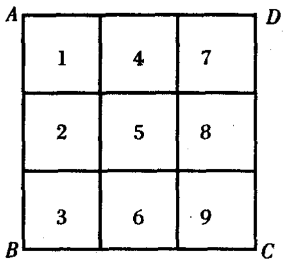

图 2

因此，填法只有图2的模式，它的各种情况，可看成将表格固定，然后将字母 A 放置于四角之一，再使 $ABCD$ 成顺时针或逆时针方向，共得8种情况.

所以 $P=\dfrac{8}{9!}$.

例3 (2008年全国联赛试题) 甲乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得1分，负者得0分，比赛进行到有一人比对方多2分或打满6局时停止. 设甲在每局中获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$，且各局胜负相互独立，则比赛停止时已打局数 ξ 的期望 $E\xi$ 为　　(　　)

(A) $\dfrac{241}{81}$.　　(B) $\dfrac{266}{81}$.

(C) $\dfrac{274}{81}$.　　(D) $\dfrac{670}{243}$

分析　本题是计算比赛停止时已打局数 ξ 的期望 $E\xi$，所以首先要知道 ξ 的分布，事实上由题中条件可知 ξ 的所有可能值为2，4，6，计算出相应的概率就可得问题的解.

解法1　依题意知，ξ 的所有可能值为2，4，6.

设每两局比赛为一轮，则该轮结束时比赛停止的概率为 $(\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{5}{9}$.

若该轮结束时比赛还将继续，则甲、乙在该轮中必是各得一分，此时，该轮比赛结果对下轮比赛是否停止没有影响. 从而有

$$P(\xi=2)=\frac{5}{9},$$

$$P(\xi=4)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{81},$$

$$P(\xi=6)=(\frac{4}{9})^2=\frac{16}{81},$$

故 $E\xi=2\times\dfrac{5}{9}+4\times\dfrac{20}{81}+6\times\dfrac{16}{81}=\dfrac{266}{81}$.

解法2　依题意知，ξ 的所有可能值为2，4，6.

令 A_k 表示甲在第 k 局比赛中获胜，则 $\overline{A}_k$ 表示乙在第 k 局比赛中获胜.

由独立性与互不相容性得

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2)=\frac{5}{9},$$

$$P(\xi=4)=P(A_1\overline{A}_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1A_2A_3A_4)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=2[(\frac{2}{3})^3\cdot(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})]=\frac{20}{81},$$

$$P(\xi=6)=P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)+P(\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4)=4\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2=\frac{16}{81},$$

故 $E\xi=2\times\dfrac{5}{9}+4\times\dfrac{20}{81}+6\times\dfrac{16}{81}=\dfrac{266}{81}$.

说明　此类问题的求解首先要分析事件的分布，然后计算相应的概率.

例4 (2010年福建省预赛试题) 如图3，记从“田字型”网格(由4个边长为1的正方形构成)的9个交点中任取3个点构成的三角形面积为 ξ(当所取的三点共线时，$\xi=0$)，则 ξ 的数学期望 $E\xi=$ ______.

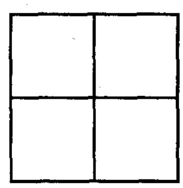

图3　例4图

分析　要求 ξ 的数学期望，需要先求出 ξ 的概率分布列，根据点的取法的不同，可知 ξ 的值(即相

应三角形的面积）可以为 $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$，故先考虑每一类三角形的个数.

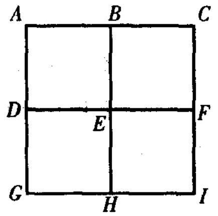

图 4 例 4 图

解 从 9 个点中取出三点的情形有 $C_9^3=84$ 种.

当 $\xi=0$ 时，三点共线，有 8 种情形；

当 $\xi=\frac{1}{2}$ 时，有 32 种情形.（分别以 AB、BC、GH、HI 为边的各有 3 个，共 12 个；分别以 DE、EF 为边的各有 6 个，共 12 个；另有三角形 HEA、HEC、EBG、EBI、GDB、DAH、IFB、HCF，共 32 个.）

当 $\xi=1$ 时，有 32 种情形.（分别以 GH、HI、GI、AB、BC、AC 为边的各有 3 个，共 18 个；以 DF 为边的有 6 个；另有三角形 GDC、DAI、IFA、FCG、HBF、HBD、GAE、ICE，共 32 个.）

当 $\xi=\frac{3}{2}$ 时，有 4 种情形.（$\triangle AHF$、$\triangle GBF$、$\triangle IDB$、$\triangle CDH$）

当 $\xi=2$ 时，有 8 种情形.（$\triangle AGI$、$\triangle GIC$、$\triangle ICA$、$\triangle CAG$、$\triangle BGI$、$\triangle DIC$、$\triangle HAC$、$\triangle FAG$）

所以，ξ 的概率分布列为

ξ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
P	$\frac{8}{84}$	$\frac{32}{84}$	$\frac{32}{84}$	$\frac{4}{84}$	$\frac{8}{84}$

ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\frac{8}{84}+\frac{1}{2}\times\frac{32}{84}+1\times\frac{32}{84}+\frac{3}{2}\times\frac{4}{84}+2\times\frac{8}{84}=\frac{5}{6}$.

例 5 （2009 年陕西省预赛试题）把长为 a 的线段分成三段，这三条线段能构成三角形的概率为________.

分析 要使三条线段能够构成三角形，则需满足任意两条线段的长度之和大于第三条线段的长，本题属于几何概型问题，可考虑引入变量，转化为考虑平面图形的“测度”的比.

解 设分成的三条线段的长分别为 $x,y,a-(x+y)$，则 $\begin{cases}0<x<a,\\0<y<a,\\x+y<a.\end{cases}$

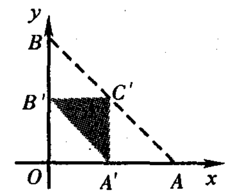

图 5 例 5 图

这个不等式组表示的平面区域为图 5 中的 $\triangle AOB$ 的内部（不含边界）.

这三条线段构成三角形的条件是

$$\begin{cases}x+y>a-(x+y),\\x+[a-(x+y)]>y,\\y+[a-(x+y)]>x,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x+y>\frac{a}{2},\\y<\frac{a}{2},\\x<\frac{a}{2}.\end{cases}$$

这个不等式组表示的平面区域为图 5 中的 $\triangle A'B'C'$ 的内部（不含边界），其中 A'，B'，C' 分别为 OA、OB、AB 的中点.

故这三条线段能构成三角形的概率为 $P=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{1}{4}$.

例 6 （2004 年全国联赛试题）一项“过关游戏”规则规定：在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次，如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 2^n，则算过关. 问：

（1）某人在这项游戏中最多能过几关？

（2）他连过前三关的概率是多少？

（注：骰子是一个在各面上分别有 1，2，3，4，5，6 点数的均匀正方体，抛掷骰子落地静止后，向上一面的点数为出现点数.）

分析 本题是等可能事件与独立事件结合的问题，可正反结合进行考虑.

解 由于骰子是均匀的正方体，所以抛掷后各点数出现的可能性是相同的.

（1）因骰子出现的点数最大为 6，所以，第 n 关抛掷骰子 n 次时，出现的点数和的最大值为 $6n$. 而 $6\cdot4>2^4$，$6\cdot5<2^5$，故当 $n\geqslant5$ 时，抛掷 n 次出现的点数之和大于 2^n 已不可能，这是一个不可能事件，最终过关的概率为 0. 所以最多只能连过 4 关.

（2）设事件 A_n 为“第 n 关过关失败”，则对立事件 $\overline{A}$ 为“第 n 关过关成功”. 第 n 关游戏中，基本事件总数为 6^n 个.

第 1 关：事件 A_1 所含基本事件数为 2（即出现点数 1 和 2 这两种情况）. 所以，过此关的概率为

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}.$$

第2关:事件A_2所含事件数为方程$x+y=a$当a分别取2,3,4时的正整数解组数之和,则有$C_1^1+C_2^1+C_3^1=6$(个).所以,过此关的概率为

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}.$$

第3关:事件A_3所含基本事件为方程$x+y+z=a$当a分别取3,4,5,6,7,8时的正整数解组数之和,则有$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2=56$(个).所以,过此关的概率为

$$P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-\frac{56}{6^3}=\frac{20}{27}.$$

故连过前三关的概率为$P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{20}{27}=\frac{100}{243}.$

评注　本题中第2、3关的基本事件数也可以列举出来.概率问题中,把所求问题在符合公式或结论前提的情况下对号入座,这是首选策略.

例7　(2005年全国联赛试题)将编号为1,2,3,…,9的九个小球随机的放置在圆周的九个等分点上,每一个等分点上各有一个小球.设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为S.求使得S达到最小值的放法的概率?(注:如果某种放法,经旋转或镜面反射与另一种放法重合,则认为是同一种放法)

分析　先要得到S达到最小值的条件,然后再计算有利事件(使得S达到最小值的事件)的总数.

解　九个编号不同的小球放在圆周的九个等分点上,每点上放一个,相当于九个不同元素在圆周上的一个圆排列,故共有8!种放法,考虑到翻转因素,则本质上不同的放法有$\frac{8!}{2}$种.

下求使得S达到最小值的放法数:在圆周上,从1到9有优弧与劣弧两条路径,对其中任一条路径,设$x_1,x_2,\cdots,x_k$是依次排列于这段弧上的小球号码,则

$$|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-9|$$
$$\geqslant|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-9)|$$
$$=8.$$

该式等号成立当且仅当$1<x_1<x_2<\cdots<x_k<9$,即每段弧上小球编号都是由1到9的递增排列.

因此S的最小值是$8\times2=16$.

由上可知,当每个弧上的球号$\{1,x_1,x_2,\cdots,x_k,9\}$确定之后,达到最小值的排法便唯一确定.在1,2,3,…,9中,除1与9外,剩下7个球号2,3,…,7,8,将它们分到两个集合中,元素较少的一个子集共有$C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=2^6$种情况,每种情况对应着圆周上使$S$达到最小值的一种排法,即有利事件的总数为$2^6$,故所求概率为$\frac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\frac{1}{315}$.

说明　本题涉及的是一个项链排列,应注意排列数的计算,防止重复或遗漏.

练习题

1.(2007年四川省预赛试题)从集合$\{1,2,3,\cdots,20\}$中任选3个不同的数排成一个数列,则这个数列为等差数列的概率是　(　　)

(A)$\frac{1}{76}$.　(B)$\frac{1}{38}$.

(C)$\frac{1}{19}$.　(D)$\frac{2}{19}$.

2.(2010年吉林省预赛试题)圆周上有10个等分点,则以这10个等分点中的四个点为顶点的凸四边形中,梯形所占的比为　(　　)

(A)$\frac{8}{21}$.　(B)$\frac{4}{21}$.

(C)$\frac{1}{126}$.　(D)$\frac{2}{7}$.

3.(2010年黑龙江省预赛试题)将一骰子抛掷两次,所得向上点数分别为m和n,则函数$y=\frac{2}{3}mx^3-nx+1$在$[1,+\infty)$上为增函数的概率为　(　　)

(A)$\frac{1}{2}$.　(B)$\frac{2}{3}$.

(C)$\frac{3}{4}$.　(D)$\frac{5}{6}$.

4.(2010年辽宁省预赛试题)设$A=\{(m,n)|0<m<2,0<n<2,m,n\in\mathbf{R}\}$,则任取$(m,n)\in A$,关于$x$的方程$\frac{m}{4}x^2+x+n=0$有实根的概率为

(　　)

(A) $\frac{1+2\ln 2}{4}$.　(B) $\frac{1+2\ln 2}{2}$.

(C) $\frac{3-2\ln 2}{4}$.　(D) $\frac{1-\ln 2}{2}$.

5.(2007年河北省预赛试题)同时抛掷两枚骰子,如果至少有一枚出现5点或6点,就称这次投掷为"好点",连续抛掷180次,那么出现"好点"的数学期望为________.

6.(2010年江苏省预赛试题)骰子是一个立方体,6个面上分别刻有1、2、3、4、5、6点.现有质地均匀的骰子10只.一次掷4只、3只骰子,分别得出各只骰子正面朝上的点数之和为6的概率的比为________.

7.(2010年全国省预赛试题)两人轮流投掷骰子,每人每次投掷两颗,第一个使两颗骰子点数和大于6者为胜,否则轮由另一人投掷.先投掷人的获胜概率是________.

8.(2010年陕西省预赛试题)从一个正方体的8个顶点中取出3个,则以这3个点为顶点构成直角三角形的概率为________.

9.(2010年甘肃省预赛试题)用3种颜色给正方体的8个顶点染色,其中至少有一种颜色恰好染4个顶点.则任一棱的两个端点都不同色的概率为________.

10.(2009年全国联赛试题)某车站每天8∶00～9∶00,9∶00～10∶00都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间是相互独立的,其规律为

到站时刻	8∶10 9∶10	8∶30 9∶30	8∶50 9∶50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客8∶20到车站,则它候车时间的数学期望为________(精确到分).

11.(2007年陕西省预赛试题)从1,2,3,…,10这10个号码中任意抽取3个号码,其中至少有两个号码是连续整数的概率是多少?

12.(加拿大第12届数学奥林匹克题)掷一枚硬币,每次正面出现得1分,反面出现得2分,试证:恰好得n分的概率是$\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^n]$.

练习题答案和提示

1.(B).　**2.**(D).　**3.**(D).　4.(B)

5. 100.　**6.** 1∶6.　**7.** $\frac{12}{17}$.　**8.** $\frac{6}{7}$.

9. $\frac{1}{35}$.　**10.** 27.

11. 设抽取的3个号码中,任何两个都不相邻,记这样的3个号码为$i,j,k(1\leqslant i<j<k\leqslant 10)$,则$i,j-1,k-2$互不相等,且仅从集合$\{1,2,3,\cdots,8\}$中取得,显然有$C_8^3$种取法.

另外从10个号码中取3个号码的取法有C_{10}^3种.

所以,所求的概率是$P=1-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{8}{15}$.

12. 设事件"恰好得n分"的概率为P_n,则$P_1=\frac{1}{2}$.

事件"恰好得2分"是"掷得2次正面或仅掷1次得反面",其对立事件为"得1分(概率为P_1)后又掷得1次反面",概率为$P_2=1-\frac{1}{2}P_1$;

事件"恰好得3分"是"掷得3次正面或掷2次得1次反面、1次正面",其对立事件为"得2分(概率为P_2)后又掷得1次反面",概率为$P_3=1-\frac{1}{2}P_2$;

……

事件"恰好得n分"的对立事件是"先得$n-1$分(概率为P_{n-1})后再掷得一次反面,恰好得了$n+1$分",所以有$P_n=1-\frac{1}{2}P_{n-1}$.

由$P_1=\frac{1}{2},P_2=1-\frac{1}{2}P_1,\cdots,P_n=1-\frac{1}{2}P_{n-1}$迭代得$P_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}$
$=\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^n]$.