

2013年广西“创新杯”数学竞赛高一初赛试题

参考解答及评分标准

一、选择题（每小题6分，共36分）

1. 已知实数 a, b, c 两两不等, 若 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$, 则实数 $x+y+z =$ ().

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 3

答: B. 解析: 设 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a} = k$, 则有 $x = k(a-b), y = k(b-c), z = k(c-a)$, 于是有

$$x+y+z=0.$$

2. 化简 $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$ ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

答: A. 解析: 分母有理化得:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \times \frac{3}{6} - \frac{5}{10}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in N, x \in Z\}$, 则集合 A 中的元素个数为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

答: D. 解析: $A = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in N, x \in Z\} = \{-3, 0, 1, 2\}$.

4. 从 $1, 2, \dots, 7$ 中选择若干个数, 使得其中偶数之和等于奇数之和. 则符合条件的取法有 () 种.

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

答: B. 解析: 注意到, $2+4+6=12$, 故所取出的数之和不大于 24 .

又 $12=2+4+6=5+7$, $10=4+6=3+7$, $8=2+6=1+7=3+5$, $6=6=2+4=1+5$, $4=4=1+3$,

故有 7 种取法.

5. 若 $a \in R, a^2+a < 0$, 那么 $a, a^2, -a, -a^2$ 的大小关系为 ().

- (A) $a^2 > a > -a^2 > -a$ (B) $-a > a^2 > -a^2 > a$ (C) $-a > a^2 > a > -a^2$ (D) $a^2 > -a > a > -a^2$

答: B. 解析: 由 $a^2+a = a(a+1) < 0 \Rightarrow -1 < a < 0$, 即 $-a > a^2$, 又 $-a^2 > a$, 得 B.

6. 观察下列各式：则 $7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401, \dots$ ，则 7^{2013} 的末两位数字为 ()。

- (A) 01 (B) 43 (C) 07 (D) 49

答案：C. 解析： $f(x) = 7^x, f(1) = 7, f(2) = 49, f(3) = 343, f(4) = 2401, f(5) = 16807, \dots, f(2013) = \dots 07$ 。

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

1. 若 $x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 8x + 4 = (x^2 + Cx + D)^2$ ，则 $A + B + C + D =$ _____。

答案：4.

解析：由 $x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 8x + 4 = (x^2 + Cx + D)^2$ 得，

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 8x + 4 = x^4 + 2Cx^3 + (C^2 + 2D)x^2 + 2CDx + D^2.$$

于是 $A = 2C, B = C^2 + 2D, -8 = 2CD, 4 = D^2$. 从而解得“ $D=2, C=-2, B=8, A=-4$ ，或者 $D=-2, C=2, B=0, A=4$ ”。因此答案为 4.

2. 方程 $x - 5 + \sqrt{x+1} = 0$ 的根为 _____。

答案： $x=3$ 。解析：令 $y = \sqrt{x+1}$ ，代入 $x - 5 + \sqrt{x+1} = 0$ 得 $y^2 + y - 6 = 0$ ，

解得 $y=2$ 或 $y=-3$ (增根，舍去)，即 $x=3$ 。

3. 若实数 $x > 0, y > 0$ ，且 $\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{y}(\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$ ，则 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y} =$ _____。

答案：2. 解析：由 $\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{y}(\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$ 得 $\sqrt{x} = 5\sqrt{y}$ 或 $\sqrt{x} = -3\sqrt{y}$ (舍去)，即 $x = 25y$ ，代入式子得结果。

4. 在 $\triangle ABC$ 中，D 在 AB 上且使得 $AD:DB=1:2$ ，而点 G 在 CD 上且使得 $CG:GD=3:2$ ，若 BG 交 AC 于 F，则 $BG:GF=$ _____。

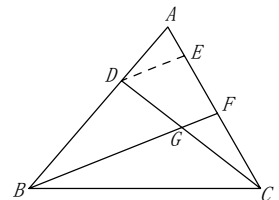
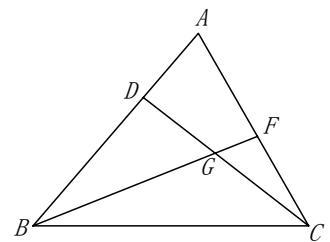
答案：4:1.

解析：过点 D 作 $DE \parallel BF$ 交 AC 于 E，则 $\triangle ADE \sim \triangle ABF$ ，

所以 $AD:AB = DE:BF = 1:3$ ，又 $\triangle CGF \sim \triangle CDE$ ，

所以 $CG:CD = GF:DE = 3:5$ ，故 $5GF = BF$ ，

即 $BG:GF = 4:1$ 。



5. 已知二次函数 $y = (m+2)x^2 - x + m + 4$ 的图象与 x 轴的交点在 y 轴的一左一右, 则实数 m 的取值范围为_____.

答案: $-2 < m < 4$. 解析: 由已知得 $\begin{cases} m+2 > 0 \\ m-4 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m+2 < 0 \\ m-4 > 0 \end{cases}$, 得 $-2 < m < 4$.

6. 一只小船顺流航行在甲、乙两个码头之间需 2 小时, 逆流航行这段路程需 3 小时, 那么一木块顺水漂流这段路需_____小时.

答案: 12. 解析: 设小船自身在静水中的速度为 v 千米/时, 水流速度为 x 千米/时, 甲乙之间的距离为 S 千米, 于是有 $v + x = \frac{S}{2}$, $v - x = \frac{S}{3}$ 求得 $2x = \frac{S}{6}$ 所以 $\frac{S}{x} = 12$.

(命题人: 广西恭城县恭城中学数学组 韦兴洲)

三、(20 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 C 为直角, $AD \parallel BC$,

$ED = 2AB$,

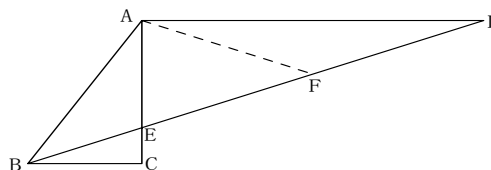
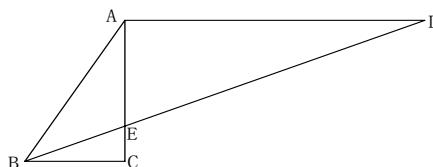
求证: $\angle ABE = \frac{2}{3} \angle ABC$.

证明: 取 ED 的中点 F , 连 AF .

则 $\angle AFB = 2 \angle ADE = 2 \angle EBC$,5 分

又 $AF = AB$, 所以 $\angle AFB = \angle ABE$,10 分

所以 $\angle ABE = \frac{2}{3} \angle ABC$20 分



四、(20 分) 已知 x 、 y 、 z 均为非负数, 且满足 $y + z - 1 = 4 - y - 2z = x$. 若 $w = 2x^2 - 2y + z$, 求 w 的最小值.

解: 由题设得, $y = 2x - 3 \geq 0$, $z = -2x + 3 \geq 0$. 则 $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 10 分

而 $w = 2x^2 - 2y + z = 2x^2 - 8x + 7 = 2(x - 2)^2 - 1$ 15 分

故当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $w_{\min} = -\frac{1}{2}$ 20 分

五、(20 分) 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x$, 且 $f(0) = 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式.

(II) 在区间 $[-1, 1]$ 上, $f(x)$ 的图象恒在 $y = 2x + m$ 的图象上方, 试确定实数 m 的范围.

解: (I) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 由 $f(0) = 1$ 得 $c = 1$,

故 $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

$$\because f(x+1)-f(x)=2x,$$

$$\therefore a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{即 } 2ax+a+b=2x,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore f(x)=x^2-x+1. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(II) 由题意得 $x^2-x+1>2x+m$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立. 即 $x^2-3x+1-m>0$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立.

设 $g(x)=x^2-3x+1-m$, 其图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$, $\dots\dots 15 \text{ 分}$

所以 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上递减.

故只需 $g(1)>0$, 即 $1^2-3\times 1+1-m>0$, 解得 $m<-1$. $\dots\dots 20 \text{ 分}$