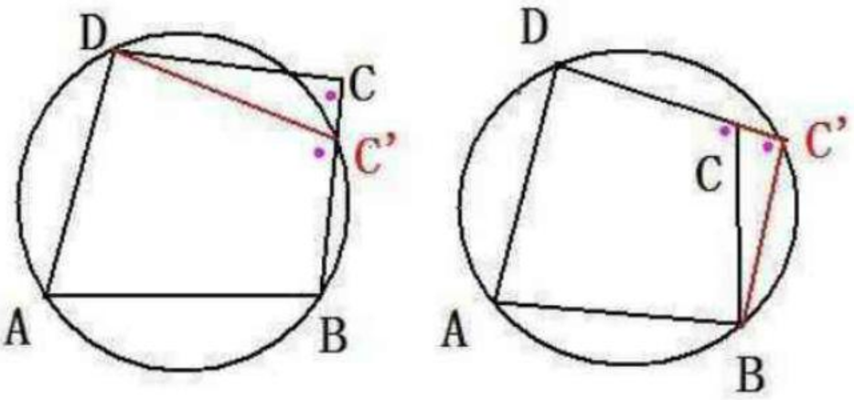
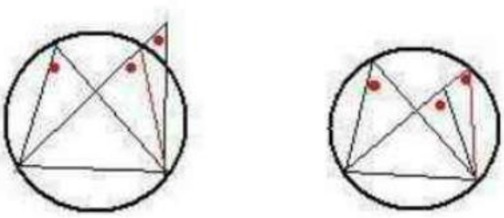
四点共圆





四点共圆的定义

四点共圆的**定义**：如果同一平面内的四个点在同一个圆上，则称这四个点共圆，一般简称为“**四点共圆**”。

证明四点共圆有下述一些基本方法：

【方法 1】 从被证共圆的四点中先选出三点作一圆，然后证另一点也在这个圆上，若能证明这一点，即可肯定这四点共圆．或利用圆的定义，证各点均与某一定点等距。

【方法 2 】如果各点都在某两点所在直线同侧，且各点对这两点的张角相等，则这些点共圆．（若能证明其两张角为直角，即可肯定这四个点共圆，且斜边上两点连线为该圆直径。）

【方法 3 】把被证共圆的四点连成四边形，若能证明其对角互补或能证明其一个外角等于其邻补角的内对角时，即可肯定这四点共圆．

【方法 4】 把被证共圆的四点两两连成相交的两条线段，若能证明它们各自被交点分成的两线段之积相等，即可肯定这四点共圆；或把被证共圆的四点两两连结并延长相交的两线段，若能证明自交点至一线段两个端点所成的两线段之积等于自交点至另一线段两端点所成的两线段之积，即可肯定这四点也共圆． 即利用相交弦、切割线、割线定理的逆定理证四点共圆。

【方法 5】 证被证共圆的点到某一定点的距离都相等，从而确定它们共圆．

【方法 6】 根据托勒密定理的逆定理，在四边形 ABCD 中，若 AC*BD=AB*CD+AD*BC，那么 A，B，C，D 四点共圆。或根据西姆松定理的逆定理证四点共圆。

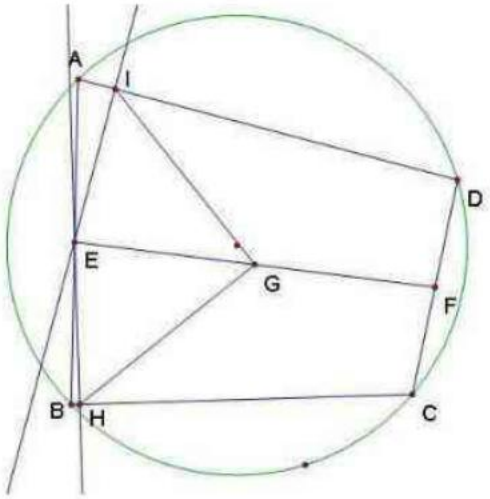
【方法 7】证明五点或五点以上的点共圆，可以分别证各四点共圆，且四点中有三点相同。

【方法 8】证连结各点所得凸多边形与某一圆内接凸多边形相似。

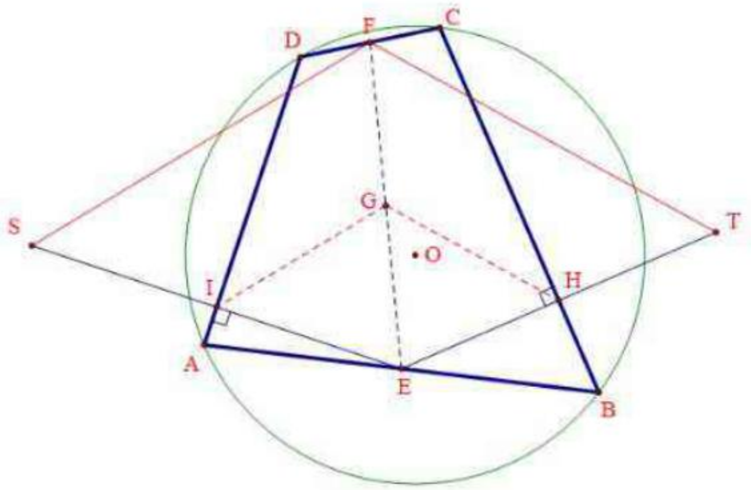
上述六种基本方法中的每一种的根据，就是产生四点共圆的一种原因，因此当要求证四点共圆的问题时，首先就要根据命题的条件，并结合图形的特点，在这 8 种基本方法中选择一种证法，给予证明.

一．某些知识的补充

1. 已知：ABCD 共圆，AB 中点为 E、CD 中点为 F，EF 中点为 G，过 E 点分别作 AD、 BC 的垂线，垂足为 H、I 求证：GH=GI

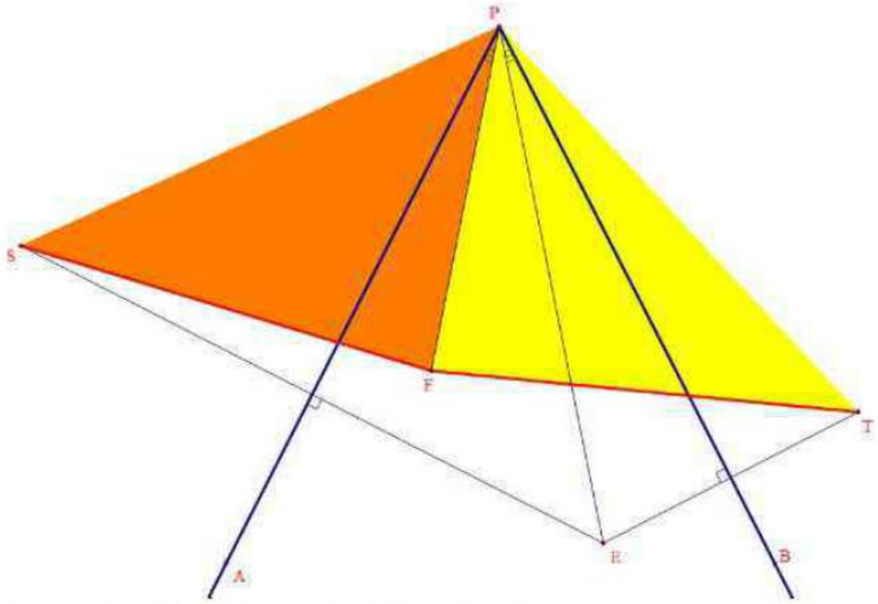


首先可这样转化图形：作 E 点关于 AD、BC 边的轴对称点 S、T，显然 I、H 分别是 ES、ET 中点。由中位线，可将原题转化为证：FS＝FT。再延长 AD、BC 相交于 P 点。由 A、B、C、D 是圆内接四边形。知△PCD∽△PAB，而 PF、PE 分别是这两个三角形的对应中线，故∠DPF＝∠BPE；这就表明 E 和 F 是∠APB 内的两个"等角点"（即指满足左、右两角相等）。



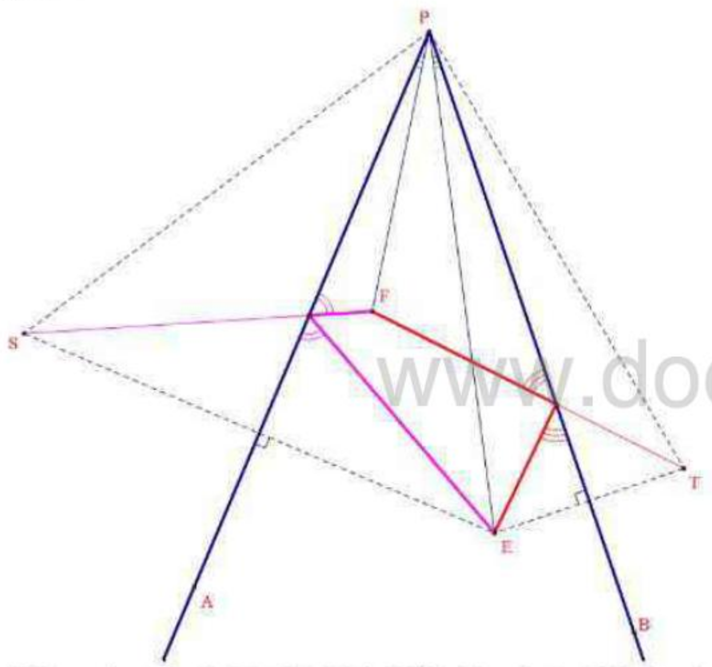
下面是**等角点**的一个常用性质（Poncelet 定理）：

"设 E、F 是∠APB 内的两点，满足∠APF＝∠BPE。作 E 关于 PA、PB 的轴对称点 S、T。求证：FS＝FT。"



其实，也可将 Poncelet 定理等价表述为：

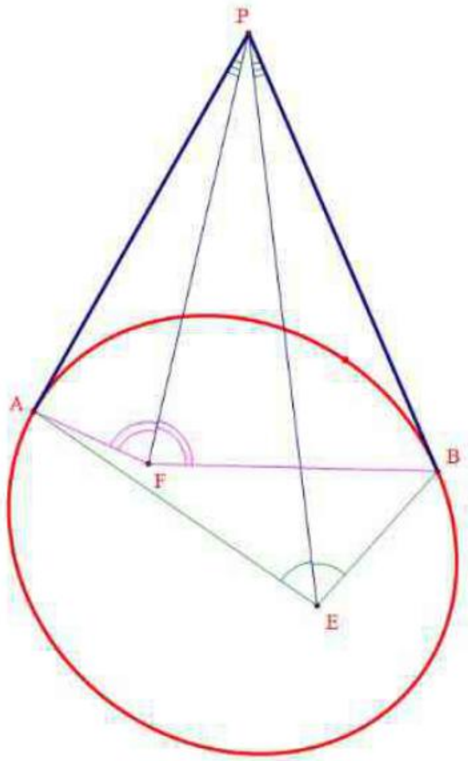
“∠APB 内的一对等角点 E、F（即满足∠APF＝∠BPE），关于 PA、PB 两边的光路反射路径长度一定相等！”



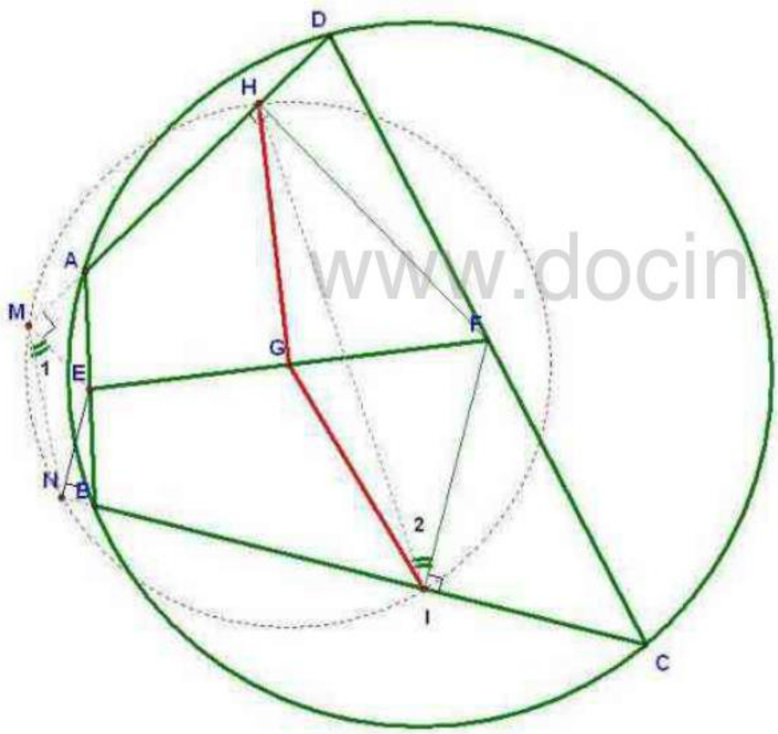
或者，亦可表述为圆锥曲线的性质（参见［法］J•阿达玛《几何（立体部分）》§495）：

“自椭圆（或双曲线）外一点 P 作两条切线 PA 和 PB，则该椭圆（或双曲线）的一对焦点 E、F 必关于∠APB 成等角关系；而且，自每个焦点，看两条切线的视角亦必相等（即下图中∠PEA＝∠PEB，∠PFA＝∠PFB）。”

注：其实，后面这两对角相等也可从上述全等三角形推出。



而这正是圆的切线长定理的推广形式！



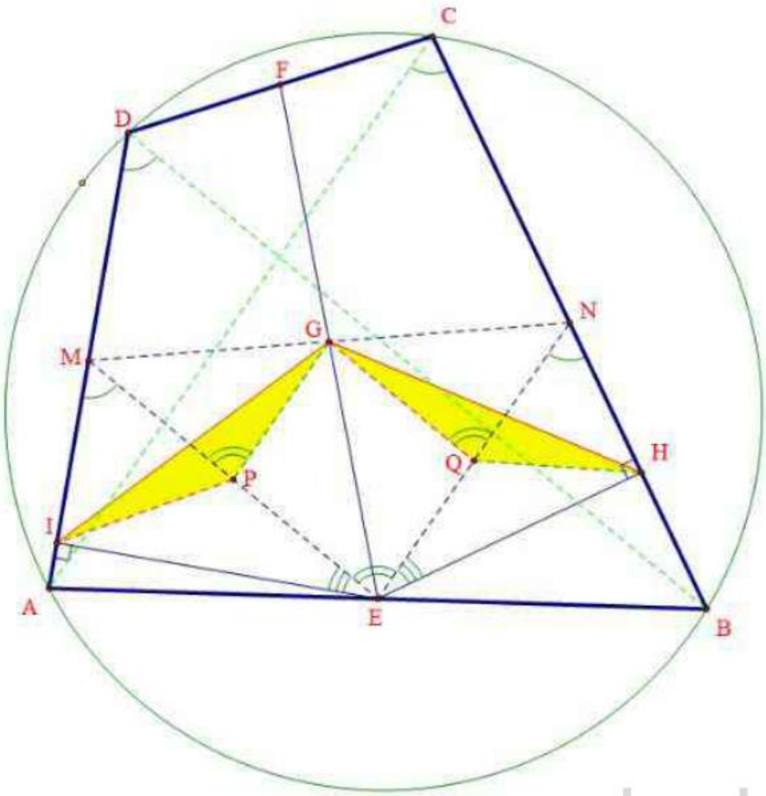
证明：过 E 做两边垂线，由四点共圆可证ΔEAM∽△FCI、ΔEBN∽△FDH,可得 EN/FH=EM/FI 又由平行可得大角相等，即得ΔENM∽△FHI,故∠1=∠2，有∠AMN+∠HIN=180°,所以 HINM 四点共圆，又显然 G 在 MH、NI 中垂线上，故 G 为圆心，即得 GH=GI

等角点的另一性质：

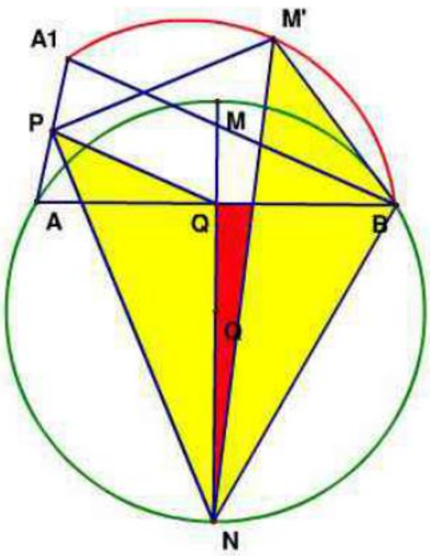
角内两点形成等角关系的另一充要条件是，它们在两边上的四个射影共圆！

所共圆圆心即为这组等角点的中点。”

证法 2：只需利用中位线和全等三角形的知识：
如图，联结 AD、BC 的中点 M、N，易知 G 也是 MN 的中点；再取 EM、EN 的中点 P、Q。则 PG、GQ 是中位线，IP、QH 直角三角形斜边上中线。
接下去证∆IPG≌△GQH 即可（SAS）。

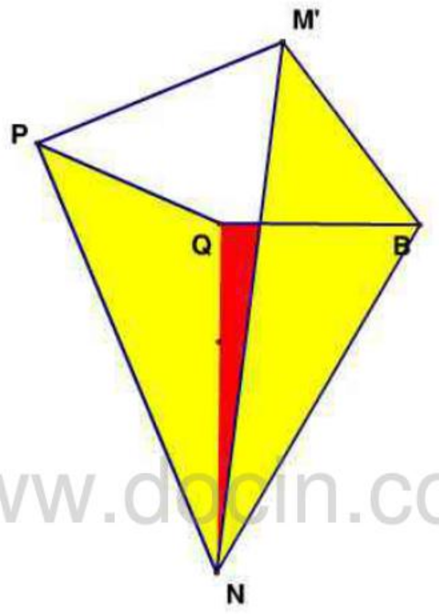


2. 2008 年北京市中学生数学竞赛高一年级决赛试题
圆 O 的直径 MN 和弦 AB 垂直于 Q,弓形 AMB 和弓形 M’A1B 全等,P 为 A1A 中点，M’为弧 A1B 中点.求证:PM’垂直于 PN.

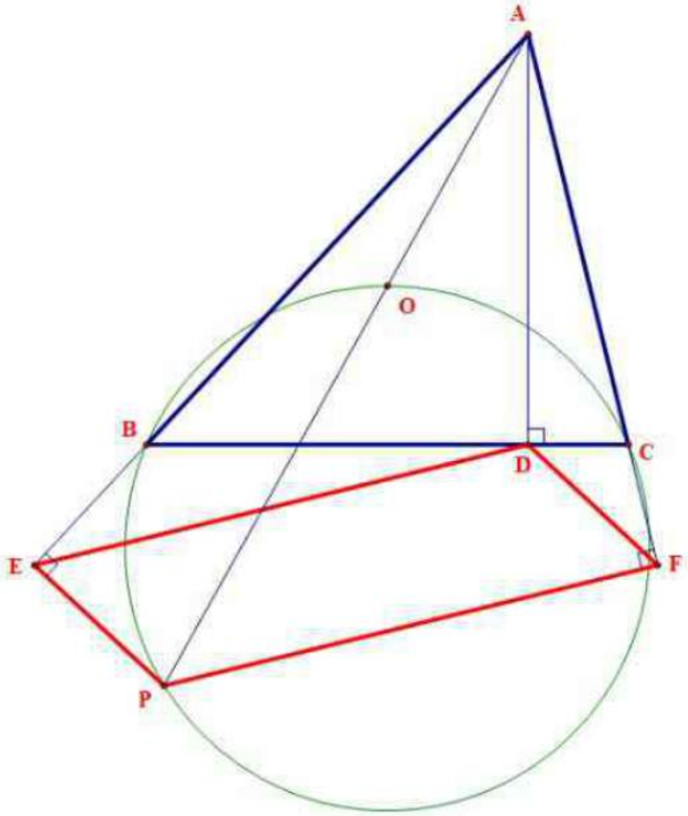


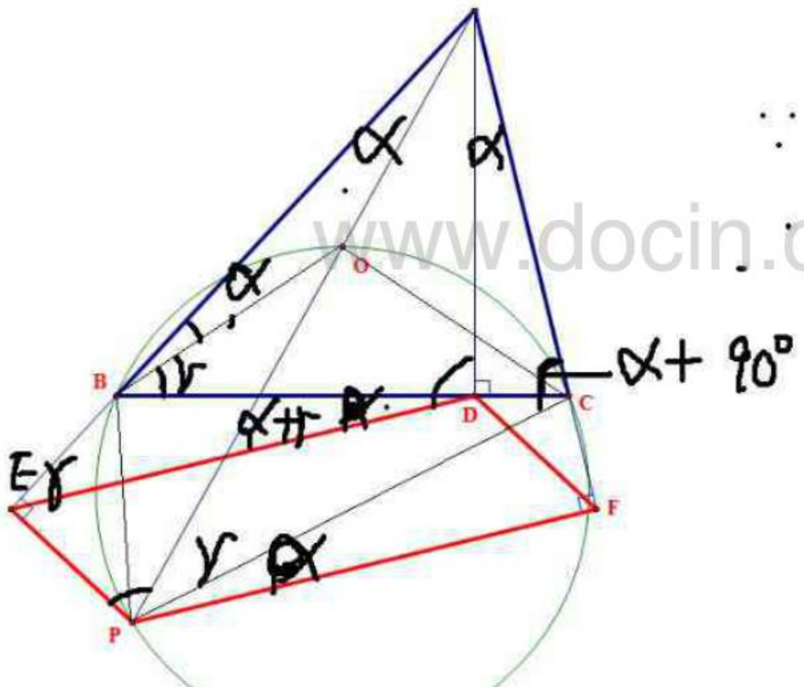
相似三角形共点定理

由ΔM′BN和ΔPQN相似
可得ΔM′PN和ΔBQN相似



3. 已知锐角ΔABC 中，AD 是高，O 是外心，AO 的延长线交过 O、B、C 三点的圆于 P，自 P 作 PE⊥AB 于 E，PF⊥AC 于 F。求证：DEPF 是平行四边形。





$$\because \frac{AD}{DE}=\frac{AC}{PC}=\frac{AD}{PF}$$

$$\therefore DE=PF$$

2．四点共圆例题讲解

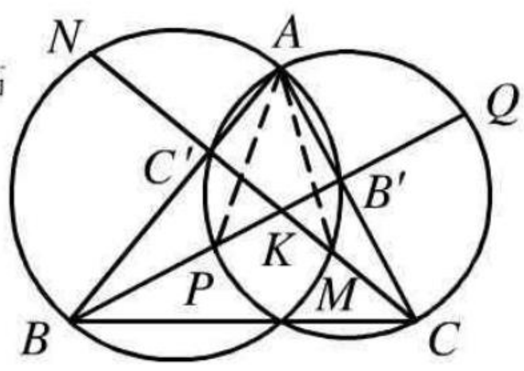
“四点共圆”问题在数学竞赛中经常出现，这类问题一般有两种形式：一是以“四点共圆”作为证题的目的，二是以“四点共圆”作为解题的手段，为解决其他问题铺平

道路.

1 以“四点共圆”作为证题目的

例1. 给出锐角$\triangle ABC$，以AB为直径的圆与AB边的高CC'及其延长线交于M，N. 以AC为直径的圆与AC边的高BB'及其延长线交于P，Q. 求证：M，N，P，Q四点共圆.

（第19届美国数学奥林匹克）



分析：设PQ，MN交于K点，连接AP，AM.

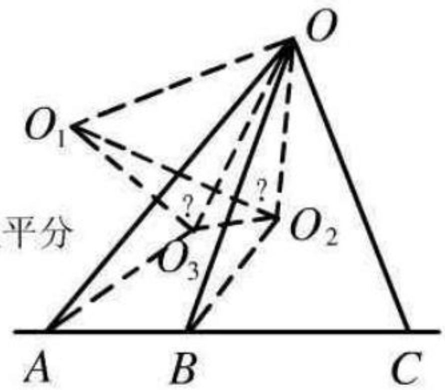
欲证M，N，P，Q四点共圆，须证

$MK \cdot KN=PK \cdot KQ$，

连结AK并延长交BC于点E，垂心+直径+相交弦定理

例2. A、B、C三点共线，O点在直线外，O_1，O_2，O_3分别为$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$的外心. 求证：O，O_1，O_2，O_3四点共圆.

（第27届莫斯科数学奥林匹克）



分析：作出图中各辅助线. 易证O_1O_2垂直平分OB，O_1O_3垂直平分OA. 观察$\triangle OBC$及其外接圆，立得$\angle OO_2O_1=\frac{1}{2}\angle OO_2B=\angle OCB$. 观察$\triangle OCA$及其外接圆，立得$\angle OO_3O_1=\frac{1}{2}\angle OO_3A=\angle OCA$. 由$\angle OO_2O_1=\angle OO_3O_1 \Rightarrow O$，$O_1$，$O_2$，$O_3$共圆.

利用对角互补，也可证明O，O_1，O_2，O_3四点共圆，请同学自证.

2 以“四点共圆”作为解题手段

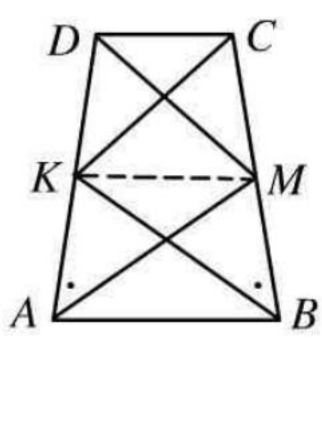
这种情况不仅题目多，而且结论变幻莫测，可大体上归纳为如下几个方面.

(1)证角相等

例3. 在梯形$ABCD$中，$AB \parallel DC$，$AB>CD$，K，M分别在AD，BC上，$\angle DAM=\angle CBK$.

求证：$\angle DMA=\angle CKB$.

（第二届祖冲之杯初中竞赛）



分析：易知A，B，M，K四点共圆. 连接KM，

有$\angle DAB=\angle CMK$. $\because \angle DAB+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle CMK+\angle KDC=180°$.

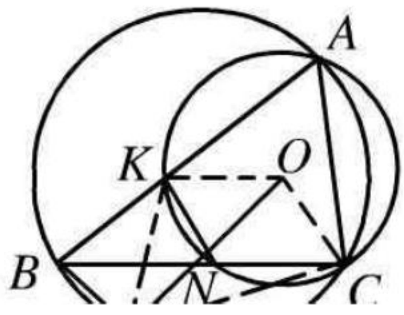
故C，D，K，M四点共圆$\Rightarrow \angle CMD=\angle DKC$.

但已证$\angle AMB=\angle BKA$，

$\therefore \angle DMA=\angle CKB$.

(2)证线垂直

例4. $\odot O$过$\triangle ABC$顶点A，C，且与AB，



BC 交于 K，N(K 与 N 不同)．$\triangle ABC$ 外接圆和$\triangle BKN$ 外接圆相交于 B 和 M. 求证：$\angle BMO=90°$．

（第 26 届 IMO 第五题）

分析：这道国际数学竞赛题，曾使许多选手望而却步．其实，只要把握已知条件和图形特点，借助“四点共圆”，问题是不难解决的．

连接 OC，OK，MC，MK，延长 BM 到 G. 易得$\angle GMC=\angle BAC=\angle BNK=\angle BMK$.

而$\angle COK=2\cdot\angle BAC=\angle GMC+\angle BMK=180°-\angle CMK$,

$\therefore\angle COK+\angle CMK=180°\Rightarrow C$，$O$，$K$，$M$ 四点共圆.

在这个圆中，由 $OC=OK\Rightarrow\ OC=OK\Rightarrow\angle OMC=\angle OMK$.

但$\angle GMC=\angle BMK$,

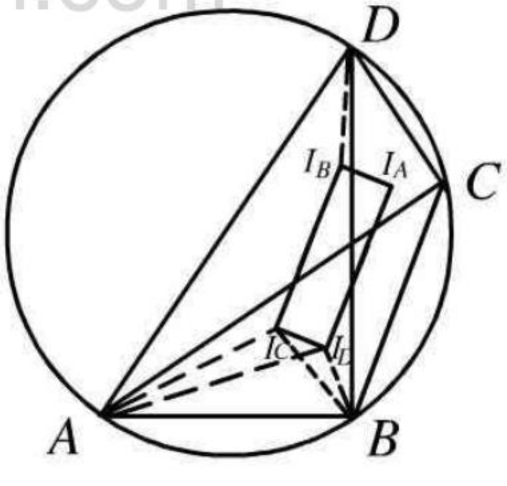
故$\angle BMO=90°$．

(3)判断图形形状

例 5．四边形 $ABCD$ 内接于圆，$\triangle BCD$，$\triangle ACD$，$\triangle ABD$，$\triangle ABC$ 的内心依次记为 I_A，I_B，I_C，I_D.

试证：$I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

（第一届数学奥林匹克国家集训选拔试题）



分析：连接 AI_C，AI_D，BI_C，BI_D 和 DI_B. 易得

$\angle AI_CB=90°+\frac{1}{2}\angle ADB=90°+\frac{1}{2}$

$\angle ACB=\angle AI_DB\Rightarrow A$，$B$，$I_D$，$I_C$ 四点共圆.

同理，A，D，I_B，I_C 四点共圆. 此时

$\angle AI_CI_D=180°-\angle ABI_D=180°-\frac{1}{2}\angle ABC$,

$\angle AI_CI_B=180°-\angle ADI_B=180°-\frac{1}{2}\angle ADC$,

$\therefore\angle AI_CI_D+\angle AI_CI_B$

$=360°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ADC)$

$=360°-\frac{1}{2}\times180°=270°$．

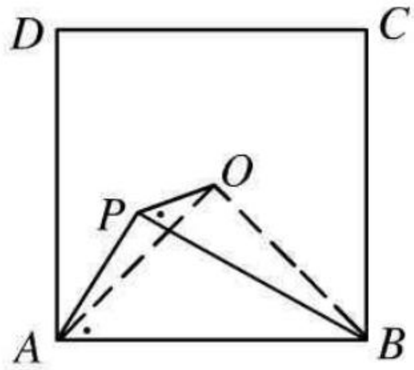
故$\angle I_BI_CI_D=90°$．

同样可证 $I_AI_BI_CI_D$ 其它三个内角皆为 90°．该四边形必为矩形.

(4)计算

例 6．正方形 $ABCD$ 的中心为 O，面积为 1989 ㎝ ^{2}. P 为正方形内一点，且 $\angle OPB=45°$，$PA:PB=5:14$. 则 $PB=$__________

(1989，全国初中联赛)



分析：答案是 $PB=42$ ㎝. 怎样得到的呢？

连接 OA，OB. 易知 O，P，A，B 四点共圆，有 $\angle APB=\angle AOB=90°$．

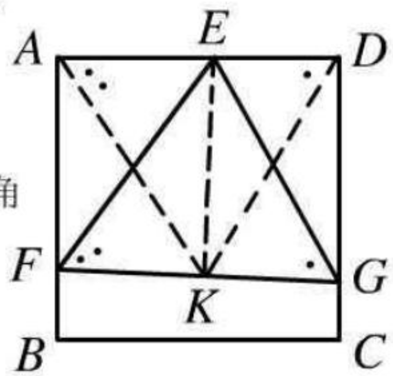
故 $PA^2+PB^2=AB^2=1989$.

由于 $PA:PB=5:14$，可求 PB.

(5)其他

例 7．设有边长为 1 的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积(须证明你的论断).

(1978，全国高中联赛)



分析：设△EFG 为正方形 $ABCD$ 的一个内接正三角形，由于正三角形的三个顶点至少必落在正方形的三条边上，所以不妨令 F，G 两点在正方形的一组对边上.

作正△EFG 的高 EK，易知 E，K，G，D 四点共圆 $\Rightarrow \angle KDE=\angle KGE=60°$．同理，$\angle KAE=60°$．故△$KAD$ 也是一个正三角形，K 必为一个定点.

又正三角形面积取决于它的边长，当 $KF \perp AB$ 时，边长为 1，这时边长最小，而面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 也最小. 当 KF 通过 B 点时，边长为 $2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$，这时边长最大，面积 $S=2\sqrt{3}-3$ 也最大.

例 8．NS 是⊙O 的直径，弦 $AB \perp NS$ 于 M，P 为 $\overset{\frown}{ANB}$ 上异于 N 的任一点，PS 交 AB 于 R，PM 的延长线交⊙O 于 Q. 求证：$RS>MQ$.

(1991，江苏省初中竞赛)

分析：连接 NP，NQ，NR，NR 的延长线交⊙O 于 Q'．连接 MQ'，SQ'．

易证 N，M，R，P 四点共圆，从而，$\angle SNQ'=\angle MNR=\angle MPR=\angle SPQ=\angle SNQ$.

根据圆的轴对称性质可知 Q 与 Q' 关于 NS 成轴对称 $\Rightarrow MQ'=MQ$.

又易证 M，S，Q'，R 四点共圆，且 RS 是这个圆的直径($\angle RMS=90°$)，MQ' 是一条弦($\angle MSQ'<90°$)，故 $RS>MQ'$．但 $MQ=MQ'$，所以，$RS>MQ$.

练习题

1. $\odot O_1$交$\odot O_2$ 于A，B两点，射线O_1A交$\odot O_2$ 于C点，射线O_2A交$\odot O_1$ 于D点. 求证：点A是$\triangle BCD$的内心.
(提示：设法证明C，D，O_1，B四点共圆，再证C，D，B，O_2四点共圆，从而知C，D，O_1，B，O_2五点共圆.)

2. $\triangle ABC$ 为不等边三角形. $\angle A$ 及其外角平分线分别交对边中垂线于 A_1，A_2；同样得到B_1，B_2，C_1，C_2. 求证：$A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2$.
(提示：设法证$\angle ABA_1$与$\angle ACA_1$互补造成A，B，A_1，C四点共圆；再证A，A_2，B，C四点共圆，从而知A_1，A_2都是$\triangle ABC$的外接圆上，并注意$\angle A_1AA_2=90°$.)

3. 设点M在正三角形三条高线上的射影分别是M_1，M_2，M_3(互不重合). 求证：$\triangle M_1M_2M_3$也是正三角形.

4. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，AD为斜边BC上的高，P是AB上的点，过A点作PC的垂线交过B所作AB的垂线于Q点. 求证：$PD\perp QD$.
(提示：证B，Q，E，P和B，D，E，P分别共圆)

5. AD，BE，CF是锐角$\triangle ABC$的三条高. 从A引EF的垂线l_1，从B引FD的垂线l_2，从C引DE的垂线l_3. 求证：l_1，l_2，l_3三线共点. (提示：过B作AB的垂线交l_1于K，证：A，B，K，C四点共圆)