数学活动课程讲座

高中数学竞赛中的几道四点共圆题

黄志军

（南京外国语学校，222008）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2014)07-0002-05

（本讲适合高中）

数学竞赛中的平面几何问题以其优美和精巧的构思吸引着广大数学竞赛爱好者，以其经典的知识、方法、技巧展示它丰富的数学思想方法的魅力. 如果平面几何问题是数学竞赛中一道亮丽的风景，那么，四点共圆问题便是这道风景中的一泓清泉. 数学竞赛中的四点共圆问题通常以证"四点共圆"为目标或以证"四点共圆"手段，为进一步解决问题做准备. 本文通过几例具有高中数学竞赛难度的题，作一探索.

1 以证"四点共圆"为目标

例1 如图1，在▱$ABCD$中，$\odot O$过A、B、C三点，E为BC上一点，记$\triangle ABE$的外接圆为$\odot P$，$PF\perp BC$，PF与AB交于点F，CF与$\odot O$交于点G. 证明：G、E、C、D四点共圆.

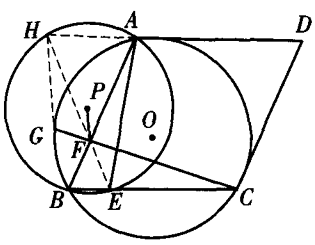

图1

【分析与证明】如图1，延长EF，与$\odot P$交于点H，联结HG、HA.

因为$PF\perp BC$，所以，由对称性知

$AH /\!/ BE$

$\Rightarrow H$、A、D三点共线$\Rightarrow EH=BA=CD$

$\Rightarrow$四边形$HECD$为等腰梯形

$\Rightarrow H$、E、C、D四点共圆.

由相交弦定理知

$FH\cdot FE=FA\cdot FB=FG\cdot FC$.

因此，H、G、E、C四点共圆.

从而，H、G、E、C、D五点共圆.

于是，G、E、C、D四点共圆.

例2 如图2，锐角$\triangle ABC$的垂心为H，E是线段CH上的任意一点，延长CH到点F，使$HF=CE$，作$FD\perp BC$，$EG\perp BH$，D、G为垂足，M是线段CF的中点，O_1、O_2分别为$\triangle ABG$、$\triangle BCH$的外接圆圆心，$\odot O_1$、$\odot O_2$的另一交点为N. 证明：

(1)A、B、D、G四点共圆；

(2)O_1、O_2、M、N四点共圆.

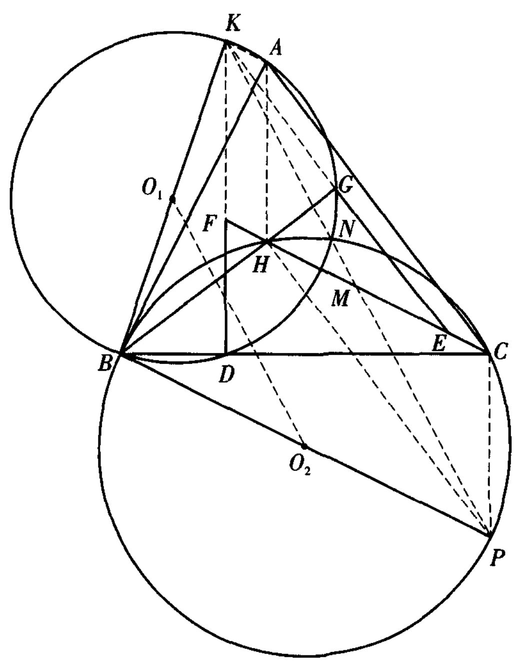

图2

【分析与证明】(1)如图2，设EG与DF交于点K，联结AH.

由$AC\perp BH$，$EK\perp BH$，$AH\perp BC$，$KF\perp BC$，得

收稿日期：2014-05-08

$CA // EK, AH // KF, CH = EF$.

所以，$\triangle CAH \cong \triangle EKF$，$AH \underline{\parallel} KF$.

则 $AK // HF$.

故 $\angle KAB = 90° = \angle KDB = \angle KGB$.

因此，A、B、D、G 四点共圆.

(2)据(1)，知 BK 为$\odot O_1$ 的直径.

作$\odot O_2$ 的直径 BP，联结 CP、KP、HP、O_1O_2.

则 $\angle BCP = \angle BHP = 90°$.

所以，$CP // AH, HP // AC$.

从而，四边形 $AHPC$ 为平行四边形.

于是，$PC \underline{\parallel} KF$.

因此，$\square KFPC$ 的对角线 KP 与 CF 互相平分于点 M.

故 O_1、O_2、M 是$\triangle KBP$ 三边的中点，$KM // O_1O_2$.

而由$\angle KNB = 90°$，$O_1O_2 \perp BN$，得 $KN // O_1O_2$.

所以，M、N、K 三点共线.

因此，$MN // O_1O_2$.

又由$\triangle KBP$ 的中位线知 $MO_2 = O_1B = O_1N$.

故四边形 O_1O_2MN 是等腰梯形，其顶点共圆.

例 3 如图 3，在锐角$\triangle ABC$ 中，$AC > BC$. 设 O、H 分别是$\triangle ABC$ 的外心、垂心，$CF \perp AB$ 于点 F. 令 P 是直线 AB 上一点(P 不与点 A 重合)，满足 $AF = PF$. 记 G 是边 AC 的中点，直线 PH 与 BC 交于点 X，OG 与 FX、OF 与 AC 分别交于点 Y、Z. 证明：F、G、Z、Y 四点共圆.

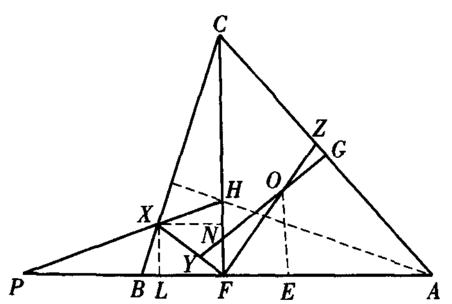

图 3

【分析与证明】如图 3，要证明 F、G、Z、Y 四点共圆，由

$\angle YGZ = \angle OGZ = 90°$，

知只需证$\angle OFX = 90°$.

作 $OE \perp AB$ 于点 E. 则 $CH = 2OE$.

由题设有 $PB = PF - BF = AF - BF = 2EF$.

另一方面，由$\angle HPB = \angle HAB = \angle HCB$，知 P、B、H、C 四点共圆.

因此，$\triangle PXB \backsim \triangle CXH$.

作 $XL \perp AB$ 于点 L，$XN \perp CF$ 于点 N.

则$\frac{XL}{LF} = \frac{XL}{XN} = \frac{PB}{CH} = \frac{2EF}{2OE} = \frac{EF}{OE}$.

又$\angle XLF = \angle FEO$，故$\triangle XLF \backsim \triangle FEO$.

从而，$\angle XFL = \angle FOE$.

则$\angle XFO = 180° - \angle XFL - \angle OFE$

$= 180° - \angle FOE - \angle OFE = 90°$.

例 4 如图 4，在$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点，G 为$\triangle ABC$ 的重心，$\triangle BCF$ 外接圆$\odot O$ 与 BE 交于点 M，$\triangle ABE$ 外接圆$\odot O'$ 与 AD 交于点 N，MD 与 FN 交于点 L. 证明：L、N、M、G 四点共圆.

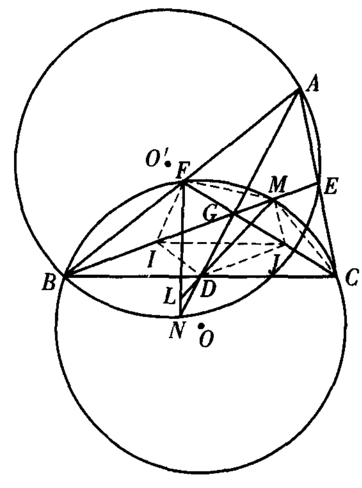

图 4

【分析与证明】根据重心性质知

$AG = 2DG, BG = 2EG, CG = 2FG$.

如图 4，取 I、J 分别为 BG、CG 的中点.

则 $IJ // BC$

$\Rightarrow \angle GIJ = \angle GBC = \angle GFM$

$\Rightarrow F$、I、J、M 四点共圆.

接下来证明$\triangle MDJ \backsim \triangle FNG$.

由 F、I、J、M 四点共圆

$\Rightarrow \frac{MJ}{FI} = \frac{GJ}{GI}$

$\Rightarrow MJ = \frac{GJ \cdot FI}{GI} = \frac{GF \cdot AG}{GB}$

$\Rightarrow \frac{MJ}{FG} = \frac{AG}{BG}$.

又 A、B、N、E 四点共圆

$\Rightarrow \frac{DJ}{NG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BG}{NG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AG}{EG} = \frac{AG}{BG}$.

从而，$\frac{MJ}{FG}=\frac{DJ}{NG}$.

由$\angle MJD=180^\circ-\angle GMI$

$=180^\circ-\angle GFI=\angle FGN$,

得 $\triangle MDJ\backsim\triangle FNG$

$\Rightarrow\angle LND=\angle MDJ=\angle GMD$

$\Rightarrow L、N、M、G$四点共圆.

2 以证"四点共圆"为手段

例5 如图5，已知四边形$ABCD$是圆内接四边形，其对角线AC与BD互相垂直. 点F在边BC上，直线$EF/\!/AC$，并与AB交于点E，直线$FG/\!/BD$，并与CD交于点G. 设点E在CD上的射影为P，点F在DA上的射影为Q，点G在AB上的射影为R. 证明：QF平分$\angle PQR$.

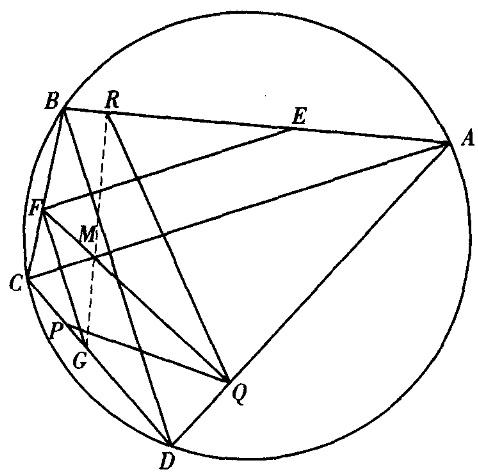

图5

证明 联结GR，与直线FQ交于点M.

下面证明：点M在AC上.

事实上，由$AC\perp BD$，$FG/\!/BD$，知$FG\perp AC$.

结合$FQ\perp AD$及$A、B、C、D$四点共圆，得

$\angle QFC=360^\circ-90^\circ-\angle ADC-\angle DCF$

$=(180^\circ-\angle ADC-\angle ACD)+(90^\circ-\angle ACF)$

$=\angle CAD+\angle CFG$

$=\angle CBD+\angle CFG$

$=2\angle CFG$.

因此，$\angle CFG=\angle QFG$.

同理，$\angle CFG=\angle RGF$.

于是，$\triangle CFG\cong\triangle MFG$.

由四边形$CFMG$是筝形，知其对角线CM与FG垂直.

故$C、M、A$三点共线.

注意到，$\angle MRA=\angle MQA=90^\circ$.

因此，$A、R、M、Q$四点共圆.

于是，$\angle FQR=\angle MQR=\angle MAR=\angle CAB$.

同理，$FQ、EP、BD$交于一点N，且$D、P、N、Q$四点共圆.

类似得$\angle FQP=\angle CDB$.

又$A、B、C、D$四点共圆，故$\angle CAB=\angle CDB$.

从而，$\angle FQR=\angle FQP$.

例6 已知四边形$ABCD$内接于$\odot O$，对边AB与DC交于点P，AD与BC交于点Q，过点$A、B$的圆与直线PQ分别切于点$M、N$. 证明：直线MB与ND的交点在$\odot O$上.

证明 如图6，在PQ上取点K，使得$P、K、C、B$四点共圆.

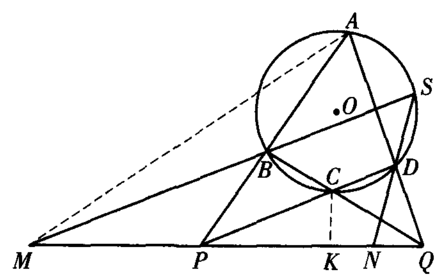

图6

则$\angle PKC=\angle ABC=\angle CDQ$.

于是，$C、K、D、Q$四点共圆.

由割线定理得

$PB\cdot PA+QD\cdot QA=PC\cdot PD+QC\cdot QB$

$=PK\cdot PQ+QK\cdot QP=PQ^2$.

由切割线定理得$PM^2=PN^2=PB\cdot PA$.

故$QD\cdot QA=PQ^2-PB\cdot PA=PQ^2-PM^2$

$=(PQ+PM)(PQ-PN)=NQ\cdot QM$.

于是，$M、N、D、A$四点共圆.

则$\angle DNQ=\angle MAQ$.

由$PM^2=PA\cdot PB\Rightarrow\frac{PM}{PB}=\frac{PA}{PM}$.

又$\angle BPM=\angle MPA$，得

$\triangle PBM\backsim\triangle PMA$

$\Rightarrow\angle BMP=\angle MAP$.

因此，$\angle DNQ-\angle BMP=\angle MAQ-\angle MAP$，即$\angle S=\angle BAD$.

所以，直线$MB、ND$的交点在$\odot O$上.

例7 已知凸四边形$ABCD$内接于$\odot O$，对角

线 AC 与 BD 交于点 P，过 P 分别作直线 AB、BC、CD、DA 的垂线，垂足分别为 E、F、G、H. 证明：EH、BD、FG 三线共点或互相平行.

【分析与证明】如图 7，联结 EF、GH.

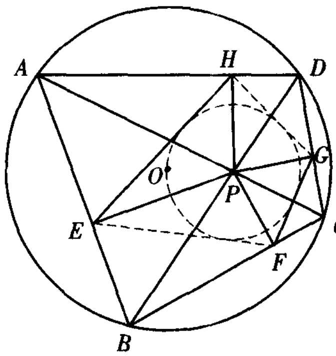

图 7

由 $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，知 P、E、B、F 四点共圆.

同理，P、E、A、H 四点共圆.

则 $\angle PEH=\angle PAH=\angle DBC=\angle PEF$.

这表明，PE 平分 $\angle HEF$.

同理，PF 平分 $\angle EFG$，PG 平分 $\angle HGF$.

故点 P 到 EF、FG、GH、HE 四边的距离相等.

从而，P 为四边形 $EFGH$ 的内切圆圆心.

作四边形 $EFGH$ 的内切圆 $\odot P$.

记 $\angle AHE=\alpha_1$，$\angle ADB=\beta_1$，

$\angle CGF=\alpha_2$，$\angle CDB=\beta_2$.

由 $PE\perp AB$，$PH\perp AD$，知 P、E、A、H 四点共圆.

故 $\angle APE=\angle AHE=\alpha_1$.

同理，$\angle ACB=\angle ADB=\beta_1$，

$\angle FPC=\angle CGF=\alpha_2$，

$\angle CAB=\angle CDB=\beta_2$.

由 $PE\perp AB$

$\Rightarrow\angle APE+\angle PAE=90^\circ=\alpha_1+\beta_2$.

同理，$\alpha_2+\beta_1=90^\circ$.

于是，$\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2$.

则 EH、FG 与 BD 的夹角相等.

又 EH、FG 均为 $\odot P$ 的切线，则点 P 在 BD 上.

所以，EH、BD、FG 三直线共点或互相平行.

例 8 在等腰 $\triangle ABC$ 中，以底边 BC 的中点 O 为圆心作 $\odot O$，分别与两腰 AB、AC 切于点 E、F，D 是 $\odot O$ 下半圆弧上的任意一点，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，与 AB、AC 的延长线分别交于点 M、N. 过点 M 作平行于 AC 的直线，与 FE 的延长线交于点 P. 证明：P、B、N 三点共线.

【分析与证明】如图 8，用同一法.

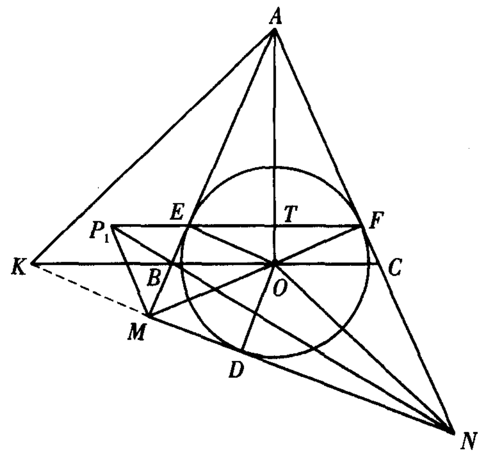

图 8

设直线 NB 与 FE 交于点 P_1.

由于 O 是 $\triangle AMN$ 的内心，若记

$$\alpha=\frac{1}{2}\angle A,\ \beta=\frac{1}{2}\angle AMN,\gamma=\frac{1}{2}\angle ANM,$$

则 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，$\angle AOM=\frac{\pi}{2}+\gamma$.

作 $MK\perp AM$，与 BC 交于点 K.

则 A、O、M、K 四点共圆.

故 $\angle AKM=\pi-\angle AOM=\frac{\pi}{2}-\gamma=\angle NOF$.

而 $\angle KBM=\angle OBE=\angle OCF$，于是，

$\triangle AMK\backsim\triangle NFO$，$\triangle BMK\backsim\triangle CFO$，

$\triangle ABK\backsim\triangle NCO$.

由此得 $\frac{AM}{MB}=\frac{NF}{FC}$.

又由 $BC/\!/P_1F\Rightarrow\frac{NF}{FC}=\frac{NP_1}{P_1B}$.

因此，$\frac{AM}{MB}=\frac{NP_1}{P_1B}$.

于是，$\frac{AB}{MB}=\frac{NB}{P_1B}$.

故 $MP_1/\!/NA$.

而由条件知 $MP/\!/NA$，且点 P 在 EF 上，于是，点 P 与 P_1 重合.

所以，P、B、N 三点共线.

练习题

1. 如图9,已知AB、CD是$\odot O$的两条直径,P是圆周上任一点,作$PM\perp AB$,$PN\perp CD$,$AH\perp CD$.证明:$MN=AH$.

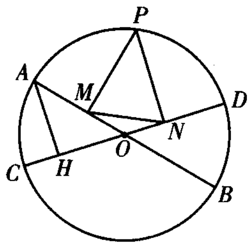

图9

提示:先证P、M、O、N四点共圆,并在以OP为直径的圆上.又$\triangle AOH$和$\triangle PMN$的外接圆半径相等,故$AH=MN$.

2. 如图10,已知四边形$ABCD$是圆内接四边形,AC是圆的直径,$BD\perp AC$,AC与BD交于点E,点F在DA延长线上,联结BF.点G在BA延长线上,使$DG\parallel BF$,H在GF的延长线上,$CH\perp GF$.证明:B、E、F、H四点共圆.

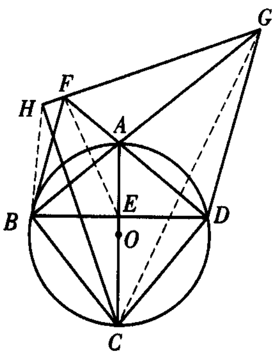

图10

提示:C、B、H、G四点共圆

$\Rightarrow\angle BHC=\angle BGC=\angle AEF$

$\Rightarrow\angle BHF+\angle BEF=180°$

$\Rightarrow B$、H、F、E四点共圆.

3. 如图11,两圆Γ_1、Γ_2交于点A、B,过点B的一条直线分别与圆Γ_1、Γ_2交于点C、D,过点B的另一条直线分别与圆Γ_1、Γ_2交于点E、F,直线CF分别与圆Γ_1、Γ_2交于点P、Q.设M、N分别是弧$\overset{\frown}{PB}$、$\overset{\frown}{QB}$的中点.若$CD=EF$,证明:C、F、M、N四点共圆.

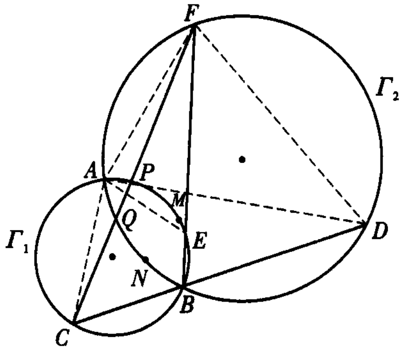

图11

提示:先证BA、CM、FN分别为$\triangle BCF$的角平分线,交于内心I.

在圆Γ_1、Γ_2中,由圆幂定理得

$CI\cdot IM=AI\cdot IB$,$AI\cdot IB=NI\cdot IF$,

$NI\cdot IF=CI\cdot IM$.

从而,C、F、M、N四点共圆.

4. 如图12,PA、PB分别与$\odot O$切于点A、B,C为弧$\overset{\frown}{AB}$上一点,过C作$DE\perp PC$,分别与$\angle AOC$、$\angle BOC$的平分线交于点D、E.证明:$CD=CE$.

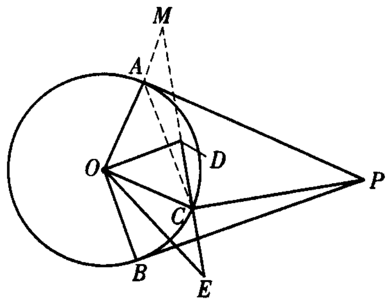

图12

提示:设直线DE与OA交于点M.则P、C、A、M四点共圆.

易知,$\triangle PAC\backsim\triangle MOD\Rightarrow\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{MD}{MO}$.

故由OD平分$\angle AOC\Rightarrow\dfrac{CD}{CO}=\dfrac{MD}{MO}=\dfrac{PC}{PB}$.

因为$PA=PB$,所以,$CD=CE$.

5. 已知$\triangle A_1B_1C_1$的三个顶点A_1、B_1、C_1分别是$\triangle ABC$三边所在直线BC、CA、AB上的点,且满足$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$.证明:$\triangle A_1B_1C_1$的垂心$H$与$\triangle ABC$的外心重合.

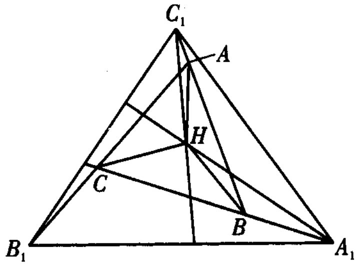

图13

提示:先证A_1、B、H、C_1四点共圆,有$\angle HBA=\angle HA_1C_1$,且点$H$不在$\triangle A_1C_1B$的内部.

同理,点H不在$\triangle A_1B_1C$、$\triangle AB_1C_1$的内部.

故H必在$\triangle ABC$的内部.

因此,$\angle HAB=\angle HBA\Rightarrow HA=HB$.

同理,$HA=HC$.

从而,H为$\triangle ABC$的外心.