2010 年新知杯上海市高中数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)05－0029－03

【说明】解答本试题不得使用计算器.

一、填空题(前 4 小题每题 7 分,后 4 小题每题 8 分,共 60 分)

1. 函数 $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\right)$ 的定义域是______,值域是______.

2. 若 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使等式

$$\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|+\sum_{k=1}^{n}\left|\lg\frac{1}{x_k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\lg x_k\right|$$

成立,则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值分别是______.

3. 平面直角坐标系内有 $\triangle ABC$,顶点为 $A(3,0)$、$B(0,2)$、$C(0,-1)$,两平行直线 $x=t$, $x=\frac{t}{2}(0<t\leqslant3)$ 之间与 $\triangle ABC$ 公共部分的面积记为 $S(t)$. 则当 t 变化时,$S(t)$ 的最大值是______.

4. 设甲袋中有 4 只白球、5 只红球、6 只黑球;乙袋中有 7 只白球、6 只红球、2 只黑球. 若从两袋中各取一球,则两球颜色不同的概率是______(用最简分数作答).

5. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两个焦点,M 是该双曲线右支上的点,O 为坐标原点. 若 $\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}=\sqrt{6}$,则点 M 的坐标为______.

6. 满足

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N})$$

的 $2n-1$ 位十进制正整数

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$$

共有______个(用数值作答).

7. 设 $f(x)$ 是整系数多项式,$f(0)=11$,又存在 n 个不同整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=2\,010.$$

则 n 的最大值是______.

8. 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=5$,$BC=8$,$AC=7$,动点 P、Q 分别在边 AB、AC 上,使 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切. 则线段 PQ 长的最小值为______.

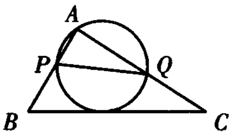

图 1

二、解答题(共 60 分)

9. (14 分)如图 2,走廊宽为 3 m,夹角为 $120°$,地面是水平的,走廊两端足够长. 问:保持水平位置通过走廊的木棒(不计粗细)的最大长度是多少?

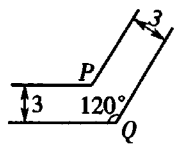

图 2

10. (14 分)已知由 $1,2,\cdots,1\,000$ 这 1 000 个正整数构成的集合 A,先从集合 A 中随机取一个数 a,取出后把 a 放回集合 A;然后再从集合 A 中随机取一个数 b. 求 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{1}{3}$ 的概率.

11. (16 分)(1)设 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$. 求证:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant\sqrt{2}(x_1x_2+x_2x_3),$$

并说明等号成立的条件;

(2)若实数 a 使得对于任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4,不等式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$$

都成立,求 a 的最大值.

12. (16 分)已知正整数 n 满足如下条件:对开区间 $(0,2\,009)$ 内的每个正整数 m,总存在正整数 k,使得

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}.$$

求这种 n 的最小值.

参考答案

一、1. $[-2,6]$, $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

由 $12+4x-x^2\geqslant0$, 得 $-2\leqslant x\leqslant6$. 此时,

$$0\leqslant\sqrt{12+4x-x^2}=\sqrt{-(x-2)^2+16}\leqslant4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

故所求的定义域为 $[-2,6]$, 值域为 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

2. $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

原等式即

$$2\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|=\left|\sum_{k=1}^{n}\lg x_k\right|$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant0.$$

故 $|\lg x_k|=0(1\leqslant k\leqslant n)$, $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

反之, 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时, 已知等式显然成立.

3. $\frac{3}{2}$.

注意到

$$l_{AB}:\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1(0\leqslant x\leqslant3),$$

$$l_{AC}:\frac{x}{3}-y=1(0\leqslant x\leqslant3).$$

如图 3, 设直线 $x=t$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 F、E; 直线 $x=\frac{t}{2}$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 G、H. 则

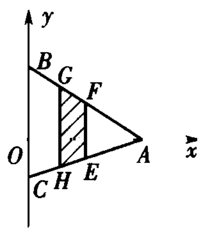

图 3

$$y_F=2-\frac{2t}{3},$$

$$y_E=\frac{t}{3}-1, y_G=2-\frac{t}{3}, y_H=\frac{t}{6}-1.$$

注意到

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\left\{\left[\left(2-\frac{2t}{3}\right)-\left(\frac{t}{3}-1\right)\right]+\left[\left(2-\frac{t}{3}\right)-\left(\frac{t}{6}-1\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{3}{8}(t^2-4t)=-\frac{3}{8}(t-2)^2+\frac{3}{2}.$$

故当 $t=2$ 时, $S(t)_{\max}=\frac{3}{2}$.

4. $\frac{31}{45}$.

两球颜色相同的概率为

$$P=\frac{4\times7+5\times6+6\times2}{15\times15}=\frac{14}{45},$$

故两球颜色不同的概率为 $1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$.

5. 设 $M(x,y)(x\geqslant1)$. 易知, 双曲线的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$. 则

$$|MF_1|=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2},$$

$$|MF_2|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2},$$

$$|MO|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

故 $\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}\right)^2$

$$=\frac{(x+\sqrt{2})^2+y^2+(x-\sqrt{2})^2+y^2+2\sqrt{(x^2+y^2+2)^2-8x^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{4x^2+2+2\sqrt{4x^4-4x^2+1}}{2x^2-1}=\frac{8x^2}{2x^2-1}.$$

解方程 $\frac{8x^2}{2x^2-1}=6(x\geqslant1)$, 得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

进而, $y^2=x^2-1=\frac{1}{2}$.

故 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. 502.

显然, $n\leqslant9$, 且满足条件的数是 $2n-1$ 位正整数, 有 C_9^n 种取法.

故这类整数的个数是

$$\sum_{n=2}^{9}C_9^n=\sum_{n=0}^{9}C_9^n-(C_9^0+C_9^1)$$

$$=512-(1+9)=502.$$

7. 3.

记 $g(x)=f(x)-2\,010$. 则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是 $g(x)=0$ 的根.

故 $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot q(x)$,

其中,$q(x)$为整系数多项式. 于是,

$$g(0)=11-2\,010=-1\,999$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(-x_i)q(0).$$

因 1 999 是质数,$-1\,999$ 至多是三个不同整数之积,即 $-1\times1\times1\,999$,故 $n\leqslant3$.

当 $n=3$ 时,

$$g(x)=(x+1)(x-1)(x+1\,999),$$

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x+1\,999)+2\,010.$$

8. $\frac{30}{7}$.

因为$\triangle ABC$ 三边长已知,所以,$\triangle ABC$ 的三内角为定值.

由$\frac{PQ}{\sin A}=2R$(R 为$\triangle APQ$ 外接圆半径),

得 $PQ=2R\sin A$.

欲使 PQ 最小,当且仅当 R 最小.

又因$\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切,所以,当边 BC 上的高 AH 为$\triangle APQ$ 外接圆直径时 R 最小.

注意到

$$\cos A=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7},$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

而 $AH\times8=5\times7\sin A\Rightarrow AH=\frac{35}{8}\sin A$.

故 $PQ_{\min}=AH\sin A=\frac{35}{8}\sin^2A=\frac{30}{7}$.

二、**9.** 如图 4,过走廊转角内顶点 P 任作水平直线与走廊外侧交于点 A、B. 则在水平位置通过走廊的木棒长度小于或等于 AB.

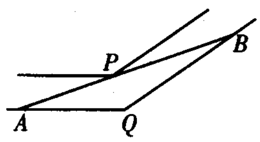

图 4

设$\angle BAQ=\alpha$. 则

$\angle ABQ=60^\circ-\alpha$,

$$AB=AP+PB=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{3}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

当 α 变化时,上式的最小值即是在水平位置通过走廊的木棒的最大长度.

由平均不等式及积化和差得

$$AB\geqslant6\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}}$$

$$=6\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}[\cos(2\alpha-60^\circ)-\cos60^\circ]}}$$

$$\geqslant6\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{2}}}=12,$$

且当 $\alpha=30^\circ$时,$AB=12$.

故在水平位置能通过走廊的木棒的最大长度是 12 m.

10. 解法 1 注意到

$$P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right).$$

由$\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow a\leqslant\frac{1}{3}b\Leftrightarrow a\leqslant\left[\frac{1}{3}b\right]$.

则 $P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right)=\frac{\sum\limits_{b=1}^{1\,000}\left[\frac{1}{3}b\right]}{1\,000^2}$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{332}3k+333+333}{1\,000^2}=\frac{333}{2\,000}.$$

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-\frac{333}{2\,000}=\frac{1\,667}{2\,000}$.

解法 2 当 $a=1$ 时,$b=1$ 或 2,有 2 种取法;

当 $a=2$ 时,b 的取值增加 3、4、5,有 $2+3$ 种取法;

当 $a=3$ 时,b 的取值增加 6、7、8,有 $2+2\times3$ 种取法;

……

当 $a=333$ 时,b 有 $2+332\times3$ 种取法;

当 $334\leqslant a\leqslant1\,000$ 时,b 都有 1 000 种取法.

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{2+(2+3)+(2+2\times3)+\cdots+(2+332\times3)+667\times1\,000}{1\,000^2}$$

$$=\frac{333(2+166\times3)+667\times1\,000}{1\,000^2}$$

$$=\frac{1\,667}{2\,000}.$$

11. (1)注意到

2010 年全国高中数学联赛甘肃省预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)05-0032-03

一、填空题(每小题 7 分,共 56 分)

1. 设 $k_1<k_2<\cdots<k_n$ 是非负整数,满足

$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}=227.$

则 $k_1+k_2+\cdots+k_n=$______.

2. 已知 $a>0$,函数 $f(x)=|x+2a|$ 和 $g(x)=|x-a|$ 的图像交于点 C,且它们分别与 y 轴交于点 A、B. 若$\triangle ABC$ 的面积是 1,则 $a=$______.

3. 已知 S_n 是公差为正数 q 的等差数列的前 n 项之和. 若$\frac{S_n+210}{n}$在 $n=6$ 时取到最小值,则 q 的取值范围是______.

4. 已知函数 $y=x^3$ 在 $x=a_k$ 的切线与 x 轴交于点 a_{k+1}. 若 $a_1=1$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ =______.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{2}\right)+\left(\frac{x_2^2}{2}+x_3^2\right)$$

$$\geqslant\frac{2}{\sqrt2}x_1x_2+\frac{2}{\sqrt2}x_2x_3=\sqrt2(x_1x_2+x_2x_3).$$

当且仅当 $x_1=\frac{1}{\sqrt2}x_2=x_3$ 时,等号成立.

(2)设 $k(0<k<1)$为待定常数. 则

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

$$=(x_1^2+kx_2^2)+(1-k)(x_2^2+x_3^2)+(kx_3^2+x_4)$$

$$\geqslant2\sqrt{k}x_1x_2+2(1-k)x_2x_3+2\sqrt{k}x_3x_4.$$

令$\sqrt{k}=1-k$. 解得 $k=\frac{3-\sqrt5}{2}$.

从而, $\sqrt{k}=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

故 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant(\sqrt5-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$ 对任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4 都成立.

另一方面,取

$$x_1=\frac{\sqrt5-1}{2}=x_4, x_2=x_3=1.$$

由已知不等式得

$$5-\sqrt5\geqslant\sqrt5a\Rightarrow a\leqslant\sqrt5-1.$$

综上, $a_{\max}=\sqrt5-1$.

12. 注意到

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn<2\,009k,\\mn+n>2\,010k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn+1\leqslant2\,009k,\\mn+n-1\geqslant2\,010k\end{cases}$$

$$\Rightarrow2\,009(mn+n-1)\geqslant2\,009\times2\,010k$$

$$\geqslant2\,010(mn+1)$$

$$\Rightarrow2\,009mn+2\,009n-2\,009$$

$$\geqslant2\,010mn+2\,010$$

$$\Rightarrow n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-m}.$$

因为上式对区间(0,2 009)中的每个正整数 m 都成立,所以,

$$n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-2\,008}=4\,019.$$

另一方面,根据不等式“a、b、c、$d\in\mathbf{R}_+$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$”,知

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{m+(m+1)}{2\,009+2\,010}<\frac{m+1}{2\,010},$$

即 $\frac{m}{2\,009}<\frac{2m+1}{4\,019}<\frac{m+1}{2\,010}$

对区间(0,2 009)中的每个正整数 m 都成立.

故 n 的最小值为 4 019.

(李大元 熊 斌 顾鸿达 刘鸿坤 叶声扬 命题)