2013年新知杯上海市高中数学竞赛

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2014)05-0028-04

【说明】解答本试卷不得使用计算器.

一、填空题(第1~4小题每题7分,第5~8小题,每题8分,共60分)

1. 若在区间$[2,3]$上,函数$f(x)=x^2+bx+c$与$g(x)=x+\frac{6}{x}$在同一点取相同的最小值,则函数$f(x)$在$[2,3]$上的最大值为______.

2. 若$a、b、c、d$为整数,且

$a\lg 2+b\lg 3+c\lg 5+d\lg 7=2\,013$,

则有序数组$(a,b,c,d)=$______.

3. 已知函数

$$y=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-5)^2}+\sqrt{(x^2-3)^2+x^2}.$$

则该函数的最小值为______.

4. 已知线段$x+y=9(x\geqslant0,y\geqslant0)$与$y$轴、指数函数$y=a^x$的图像、对数函数$y=\log_a x$的图像、$x$轴分别交于点$A、B、C、D$,其中,$a>0,a\neq1$. 若中间两点恰三等分线段$AD$,则$a=$______.

5. 如图1,已知

椭圆$C:\frac{x^2}{25}+y^2=1$和$\odot O:x^2+y^2=1$,

在椭圆C内,且在$\odot O$外的区域内(包括边界)所含圆的最大半径为______.

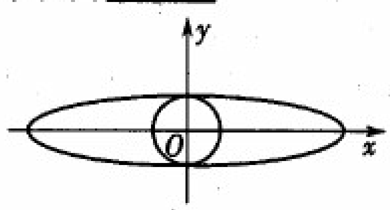

图1

6. 关于$m、n$的方程$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}$的整数解$(m,n)=$______.

7. 袋中有6只红球和8只白球,任意取五只球放入A盒中,其余九只球放入B盒中. 则A盒中白球个数与B盒中红球个数之和不是素数的概率为______(用数字作答).

8. 若在集合$\{1!,2!,\cdots,100!\}$中删去一个元素后,余下元素的乘积恰为一个完全平方数,则删去的这个元素为______.

二、解答题(共60分)

9. (12分)正数数列$\{a_n\}$的前n项和为b_n,数列$\{b_n\}$的前n项积为c_n,且$b_n+2c_n=1$ $(n\in\mathbf{Z}_+)$. 求数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$中最接近2 013的数.

10. (12分)已知正数p及抛物线$C:y^2=2px$ $(p>0)$,$A\left(\frac{p}{6},0\right)$为抛物线$C$对称轴上一点,$O$为抛物线$C$的顶点,$M$为抛物线$C$上任意一点. 求$\frac{|OM|}{|AM|}$的最大道.

11. (18分)已知

$k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$. ①

(1)若存在正数$a、b、c$使不等式①成立,证明:$k>5$;

(2)存在正数$a、b、c$使不等式①成立,且凡使不等式①成立的任意一组正数$a、b、c$均为某个三角形的三边长,求满足条件的整数k.

12. (18分)如图2,已知棱长为1的正方体$ABCDEFGH$,P为其八个顶点构成的集合. 规定$2n+1$ $(n\in\mathbf{Z}_+)$个有序顶点组$(A_0A_1\cdots A_{2n})$满足点A_0与A重合,且对每个$i\in\{0,1,\cdots,2n-1\}$,A_{i+1}与A_i是集合P中的相邻顶点.

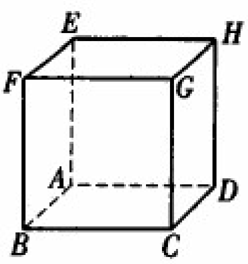

图2

(1)求顶点A_{2n}所有可能的位置;

(2)若用S_{2n}表示$A_{2n}=C$的所有$2n+1$个有序顶点组$(A_0A_1\cdots A_{2n})$的个数,求S_{2n}.

参考答案

一、1. $15-4\sqrt{6}$.

注意到,$g(x)=x+\frac{6}{x}\geqslant2\sqrt{6}$,当$x=\sqrt{6}\in[2,3]$时,上式等号成立,即$g(x)$在$x=\sqrt{6}$时取到最小值$2\sqrt{6}$.

于是，由题意得

$f(x)=(x-\sqrt{6})^2+2\sqrt{6}$.

又 $3-\sqrt{6}>\sqrt{6}-2$，则 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值为 $f(3)=15-4\sqrt{6}$.

2. $(2\,013,0,2\,013,0)$.

由题意得

$2^a\times3^b\times5^c\times7^d=10^{2\,013}=2^{2\,013}\times5^{2\,013}$.

由算术基本定理知

$(a,b,c,d)=(2\,013,0,2\,013,0)$.

3. $\sqrt{26}$.

函数 y 可视为抛物线 $y=x^2$ 上的点 $P(x,x^2)$ 到点 $M(5,2)$ 及 $N(0,3)$ 的距离之和.

由图像易知，当点 P 为线段 MN 与抛物线的交点时，y 最小，此时，

$y_{\min}=|MN|=\sqrt{26}$.

4. $\sqrt[3]{6}$ 或 $\sqrt[6]{3}$.

显然，$A(0,9)$，$D(9,0)$.

当 $AB=\frac{1}{3}AD$ 时，点 $B(3,6)$.

于是，$6=a^3\Rightarrow a=\sqrt[3]{6}$.

当 $AB=\frac{2}{3}AD$ 时，点 $B(6,3)$.

于是，$3=a^6\Rightarrow a=\sqrt[6]{3}$.

5. $\frac{23}{25}$.

要使所含圆的半径 r 最大，其圆心又在 x 轴上，且与 $\odot O$ 外切，与椭圆 C 在第一象限内仅有一个公共点.

由对称性，设所求圆 M 的方程为

$(x-r-1)^2+y^2=r^2$

$\Rightarrow y^2=r^2-(x-r-1)^2$.

代入椭圆方程得

$\frac{x^2}{25}+r^2-(x-r-1)^2=1$

$\Rightarrow 24x^2-50(r+1)x+50(r+1)=0$.

由 $\Delta=2\,500(r+1)^2-4\,800(r+1)=0$

$\Rightarrow r=\frac{23}{25}$.

6. $(3,2)$.

显然，$m\neq0$，$n\neq0$.

将已知方程变形成

$m=\frac{4(n+1)(n-1)}{n(3n-4)}$.

由 $(n,n+1)=1=(n,n-1)$，知 $n|4$.

于是，$n=\pm1,\pm2,\pm4$.

经检验，只有当 $n=2$ 时，m 为非零整数 3.

7. $\frac{213}{1\,001}$.

设 A 盒中有白球 $n(0\leqslant n\leqslant5)$ 个，则 A 盒中有红球 $5-n$ 个；B 盒中有白球 $8-n$ 个，红球 $n+1$ 个. 于是，A 盒中白球个数与 B 盒中红球个数之和为 $2n+1$，且 $1\leqslant2n+1\leqslant11$.

注意到，$2n+1$ 为奇数，非素数只有 1 或 9，即 $n=0$ 或 4.

故所求概率 $P=\frac{C_6^5+C_8^4C_6^1}{C_{14}^5}=\frac{213}{1\,001}$.

8. $50!$.

记 $A=1!\times2!\times\cdots\times100!$.

因为 $(2k)!=(2k)\cdot(2k-1)!$，所以，

$$\begin{aligned}A&=(1!)^2\times2\times(3!)^2\times4\times\cdots\times(99!)^2\times100\\&=(1!\times3!\times\cdots\times99!)^2(2\times4\times6\times\cdots\times100)\\&=(1!\times3!\times\cdots\times99!)^2(2^{25})^2\times50!.\end{aligned}$$

于是，删去 $50!$ 后余下的元素之积 $\frac{A}{50!}$ 恰为完全平方数.

接下来证明：删去 $50!$ 是唯一的.

若还能删去 $k!$，使得 $\frac{A}{k!}$ 也为完全平方，则

当 $50<k\leqslant100$ 时，

$$\frac{\frac{A}{50!}}{\frac{A}{k!}}=51\times52\times\cdots\times k$$

也为完全平方数；

当 $1\leqslant k<50$ 时，

$$\frac{\frac{A}{k!}}{\frac{A}{50!}}=(k+1)(k+2)\times\cdots\times50$$

也为完全平方数.

因为 53 为素数，且 $53\times2>100$，所以，当 $53\leqslant k\leqslant100$ 时，$51\times52\times\cdots\times k$ 不可能为完全平方数（所含 53 的指数为 1），且 51、51×52 均不为完全平方数.

因为 47 是素数，所以，当 $1\leqslant k\leqslant46$ 时，

$(k+1)\times\cdots\times 49\times 50$ 不可能为完全平方数，且 $48\times 49\times 50$、49×50、50 均不为完全平方数.

综上，删去的元素 $50!$ 是唯一的.

二、9. 因为 $a_1=b_1=c_1$，所以，在 $b_n+2c_n=1$ $(n\in\mathbf{Z}_+)$ 中令 $n=1$，得

$3a_1=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $b_n=\frac{c_n}{c_{n-1}}$ 及 $b_n+2c_n=1$，得

$\frac{c_n}{c_{n-1}}+2c_n=1\Rightarrow\frac{1}{c_n}=\frac{1}{c_{n-1}}+2$.

又 $\frac{1}{c_1}=\frac{1}{a_1}=3$，于是，

$\frac{1}{c_n}=3+2(n-1)=2n+1(n\in\mathbf{Z}_+)$.

故 $b_n=\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{\frac{1}{c_{n-1}}}{\frac{1}{c_n}}=\frac{2n-1}{2n+1}(n\geqslant 2)$.

该结果对 $n=1$ 也成立$\left(\text{因为 } b_1=a_1=\frac{1}{3}\right)$.

则 $a_n=b_n-b_{n-1}=\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n-3}{2n-1}$

$=\frac{4}{4n^2-1}(n\geqslant 2)$.

于是，$\frac{1}{a_n}=n^2-\frac{1}{4}(n\geqslant 2)$.

故 $\frac{1}{a_{44}}=1\,935\frac{3}{4}$，$\frac{1}{a_{45}}=2\,024\frac{3}{4}$.

经比较 $\frac{1}{a_{45}}$ 最接近 2 013.

10. 设点 $M(x,y)$. 则 $x\geqslant 0$，且 $y^2=2px$.

故 $\left(\frac{|OM|}{|AM|}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{\left(x-\frac{p}{6}\right)^2+y^2}$

$=\frac{x^2+2px}{x^2-\frac{p}{3}x+\frac{p^2}{36}+2px}$

$=\frac{x^2+2px}{x^2+\frac{5p}{3}x+\frac{p^2}{36}}$.

设 $t=\frac{x^2+2px}{x^2+\frac{5}{3}px+\frac{p^2}{36}}$. 则

$(t-1)x^2+p\left(\frac{5}{3}t-2\right)x+\frac{p^2}{36}t=0$.

当 $t\neq 1$ 时，由 $x\in\mathbb{R}$，知

$\Delta=p^2\left[\left(\frac{5}{3}t-2\right)^2-\frac{1}{9}t(t-1)\right]$

$=p^2\left(\frac{24}{9}t^2-\frac{59}{9}t+4\right)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow t\geqslant\frac{4}{3}$ 或 $t\leqslant\frac{9}{8}$.

当 $t=\frac{9}{8}$ 时，有 $x=\frac{p}{2}$；且当 $x\geqslant 0$ 时，

$\frac{x^2+2px}{x^2+\frac{5}{3}px+\frac{p^2}{36}}\leqslant\frac{9}{8}\Leftrightarrow\left(x-\frac{p}{2}\right)^2\geqslant 0$，

即对一切 $x\geqslant 0$，有 $t\leqslant\frac{9}{8}$$\left(\text{从而，}t\geqslant\frac{4}{3}\text{不可能}\right)$.

于是，t 的最大值为 $\frac{9}{8}$.

因此，$\left(\frac{|OM|}{|AM|}\right)_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

11. (1) 因为 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，所以，由不等式①知

$k(ab+bc+ca)>5(ab+bc+ca)$.

注意到，a、b、c 为正数.

于是，$ab+bc+ca>0$.

故 $k>5$.

(2) 由 (1) 知 $k>5$.

又 k 为整数，则 $k\geqslant 6$.

取 $a=1,b=1,c=2$. 易知，a、b、c 不是某三角形三边长.

由题意，知其不能使不等式①成立，即

$k(1+2+2)\leqslant 5(1+1+4)\Rightarrow k\leqslant 6$.

从而，$k=6$.

接下来证明：$k=6$.

此时，不等式①为

$6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$. ②

注意到，$a=1,b=1,c=\frac{3}{2}$ 满足不等式②.

设 a、b、c 满足不等式②.

由对称性，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$.

将不等式②化成

$5c^2-6c(a+b)+5a^2+5b^2-6ab<0$. ③

故 $\Delta=[6(a+b)]^2-20(5a^2+5b^2-6ab)$

$=-64(a-b)^2+64ab$

$\leqslant 64ab\leqslant 16(a+b)^2$.

于是，由不等式③得

$$c<\frac{6(a+b)+\sqrt{\Delta}}{10}\leqslant\frac{6(a+b)+4(a+b)}{10}$$

$=a+b.$

从而，a、b、c 是某三角形的三条边长.

综上，所求的整数 $k=6$.

12. (1)分别以 AB、AD、AE 为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系. 则

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $\cdots$, $H(0,1,1)$.

若 A_{i+1} 与 A_i 为相邻顶点，则 A_{i+1} 只有把 A_i 的某一维坐标由 0 变 1，或由 1 变 0.

从而，A_{i+1} 与 A_i 的三维坐标之和有不同的奇偶性.

注意到，$A_0=A(0,0,0)$.

于是，A_{2n} 的三维坐标之和必为偶数.

因此，只能是 $A(0,0,0)$ 或 $C(1,1,0)$ 或 $F(1,0,1)$ 或 $H(0,1,1)$.

(2)考虑 S_{2n+2} 与 S_{2n} 的关系.

设 $(A_0A_1\cdots A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})$ 是满足条件的 $2n+3$ 个有序顶点组，即

$A_0=A$, $A_{2n+2}=C$.

当 $A_{2n}=C$ 时，$(A_0A_1\cdots A_{2n})$ 有 S_{2n} 个，而 A_{2n+1} 有三种可能性，故这类 $2n+3$ 个有序顶点组有 $3S_{2n}$ 个.

当 A_{2n} 是顶点 A、F、H 中的一个时，A_{2n+1} 均只有两种可能. 由于所有的 $2n+1$ 个有序顶点组 $(A_0A_1\cdots A_{2n})$ 有 3^{2n} 个，故这类 $2n+3$ 个有序顶点组有 $2(3^{2n}-S_{2n})$ 个.

则 $S_{2n+2}=3S_{2n}+2(3^{2n}-S_{2n})=S_{2n}+2\times3^{2n}$.

又 $S_2=2$，于是，

$$\begin{aligned}S_{2n}&=(S_{2n}-S_{2n-2})+\cdots+(S_4-S_2)+S_2\\&=2(3^{2n-2}+3^{2n-4}+\cdots+3^2)+2\\&=2(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+1)=\frac{9^n-1}{4}.\end{aligned}$$

（顾鸿达　李大元　刘鸿坤　叶声扬　康士凯　命题）