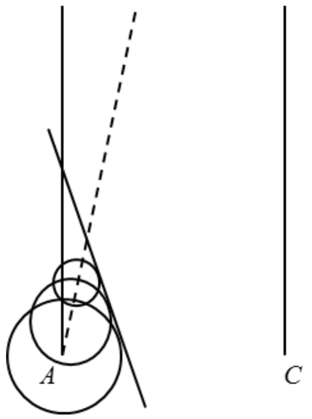
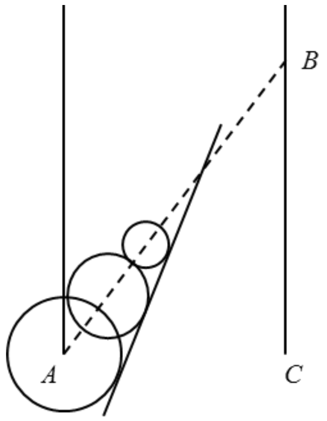
题一、

若$u<c$，则产生的声波包络线如下图，其中的虚线表示地面上看声音在钢管内的传播路径。可知此时最先接收到的点即为A对面的点C，距离为$x=0$。



若$u>c$，则此时产生的声波包络线如下图。则此时最先接收到的点为冲击波最前端。因此

此时的距离为$x=v\cdot\frac{a}{u}$



题二、

考虑一摩尔N_2H_4和O_2发生反应。高压保存的液态N_2H_4和O_2先汽化为温度T_0压强分别

为P_{s1}和P_{s2}的气体，此过程中O_2和N_2H_4汽化放出的总能量为

$$Q_1=-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$$

其中的负号表示吸热。

然后等温膨胀到压强都为P_0并发生反应，过程中气体内能不发生改变，对外膨胀做功并吸

收热量，总能量贡献为零。

发生反应之后释放能量

$$Q_2=H_0$$

并生成温度压强分别为T_0和P_0的N_2和H_2O。最后喷出的气体温度为T，因此会有等压升

温，过程中对外放出热量为

$$Q_3=C_{p(\mathrm{N_2})}\left(T_0-T\right)+2C_{p(\mathrm{H_2O})}\left(T_0-T\right)$$

因此有

$$Q_3=-\left(\left(R+C_{v2}\right)+2\left(R+C_{v1}\right)\right)\cdot\left(T-T_0\right)$$

得到：

$$Q_3=-11.5R\left(T-T_0\right)$$

总能量关系得到最后速度V满足：

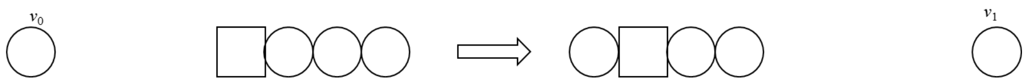
$$\frac{1}{2}\left(\mu_{\mathrm{N_2}}+2\mu_{\mathrm{H_2O}}\right)V^2=Q_1+Q_2+Q_3$$

得到

$$V=\sqrt{\frac{2\left(H_0-\lambda_1-\lambda_2-11.5R\left(T-T_0\right)\right)}{\mu_{\mathrm{N_2}}+2\mu_{\mathrm{H_2O}}}}$$

题三、

（1）设第一级加速结束后的速度为v_1，第二级加速结束后的速度为v_2，第三级加速结束后的速度为v_3。其中每一级加速如下图所示，过程中没有生热，因此可用能量关系求解。



由于磁铁与钢球之间的吸引力为

$$F=\frac{K}{x^3}$$

可知磁铁与钢球之间的势能为

$$E_p=\int_\infty^x\frac{K}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{K}{x^2}$$

因此每一级释放的势能为

$$\Delta E_p=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{K}{(2r)^2}-\frac{K}{(4r)^2}-\frac{K}{(6r)^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-2\cdot\frac{K}{(2r)^2}-\frac{K}{(4r)^2}\right)$$

有：

$$\Delta E_p=\frac{K}{2(2r)^2}-\frac{K}{2(6r)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{K}{r^2}$$

于是由功能原理得到经三级加速之后的末态速度满足：

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = 3\Delta E_p + \frac{1}{2}mv_0^2$$

得到

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K}{3r^2} + v_0^2}$$

（2）磁铁级数足够多，最后稳定时上一级钢球射入的速度与射入下一级磁铁的速度相同，这个速度即近似的最终速度，设为v_f，如图所示。

逐次碰撞，设上一级钢球射入之后与磁铁碰后的速度为v'_f，碰后磁铁的速度为v_{f1}，都以向右为正，则有碰撞过程动量守恒：

$$mv_f = mv'_f + mv_{f1}$$

恢复系数：

$$e = 1 - x = \frac{v_{f1} - v'_f}{v_f}$$

保留到一阶小量得到：

$$v_{f1} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)v_f$$

之后的碰撞与此次碰撞如出一辙，因此碰后右侧物体的速度与碰前左侧物体的速度的比例关系都是这样，设碰后磁铁后侧的钢球速度分别为v_{f2}, v_{f3}, v_{f4}，则有：

$$v_{f4} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4 v_f$$

保留到一阶小量得：

$$v_{f4} = (1 - 2x)v_f$$

此即右侧小球出射速度。

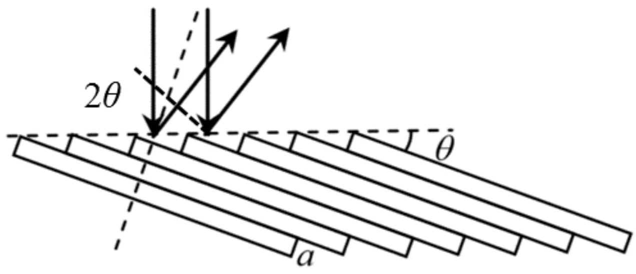
之后此小球射向下一级磁铁，过程中受到磁铁做的正功和摩擦阻力做的负功，功能原理得：

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_{f4}^2 = \Delta E_p - \mu mgl$$

解得：

$$v_f = \sqrt{\frac{K - 9\mu mglr^2}{18mxr^2}}$$

题四、



如图，要使反射光相干增强，需要反射光之间相位差为2π的整数倍，或光程差为波长的整数倍，由图中几何条件可得相邻两束光的光程差为

$$\Delta L=\frac{a}{\sin\theta}\cdot\sin 2\theta=2n\lambda,n=1,2,3,\ldots$$

因此有

$$\cos\theta=\frac{n\lambda}{a},n=1,2,3,\ldots$$

题五、

（1）忽略边缘效应，先计算圆柱在ρ处产生的磁场，利用安培环路定理，取半径为ρ的圆环路径，当$\rho\geq r$时，有：

$$2\pi\rho\cdot B_{(\rho)}=\mu_0\cdot\pi r^2 j$$

得到

$$B_{(\rho)}=\frac{\mu_0 r^2 j}{2\rho}\quad（1）$$

当$\rho<r$时，有

$$2\pi\rho\cdot B_{(\rho)}=\mu_0\cdot\pi\rho^2 j$$

得到

$$B_{(\rho)}=\frac{\mu_0 j}{2}\cdot\rho\quad（2）$$

由安培力公式得到导线的受力为

$$\begin{cases}F_{(\rho)}=-\dfrac{\mu_0 r^2 jlI}{2\rho},\rho\geq r\\ F_{(\rho)}=-\dfrac{\mu_0 jlI}{2}\cdot\rho,\rho<r\end{cases}\quad（3）$$

其中的负号表示受吸引力。

（2）导线在外部所受安培力为有心力，因此运动过程中角动量守恒。临界时，导线轨迹与圆柱相切，设此时速度为v'，角动量守恒写为：

$$mv_{0c}\rho_0 = mv'r \quad (4)$$

过程中安培力做功为：

$$W = \int_r^{\rho_0} \frac{\mu_0 r^2 jlI}{2\rho} \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 r^2 jlI}{2} \cdot \ln\frac{\rho_0}{r} \quad (5)$$

有功能原理：

$$\frac{1}{2}mv_{0c}^2 + W = \frac{1}{2}mv'^2 \quad (6)$$

解得临界时：

$$v_{0c} = \sqrt{\frac{\mu_0 r^4 jlI \ln\frac{\rho_0}{r}}{m\left(\rho_0^2 - r^2\right)}} \quad (7)$$

因此初速度只需满足

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{\mu_0 r^4 jlI \ln\frac{\rho_0}{r}}{m\left(\rho_0^2 - r^2\right)}} \quad (8)$$

即可。

（3）在内部时，其 x, y 方向的受力分别为;

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\mu_0 jlI}{2} \cdot x \\ F_y = -\dfrac{\mu_0 jlI}{2} \cdot y \end{cases} \quad (9)$$

因此导线在两个方向上的投影都是简谐振动。角频率为 $\omega = \sqrt{\dfrac{\mu_0 jlI}{2m}}$，设位移随时间的变化关系分别为

$$\begin{cases} x_{(t)} = A_x \cos\left(\omega t + \varphi_{0x}\right) \\ y_{(t)} = A_y \cos\left(\omega t + \varphi_{0y}\right) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $A_x, \varphi_{0x}; A_y, \varphi_{0y}$ 分别为 x, y 方向上的振幅和初相位。设 v_1 与 x 轴的夹角为 θ，则初始条件分别为：

$$\begin{cases} x_{(0)} = -r, \\ v_{x(0)} = v_1 \cos\theta; \\ \mathrm{y}_{(0)} = 0, \\ v_{y(0)} = v_1 \sin\theta. \end{cases} \quad (11)$$

设从开始到从 $\left(0, r\right)$ 处射出，共用时 t，则又有：

$$\begin{cases} x_{(t)} = 0 \\ y_{(t)} = r \end{cases} \quad （12）$$

由初始条件（11）可以解得

$$\begin{cases} A_x = \sqrt{\dfrac{v_1^2 \cos^2\theta}{\omega^2} + r^2} \\ \cos\varphi_{0x} = -\dfrac{r}{A_x} \\ \sin\varphi_{0x} = -\dfrac{v_1 \cos\theta}{\omega A_x}, \dfrac{\pi}{2} < \varphi_{0x} < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad （13）$$

$$\begin{cases} A_y = \sqrt{\dfrac{v_1^2 \sin^2\theta}{\omega^2}} \\ \varphi_{0y} = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad （14）$$

代入（12）可得：

$$\begin{cases} \cos\left(\omega t + \varphi_{0x}\right) = 0 \\ \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{r}{A_y} \end{cases} \quad （15）$$

有题目情况可以得到$\omega t + \varphi_{x0} = \dfrac{3\pi}{2}$，代入（15）的第二个方程得到：

$$\cos\varphi_{0x} = -\frac{r}{A_y} \quad （16）$$

与（13）中的第三个方程比较可以得到

$$A_x = A_y$$

由此解得：

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{v_1^2 + r^2\omega^2}{2v_1^2}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + \dfrac{\mu_0 r^2 jlI}{2m}}{2v_1^2}}$$

要求

$$\frac{v_1^2 + \dfrac{\mu_0 r^2 jlI}{2m}}{2v_1^2} \le 1$$

因此有解的条件为

$$v_1 \ge \sqrt{\frac{\mu_0 r^2 jlI}{2m}}$$

题六

（1）设在原子自身参照系中，外电场强度为$\vec{E}'=\left(E_x',E_y',E_z'\right)$，则有：

$$\begin{cases}E_x'=E_x\\ E_y'=\gamma E_y=\dfrac{E_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\\ E_z'=\gamma E_z=\dfrac{E_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\end{cases}$$

因此其极化电偶极为

$$\vec{p}'=\left(\alpha Ex,\frac{\alpha E_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\frac{\alpha E_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

其大小为：

$$p'=\alpha\sqrt{E_x^2+\frac{E_y^2}{\left(1-u^2/c^2\right)}+\frac{E_y^2}{\left(1-u^2/c^2\right)}}$$

（2）回到地面系，电荷在参考系变化中不变，而x方向的电荷间距离会有相对论性变化，因此地面系中的电偶极$\vec{p}=\left(p_x,p_y,p_z\right)$满足：

$$\begin{cases}p_x=\dfrac{1}{\gamma}p_x'=\dfrac{\alpha E_x}{\gamma}\\ p_y=p_y'=\gamma E_y\\ p_z=p_z'=\gamma E_z\end{cases}$$

电场和电偶极与x轴的夹角分别满足：

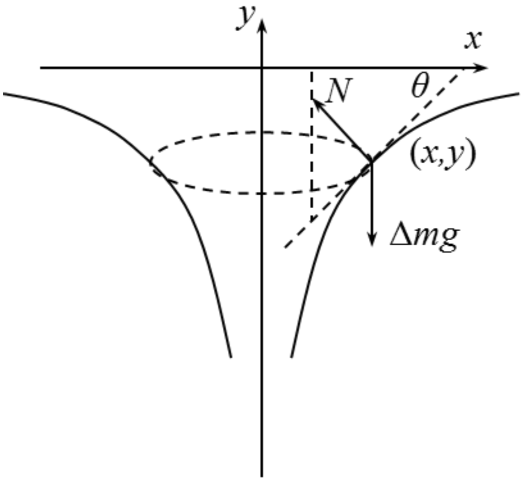
$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sqrt{E_y^2+E_z^2}}{E_x}\\ \tan\theta'=\dfrac{\sqrt{p_y^2+p_z^2}}{p_x}=\gamma^2\tan\theta\end{cases}$$

电偶极与电场的夹角$\theta'-\theta$满足：

$$\tan\left(\theta'-\theta\right)=\frac{\gamma^2\tan\theta-\tan\theta}{1+\gamma^2\tan^2\theta}=\frac{\gamma^2-1}{\dfrac{1}{\tan\theta}+\gamma^2\tan\theta}$$

因此当$\tan\theta=\dfrac{1}{\gamma}$时，夹角最大。

题七



竖直剖面如图。考虑处于$\left(x,y\right)$处的那一圈水，设其水平面内的速度分量为v_τ，则取如图半径为x的圆形环路，可知其环流为：

$$2\pi x\cdot v_\tau=\Gamma_0$$

水流速度不大，可视为竖直方向受力平衡。考虑$\left(x,y\right)$处质量为Δm的小水滴，其水平面内的径向动力学方程为

$$\Delta m\frac{v_\tau^2}{x}=\Delta mg\tan\theta$$

几何条件：

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

因此有：

$$\mathrm{d}y=\frac{\Gamma_0^2}{4\pi g}\cdot\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

得到方程为：

$$y=-\frac{\Gamma_0^2}{8\pi rg}\cdot\frac{1}{x^2}$$

题八

（1）设某行星质量为m，圆轨道半径为r，万有引力大小为$F_{(r)}$，周期为T，则有径向动力学方程：

$$F_{(r)}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

由开普勒第三定律可得：

$$T^2\propto r^3$$

于是有

$$F_{(r)}\propto r^{-2}$$

即万有引力为平方反比力。

（2）

a）设半长轴半短轴以及半焦距分别为a,b,c，则有$2a=\frac{l}{1-e}+\frac{l}{1+e}$，得到$a=\frac{l}{1-e^2}$，

$c=ea=\frac{el}{1-e^2}$，$b=\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}$。

近中心天体的点处，轨道曲率半径为$\rho_1=\frac{b^2}{a}=l$，则有径向的动力学方程：

$$f_{(r)}=m\frac{v_1^2}{\rho_1}$$

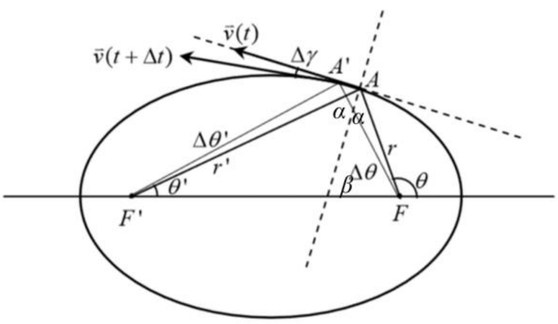
其中的速度v_1可以通过角动量求出：

$$v_1=\frac{L}{mr}$$

得到：

$$f_{(r)}=\frac{L^2}{ml}\cdot\frac{1}{r^2}$$

b）



记法向与到中心天体的连线的夹角为α，则易知

$$a=\frac{\theta-\theta'}{2}$$

得到连线转过的角度为

$$\Delta\theta=\frac{v\Delta t\cdot\cos\alpha}{r}=\frac{v\Delta t\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{r}$$

到另一焦点的距离满足：$r'\sin\theta'=r\sin\theta$，因此有夹角：

$$\Delta\theta'=\frac{v\Delta t\cdot\cos\alpha}{r'}=\frac{v\Delta t\sin\theta'\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{r\sin\theta}$$

c）题目中应为$\alpha=\frac{\theta-\theta'}{2}$

由几何条件知

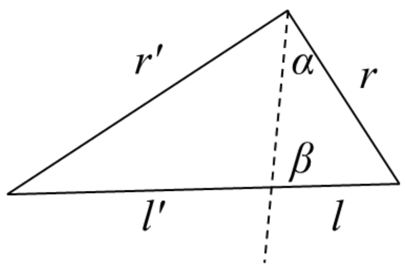
$$\Delta\gamma=\Delta\beta=\frac{\Delta\theta+\Delta\theta'}{2}=v\Delta t\cos\alpha\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

由椭圆方程可知

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}，\quad r'=\frac{l}{1-e\cos\theta'}$$

得到

$$\begin{aligned}\Delta\gamma&=v\Delta t\cos\alpha\cdot\frac{2+e\cos\theta-e\cos\theta'}{l}\\&=v\Delta t\cos\alpha\cdot\frac{2-2e\sin\beta\sin\alpha}{l}\end{aligned}$$



椭圆：$r+r'=2a$，$l+l'=2c$，角平分线性质：

$$\frac{l}{r}=\frac{l'}{r'}=\frac{c}{a}=e$$

因此有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{l}{r}=e$$

得到$\Delta\gamma=\frac{2v\Delta t\cos^3\alpha}{l}$

得到法相加速度为：

$$a_n=\frac{v\Delta\gamma}{\Delta t}=\frac{2v^2\cos^3\alpha}{l}$$

由此得到法向动力学方程：

$$f_{(r)}\cos\alpha = ma_n = \frac{2mv^2\cos^3\alpha}{l}$$

利用角动量 $L = mvr\cos\alpha$ 得到：

$$f_{(r)} = \frac{L^2}{ml}\cdot\frac{1}{r^2}$$

即 a）中的形式正确。