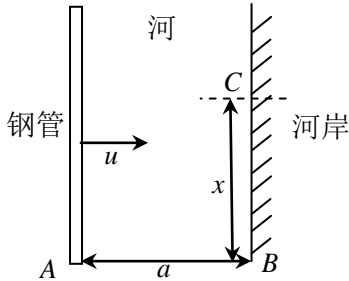


第 32 届全国中学生物理竞赛复赛模拟训练(1)

满分 160 分

题一

如图在距离河岸距离为 a 的地方，有一根长直钢管，以恒定速度 u 向河岸靠近。在初态，在 A 处敲击一下钢管，声音开始传播。已知在钢和水中的声速分别为 v 和 c 。求河岸上最先收到声波点 C 到达与 A 正对的 B 点的距离 x



题二

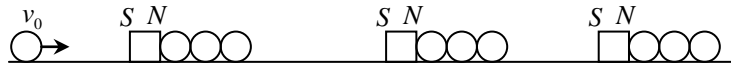
火箭发动机的重要指标是喷射出的气体相对发动机的速度。考虑反应 $\text{N}_2\text{H}_4 + \text{O}_2 = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ ，标准摩尔生成焓为 H_0 ，即反应物和产物都是 $T_0 = 273.15\text{K}$ ， $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$ 的气体，每消耗 1mol 氧气，体系放出的热量。而实际上火箭上存储的是 T_0 温度下，高压保存的液态 N_2H_4 和 O_2 ，压强分别为各自的饱和蒸气压 P_{s1} 和 P_{s2} ，此状态下摩尔汽化热分别为 λ_1 和 λ_2 。汽化之后的气体可以视为理想气体， N_2H_4 和 H_2O 的摩尔热容量为 $C_{v1} = 3R$ ， O_2 和 N_2 的摩尔热容量为 $C_{v2} = 2.5R$ 。最后喷出的气体温度为 T_1 ，压强为 p_0 。求喷出气体的最大速度 u 。摩尔质量用 μ_{N_2} 和 $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ 表达。

题三

简易的高斯炮的原理是通过释放存储的磁能加速钢球。制作高斯炮需要若干弹性很好的钢球，一个水平光滑的导轨，一些强磁铁，质量和钢球相当，均为 m ，球的直径和磁铁宽度均为 $2r$ 。磁铁和钢球之间的吸引力近似写为 $F = \frac{K}{x^3}$ ，其中 x 为两者之间的间距。忽略钢球磁化产生的磁场。开始的时候如图摆成一排，间距较大。磁铁被绳子绑在导轨上（即除了碰撞瞬间外是不会发生滑动的）。第一个小球从较远的地方以速度 v_0 飞过来，每次碰撞都是完全弹性碰撞（可以理解为物体之间逐个碰撞）

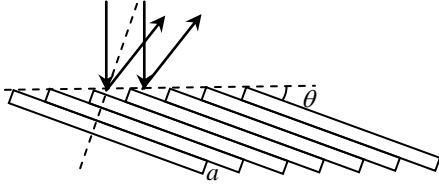
a) 经过三级磁铁加速后，飞出的钢球速度 v_3 最大为多少？

b) 若两级磁铁之间的距离为 l ， $l \gg r$ ，导轨上有微小的摩擦系数 μ ，碰撞的恢复系数为 $e = 1 - \alpha$ ， $\alpha \ll 1$ ，有足够多磁铁的情况下，这个高斯炮最多能将炮弹加速到多少速度？



题四

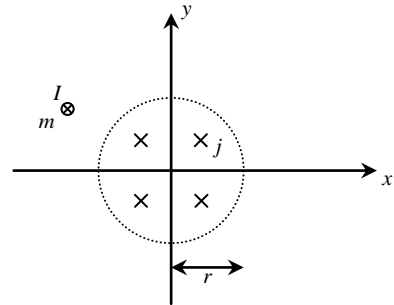
上好的新鲜的牛肉有时候反而会发出偏绿色的光。仔细研究后发现并不是表面有霉菌，而是牛肉的纹理对光反射的时候恰好形成了光栅，某些方向上绿光的得到增强。假设牛肉纹理厚度为 a ，切面和纹理的夹角为 θ ，每段露出的牛肉都可以视为一小段平面镜。最常见的入射光是垂直于切面入射的，在入射角和反射角相等的方向上最容易观察反射光。要求对于波长为 λ 的绿光，不同层的反射光相干加强，从而使得人认为颜色偏绿，切角 θ 应当满足什么条件？



题五

如图，在半径为 r ，长度为 $l \gg r$ 的柱形区域内有均匀的流向 z 轴负方向的稳恒的电流，电流密度大小为 j 。一根单线长度为 l 质量为 m 的导线也沿 z 轴摆放，电流大小为 I 。只考虑安培力作用，由于导线运动速度很小，不考虑电磁感应效果。

- 写下导线距离原点距离为 ρ 的时候，导线受到的合外力
- 初态导线距离圆心距离 ρ_0 ，初速度 v_0 垂直于导线和圆心的连线，要求导线不会运动到圆柱形区域内，写下 v_0 应当满足的方程。
- 初态导线在圆柱边缘 $(-r, 0)$ ，初速度大小 v_1 ，向圆柱内运动，恰好能从 $(0, r)$ 离开圆柱。求 v_1 方向应当满足条件。



题六

原子在外电场下会极化。若外电场为 \vec{E} ，原子核被极化产生电偶极，我们简单处理成为两个正负电荷 $\pm q$ ，平均间距为 \vec{l} ，记电偶极 $\vec{p} = q\vec{l}$ 。一般情况下静止的原子的电偶极 $\vec{p} = \alpha\vec{E}$ ，其中 α 为常数。

电磁场在不同参照系中看的结果是不同的。在沿 x 轴以高速 u 运动的参照系中，新的电磁场 \vec{E}', \vec{B}' 与原电磁场 \vec{E}, \vec{B} 的关系为：

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \gamma(E_y - uB_z); \\ E_z' = \gamma(E_z + uB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_x' = B_x \\ B_y' = \gamma(B_y + uE_z / c^2), \\ B_z' = \gamma(B_z - uE_y / c^2) \end{cases} \quad \text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- 在地面参照系中，一个原子以速度 u 向 x 轴正向运动，在地面参照系中有匀强电场 $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ 。请计算在原子自身参照系中的极化的电偶极大小 \vec{p}' 。
- 计算在地面参照系中原子的电偶极大小 \vec{p} ，并计算 θ 等于多少的时候 \vec{p} 和 \vec{E} 夹角最大？

题七

在只受到保守力的理想流体中（没有粘滞阻力，不可压缩），存在有一个“环流守恒定律”。首先定义环流。回忆感生电动势的定义，对于一个封闭曲线，计算每一点感应电场 \vec{E} 与曲线上一小段长度矢量 $\Delta\vec{l}$ 的点乘，然后对曲线求和 $\varepsilon = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$ 。类似的，我们定于对于封闭曲线上的环流大小为

$\Gamma = \sum \vec{v} \cdot \Delta\vec{l}$ 。其中 \vec{v} 为任意一点的速度矢量。环流守恒定律表明，对于一个封闭曲线 σ ，当前时刻环流为 $\Gamma(\sigma)$ ，经过一小段时间后，曲线上每个点都会移动一小段距离，形成新的曲线 σ' ，在新的曲线上， $\Gamma(\sigma') = \Gamma(\sigma)$ 。

利用环流守恒定律，考察一个对称的稳定的漩涡（例如在浴缸里放水的时候形成的漩涡），不考虑科里奥利力和表面张力的影响，建立合适的模型，取柱坐标，写出当流速不太大的范围内，漩涡表面应当满足的方程。假设由于扰动，在最外圈环流大小为 Γ_0 ，水密度为 ρ ，重力加速度为 g 。



题八

我们重温一下牛顿当年工作。开普勒第二定律对应角动量守恒，限定了万有引力是有心力。对于圆轨道的开普勒第三定律实质上已经限制了平方反比率。然而如何说明在一般情况下，椭圆轨道也满足平方反比率，还需要进一步的计算说明。

(1) 对于圆轨道的开普勒第三定律证明万有引力为平方反比率

(2) 下面我们假设开普勒一、二定律都成立，极坐标下椭圆轨道表达为 $r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$ ，其中 l, e 为常数，

$0 < e < 1$ ，角动量大小为 L 。

a) 通过特殊情境先计算出万有引力的具体形式 $f(r)$ 。可以利用 r, L, e, m 表达。

b) 如图对于任意给定的 θ ，把物体到中心星体距离记为 r ，物体到另一个焦点距离为 r' 。

计算在经过一小段时间 Δt 后，物体与两个焦点的连线转过的角度 $\Delta\theta, \Delta\theta'$ ，用瞬时速度 $v, \theta, \theta', r, \Delta t$ 表达。

c) 计算出在间 Δt 内物体速度方向的角度变化 $\Delta\gamma$ （用 $v, \Delta t, l, \beta = (\theta - \theta')/2$ 表达），由此计算物体的法向加速度，并计算说明在(a)中得到的万有引力形式正确。

