

第34届全国中学生物理竞赛决赛

试题与参考解答

一、(35分)如图,质量分别为 m_a 、 m_b 的小球 a 、 b 放置在光滑绝缘水平面上,两球之间用一原长为 l_0 、劲度系数为 k_0 的绝缘轻弹簧连接。



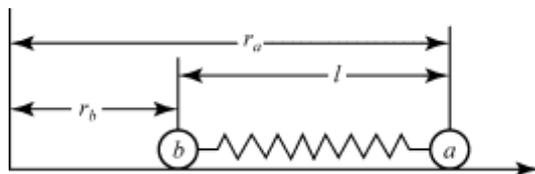
(1) $t=0$ 时,弹簧处于原长,小球 a 有一沿两球连线向右的初速度 v_0 ,小球 b 静止。若运动过程中弹簧始终处于弹性形变范围内,求两球在任一时刻 $t(t>0)$ 的速度。

(2) 若让两小球带等量同号电荷,系统平衡时弹簧长度为 L_0 ,记静电力常量为 K 。求小球所带电荷量和两球与弹簧构成的系统做微振动的频率(极化电荷的影响可忽略)。

参考解答:

(1) 如图, t 时刻弹簧的伸长量为

$$u = l - l_0$$



有

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} = -k_0 u \quad (1)$$

式中

$$\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \quad (2)$$

为两小球的约化质量。由①②式知,弹簧的伸长量 u 服从简谐振动的动力学方程,振动频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_a + m_b}{m_a m_b} k_0} \quad (3)$$

最后一步利用了②式。 t 时刻弹簧的伸长量 u 的表达式为

$$u = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4)$$

式中 A 、 B 为待定常量。 $t=0$ 时,弹簧处于原长,即

$$u(0) = B = 0$$

将 $B=0$ 代入④式得

$$u = A \sin \omega t \quad (5)$$

a 相对于 b 的速度为

$$v'_a = \frac{dr_a}{dt} - \frac{dr_b}{dt} = \frac{du}{dt} = A\omega \cos \omega t \quad (6)$$

$t=0$ 时有

$$v'_a(0) = v_0 - 0 = A\omega \quad (7)$$

由⑥⑦式得

$$v'_a = v_0 \cos \omega t \quad (8)$$

系统在运动过程中动量守恒

$$m_a v_0 = m_a v_a + m_b v_b \quad (9)$$

小球 a 相对于地面的速度为

$$v_a = v'_a + v_b \quad (10)$$

由③⑧⑨⑩式可得, t 时刻小球 a 和小球 b 的速度分别为

$$v_a = \left[1 + \frac{m_b}{m_a} \cos \left(\sqrt{\frac{(m_a + m_b)k_0}{m_a m_b}} t \right) \right] \frac{m_a}{m_a + m_b} v_0 \quad (11)$$

$$v_b = \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{(m_a + m_b)k_0}{m_a m_b}} t \right) \right] \frac{m_a}{m_a + m_b} v_0 \quad (12)$$

(2) 若两球带等量同号电荷, 电荷量为 q , 系统平衡时有

$$K \frac{q^2}{L_0^2} = k_0(L_0 - l_0) \quad (13)$$

由⑬式得

$$q = L_0 \sqrt{\frac{k_0}{K}(L_0 - l_0)} \quad (14)$$

设 t 时刻弹簧的长度为 L (见图 II), 有

$$\mu \frac{d^2 L}{dt^2} = -k_0(L - l_0) + K \frac{q^2}{L^2} \quad (15)$$

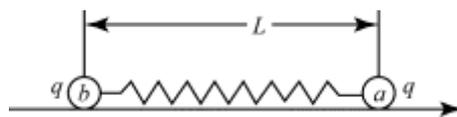


图 II

令 $x = L - L_0$ 为 t 时刻弹簧相对平衡时弹簧长度 L_0 的伸长量, ⑮式可改写为

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_0 x - k_0(L_0 - l_0) + K \frac{q^2}{L_0^2} \left(1 + \frac{x}{L_0} \right)^{-2} \quad (16)$$

系统做微振动时有

$$x \ll L_0$$

因而

$$\left(1 + \frac{x}{L_0} \right)^{-2} = 1 - 2 \frac{x}{L_0} + O \left[\left(\frac{x}{L_0} \right)^2 \right] \quad (17)$$

利用上式, ⑩式可写为

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \left[-k_0(L_0 - l_0) + K \frac{q^2}{L_0^2} \right] - \left(k_0 + 2K \frac{q^2}{L_0^3} \right) x + O \left[\left(\frac{x}{L_0} \right)^2 \right] \quad (18)$$

略去 $O \left[\left(\frac{x}{L_0} \right)^2 \right]$, 并利用⑬或⑭式, ⑱式可写为

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(k_0 + 2K \frac{q^2}{L_0^3} \right) x = - \frac{3L_0 - 2l_0}{L_0} k_0 x \quad (19)$$

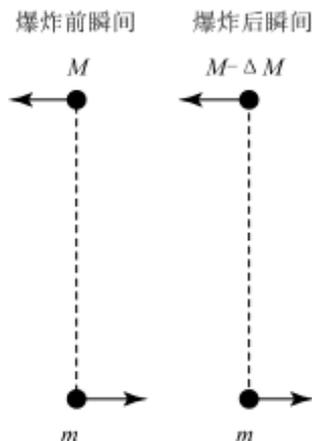
由⑱式知, $3L_0 - 2l_0 > 0$, 系统的微振动服从简谐振动的动力学方程, 振动频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{3L_0 - 2l_0}{L_0} \right) k_0}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{3L_0 - 2l_0}{L_0} \right) \left(\frac{m_a + m_b}{m_a m_b} \right) k_0} \quad (20)$$

最后一步利用了②式。

评分参考: 第(1)问 24分, ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各 2分; 第(2)问 11分, ⑬⑭⑮式各 2分, ⑰式 1分, ⑲⑳式各 2分。

二、(35分) 双星系统是一类重要的天文观测对象。假设某两星体均可视为质点, 其质量分别为 M 和 m , 一起围绕它们的质心做圆周运动, 构成一双星系统, 观测到该系统的转动周期为 T_0 。在某一时刻, M 星突然发生爆炸而失去质量 ΔM 。假设爆炸是瞬时的、相对于 M 星是各向同性的, 因而爆炸后 M 星的残余体 M' ($M' = M - \Delta M$) 星的瞬间速度与爆炸前瞬间 M 星的速度相同, 且爆炸过程和抛射物质 ΔM 都对 m 星没有影响。已知引力常量为 G , 不考虑相对论效应。



- (1) 求爆炸前 M 星和 m 星之间的距离 r_0 ;
- (2) 若爆炸后 M' 星和 m 星仍然做周期运动, 求该运动的周期 T_1 ;
- (3) 若爆炸后 M' 星和 m 星最终能永远分开, 求 M 、 m 和 ΔM 三者应满足的条件。

参考解答:

- (1) 两体系统的相对运动相当于质量为 $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ 的质点在固定力场中的运动, 其运动方程是

$$\frac{Mm}{M+m}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \quad (1)$$

其中 \mathbf{r} 是两星体间的相对位矢。①式可化为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\mathbf{r} \quad (2)$$

由②式可知，双星系统的相对运动可视为质点在质量为 $M+m$ 的固定等效引力源的引力场中的运动。爆炸前为圆周运动，其运动方程是

$$\frac{G(M+m)}{r_0^2} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r_0 \quad (3)$$

由③式解得

$$r_0 = \left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad (4)$$

(2) 爆炸前， m 星相对于 M 星的速度大小是

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0} = \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{2\pi G(M+m)}{T_0}\right)^{1/3} \quad (5)$$

方向与两星体连线垂直。

爆炸后，等效引力源的质量变为

$$M_{\odot} = M' + m = M + m - \Delta M \quad (6)$$

相对运动轨道从圆变成了椭圆、抛物线或双曲线。由爆炸刚刚完成时（取为初始时刻）两星体的位置和运动状态可知，两星体初始距离为 r_0 ，初始相对速度的大小为 v_0 ，其方向与两星体连线垂直，所以初始位置必定是椭圆、抛物线或双曲线的顶点。对于椭圆轨道，它是长轴的一个端点。

设椭圆轨道长轴的另一个端点与等效引力源的距离为 r_1 ，在 r_1 处的速度（最小速度）为 v_{\min} （理由见①式），由角动量守恒和机械能守恒得

$$r_1 v_1 = r_0 v_0 \quad (7)$$

和

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{r_1} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{r_0} \quad (8)$$

由⑦⑧式得 r_1 满足方程

$$\left(\frac{2GM_{\odot}}{r_0} - v_0^2\right)r_1^2 - 2GM_{\odot}r_1 + r_0^2 v_0^2 = 0 \quad (9)$$

由⑨式解得

$$r_1 = \left(\frac{2GM_{\odot}}{r_0} - v_0^2\right)^{-1} \left(GM_{\odot} + \sqrt{G^2 M_{\odot}^2 - \left(\frac{2GM_{\odot}}{r_0} - v_0^2\right)r_0^2 v_0^2} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{r_0}{2GM_{\odot} - r_0v_0^2} (GM_{\odot} + r_0v_0^2 - GM_{\odot}) = \frac{r_0v_0^2}{2GM_{\odot} - r_0v_0^2} r_0$$

另一解 r_0 可在⑩式右端根号前取减号得到。由⑩式可知

$$r_1 > r_0 \quad \text{⑪}$$

利用方程⑨和韦达定理（或由⑩式），椭圆的半长轴是

$$a = \frac{r_0 + r_1}{2} = \frac{GM_{\odot}}{2GM_{\odot} - r_0v_0^2} r_0 = \left(\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \frac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M} \quad \text{⑫}$$

要使运行轨道为椭圆，应有

$$0 < a < \infty \quad \text{⑬}$$

由⑫⑬式得

$$M + m - 2\Delta M > 0 \quad \text{⑭}$$

据开普勒第三定律得

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\odot}}} \quad \text{⑮}$$

将⑥⑫式代入⑮式得

$$T_1 = \sqrt{\frac{(M+m)(M+m-\Delta M)^2}{(M+m-2\Delta M)^3}} T_0 \quad \text{⑯}$$

【解法（二）】

爆炸前，设 M 星与 m 星之间的相对运动的速度为 $v_{\text{相对}0}$ ，有

$$v_{\text{相对}0} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{r_0}} \quad \text{⑰}$$

爆炸后瞬间， m 星的速度没有改变， $M - \Delta M$ 星与爆炸前的速度相等，设 $M - \Delta M$ 星与 m 星之间的相对运动的速度为 $v_{\text{相对}}$ ，有

$$v_{\text{相对}} = v_{\text{相对}0} \quad \text{⑱}$$

爆炸后质心系的总动能为

$$E'_k = \frac{1}{2} \frac{(M - \Delta M)m}{M + m - \Delta M} v_{\text{相对}}^2 \quad \text{⑲}$$

质心系总能量为

$$E' = E'_k - \frac{G(M - \Delta M)m}{r_0} \quad \text{⑳}$$

对于椭圆轨道运动有

$$E' = -\frac{G(M - \Delta M)m}{2A} \quad \text{㉑}$$

式中

$$A = \frac{M + m - \Delta M}{M + m - 2\Delta M} r_0 \quad (10)$$

由开普勒第三定律有

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{G(M + m)}} \quad (11)$$

由⑩⑪式有

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{A_0^3}{G(M + m - \Delta M)}} \quad (12)$$

有

$$T_1 = \left[\frac{(M + m)(M + m - \Delta M)^2}{(M + m - 2\Delta M)^3} \right]^{1/2} T_0 \quad (13)$$

]

(3) 根据⑫式, 当 $\Delta M \geq (M + m)/2$ 的时候, ⑬式不再成立, 轨道不再是椭圆。所以若 M' 星和 m 星最终能永远分开, 须满足

$$\Delta M \geq (M + m)/2 \quad (17)$$

由题意知

$$M > \Delta M \quad (18)$$

联立⑰⑱式知, 还须满足

$$M > m \quad (19)$$

⑱式即为所求的条件。

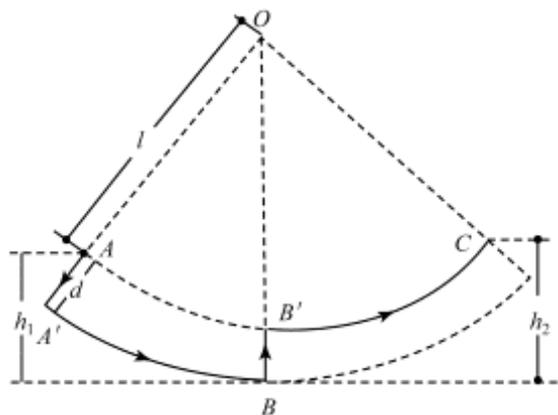
评分参考: 第(1)问8分, ①②③④式各2分;

第(2)问23分, ⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各2分, ⑬式1分, ⑭⑮⑯式各2分; 解法(二)⑤⑥式各2分; ⑦⑧⑨式各3分; ⑩式2分, ⑪式3分, ⑫式2分, ⑬式3分;

第(3)问4分, ⑰⑱式各2分。

三、(35分) 熟练的荡秋千的人能够通过荡秋千板上适时站起和蹲下使秋千越荡越高。一质量为 m 的人荡一架底板和摆杆均为刚性的秋千, 底板和摆杆的质量均可忽略, 假定人的质量集中在其质心。人在秋千上每次完全站起时质心距悬点 O 的距离为 l , 完全蹲下时此距离变为 $l + d$ 。实际上, 人在秋千上站起和蹲下过程都是在一段时间内完成的。作为一个简单的模型, 假设人在第一个最高点 A 点从完全站立的姿势迅速完全下蹲, 然后荡至最低点 B , A 与 B 的高度差为 h_1 ; 随后他在 B 点迅速完全站起

(且最终径向速度为零), 继而随秋千荡至第二个最高点 C , 这一过程中该人质心运动的轨迹如图所示。此后人以同样的方式回荡, 重复前述过程, 荡向第3、4等最高点。假设人站起和蹲下的过程中, 人与秋千的相互作用力始终与摆杆平行。以最低点 B 为重力势能零点。



(1) 假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中没有机械能损失，求该人质心在 $A \rightarrow A' \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow C$ 各个阶段的机械能及其变化；

(2) 假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中的机械能损失 ΔE 与过程前后高度差的绝对值 Δh 的关系分别为

$$\Delta E = k_1 mg(h_0 + \Delta h), \quad 0 < k_1 < 1, \quad \text{始终完全蹲下}$$

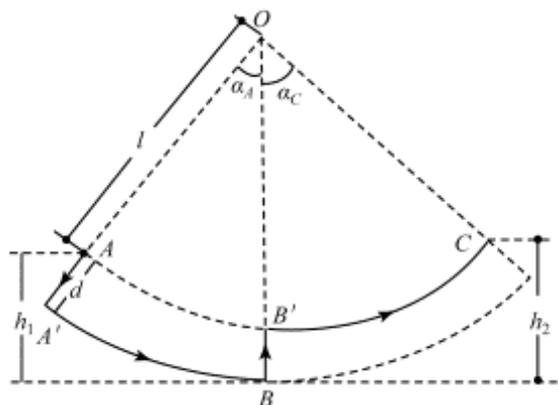
$$\Delta E = k_2 mg(h'_0 + \Delta h), \quad 0 < k_2 < 1, \quad \text{始终完全站立}$$

这里， k_1 、 k_2 、 h_0 和 h'_0 是常量， g 是重力加速度的大小。求

(i) 相对于 B 点，第 n 个最高点的高度 h_n 与第 $n+1$ 个最高点的高度 h_{n+1} 之间的关系；

(ii) h_n 与 h_1 之间的关系式和 $h_{n+1} - h_n$ 与 h_1 之间的关系式。

参考解答：



(1) 假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中没有机械能损失。将人和秋千作为一个系统。人在 A 处位于完全站立状态，此时系统的机械能为

$$U_A = K_A + V_A = 0 + mg[l(1 - \cos \alpha_A) + d] = mgh_1 \quad \text{①}$$

式中， $K_A = 0$ 和 $V_A = mgh_1$ 分别是人在 A 处时系统的动能和重力势能， α_A 是秋千与竖直方向的夹角（以下使用类似记号）如图所示。

人在 A' 处完全下蹲，在 $A \rightarrow A'$ 过程中系统重力势能减少，（因受到摆底板的限制）动能仍然为零。人

在 A' 处时系统的机械能为

$$\begin{aligned} U_{A'} &= K_{A'} + V_{A'} = 0 + mg(d+l)(1 - \cos \alpha_A) \\ &= mg \frac{l+d}{l} (h_1 - d) \end{aligned} \quad (2)$$

人在 B 仍处位于完全下蹲状态，在 $A' \rightarrow B$ 过程中系统机械能守恒。人在 B 处的动能为

$$K_{B1} = \frac{1}{2} m v_{B1}^2 = U_{A'} \quad (3)$$

式中下标 1 表示秋千第一次到 B 处。

人在 B' 处突然站立，人做功，机械能增加。设人站立前后体系的角动量分别为 L_{B1} 和 $L_{B'1}$ ，在 $B \rightarrow B'$ 过程中系统角动量守恒

$$\begin{aligned} L_{B1} &= m v_{B1} (l+d) = m(l+d) \sqrt{2K_{B1}/m} \\ &= m(l+d) \sqrt{2g \frac{l+d}{l} (h_1 - d)} \\ &= L_{B'1} = m l v_{B'1} \end{aligned} \quad (4)$$

由此得

$$v_{B'1} = \frac{l+d}{l} \sqrt{2g \frac{l+d}{l} (h_1 - d)} \quad (5)$$

人在 B' 处的机械能为

$$\begin{aligned} U_{B'1} &= \frac{1}{2} m v_{B'1}^2 + mgd \\ &= \frac{1}{2} m \cdot 2 \left(\frac{l+d}{l} \right)^3 g (h_1 - d) + mgd \end{aligned} \quad (6)$$

人在 C 仍处于完全站立状态，在 $B' \rightarrow C$ 过程中系统机械能守恒。人在 C 处时系统的机械能为

$$\begin{aligned} U_C &= mgh_2 \\ &= mg \frac{(l+d)^3}{l^3} (h_1 - d) + mgd = U_{B'1} \end{aligned} \quad (7)$$

由⑥⑦式得

$$h_2 - d = \left(\frac{l+d}{l} \right)^3 (h_1 - d)$$

于是

$$U_C - U_A = mg \left[\left(\frac{l+d}{l} \right)^3 - 1 \right] (h_1 - d) \quad (8)$$

(2) (1) 假定在始终完全蹲下和始终完全站立过程中有机能损失。按题给模型，人第 n 第在 B 处时系统的动能为

$$\frac{1}{2} m v_{Bn}^2 = mgh'_n - k_1 (mgh_0 + mgh'_n)$$

$$= (1 - k_1)mgh'_n - k_1mgh_0 \quad (9)$$

$$= (1 - k_1)mg \frac{l+d}{l}(h_n - d) - k_1mgh_0$$

即

$$v_{B_n}^2 = 2(1 - k_1)g \frac{l+d}{l}(h_n - d) - 2k_1gh_0 \quad (9)$$

按题给模型，人第 n 次在 B' 处时系统的动能为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{B'n}^2 &= mg(h_{n+1} - d) + k_2[mgh'_0 + mg(h_{n+1} - d)] \\ &= (1 + k_2)mg(h_{n+1} - d) + k_2mgh'_0 \end{aligned} \quad (10)$$

即

$$v_{B'n}^2 = 2(1 + k_2)g(h_{n+1} - d) + k_2gh'_0 \quad (10)$$

在第 n 次 $B \rightarrow B'$ 过程中，系统角动量守恒，有

$$(l + d)mv_{B_n} = lmv_{B'n} \quad (11)$$

由⑨⑩⑪式得

$$\begin{aligned} &2(1 + k_2)l^2g(h_{n+1} - d) + 2k_2l^2gh'_0 \\ &= 2(1 - k_1)(l + d)^2g \frac{l+d}{l}(h_n - d) - 2k_1(l + d)^2gh_0 \end{aligned} \quad (12)$$

由⑫式得

$$\begin{aligned} h_{n+1} - d &= \frac{1 - k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^3 (h_n - d) - \frac{k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^2 h_0 - \frac{k_2}{1 + k_2} h'_0 \\ &= \frac{1 - k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^3 (h_n - d) - \left[\frac{k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^2 h_0 + \frac{k_2}{1 + k_2} h'_0 \right] \\ &= \lambda(h_n - d) - \mu \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\lambda = \frac{1 - k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^3 \quad (14)$$

$$\mu = \frac{k_1}{1 + k_2} \left(\frac{l+d}{l} \right)^2 h_0 + \frac{k_2}{1 + k_2} h'_0 \quad (15)$$

(ii) 由⑬⑭⑮式有

$$\begin{aligned} h_{n+1} - d &= \lambda(h_n - d) - \mu \\ &= \lambda[\lambda(h_{n-1} - d) - \mu] - \mu \end{aligned}$$

$$= \lambda^2(h_{n-1} - d) - \mu(1 + \lambda) \quad (16)$$

= ...

$$= \lambda^n(h_1 - d) - \mu(1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-1})$$

$$= \lambda^n(h_1 - d) - \mu \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

即

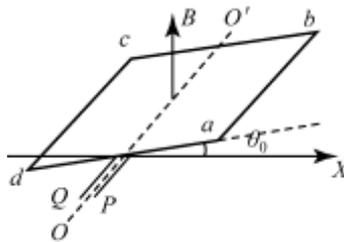
$$h_{n+1} = \lambda^n(h_1 - d) + d - \mu \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \quad (17)$$

于是

$$h_{n+1} - h_n = \lambda^{n-1}[(\lambda - 1)(h_1 - d) - \mu] \quad (18)$$

评分参考：第（1）问 17 分。①②③式各 2 分，④式 3 分，⑤⑥⑦⑧式各 2 分；第（2）问 18 分，⑨⑩⑪⑫⑬各 2 分，⑭⑮式各 1 分，⑯⑰⑱式各 2 分。

四、（35 分）如图，在磁感应强度大小为 B 、方向竖直向上的匀强磁场中，有一均质刚性导电的正方形线框 $abcd$ ，线框质量为 m ，边长为 l ，总电阻为 R 。线框可绕通过 ad 边和 bc 边中点的光滑轴 OO' 转动。 P 、 Q 点是线框引线的两端， OO' 轴和 x 轴位于同一水平面内，且相互垂直，不考虑线框自感。



（1）求线框绕 OO' 轴的转动惯量 J ；

（2） $t=0$ 时，线框静止，其所在平面与 x 轴有一很小的夹角 θ_0 ，此时给线框通以大小为 I 的恒定直流电流，方向沿 $P \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow Q$ ，求此后线框所在平面与 X 轴的夹角 θ 、线框转动的角速度 $\dot{\theta}$ 和角加速度 $\ddot{\theta}$ 随时间变化的关系式；

（3） $t=t_0 > 0$ 时，线框平面恰好逆时针转至水平，此时断开 P 、 Q 与外电路的连接。此后线框如何运动？求 P 、 Q 间电压 V_{PQ} 随时间变化的关系式；

（4）线框做上述运动一段时间后，当其所在平面与 X 轴夹角为 θ_1 ($\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{3\pi}{4}$) 时，将 P 、 Q 短路，线框再转一小角度 α 后停止，求 α 与 θ_1 的关系式和 α 的最小值。

参考解答：

（1）线框 ab 边和 cd 边绕 OO' 轴的转动惯量 J_{ab} 和 J_{cd} 均为

$$J_{ab} = J_{cd} = \frac{m}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{16}$$

线框 ad 边和 bc 边绕 OO' 轴的转动惯量 J_{ad} 和 J_{bc} 均为

$$J_{ad} = J_{bc} = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{4l} r^2 dr = \frac{ml^2}{48}$$

线框绕 OO' 轴的转动惯量 J 为

$$J = J_{ab} + J_{cd} + J_{ad} + J_{bc} = \frac{ml^2}{6} \quad (1)$$

(2) 当线框中通过电流 I 时, ab 和 cd 两边受到大小相等, 方向相反分别指向 X 轴正向和反向的安培力。设线框的 ab 边转到与 X 轴的夹角为 θ 时其角速度为 $\dot{\theta}$, 角加速度为 $\ddot{\theta}$, ab 边和 cd 边的线速度则为 $v = \frac{l}{2} \dot{\theta}$, 所受安培力大小为 $F = BIl$, 线框所受合力偶矩为

$$M = -2 \cdot \frac{l}{2} BIl \sin \theta \approx -Bl^2 I \theta \quad (2)$$

式中已用到小角近似 $\sin \theta = \theta$, 其中负号表示力偶矩与线框角位移 θ 方向相反, 根据刚体转动定理, 有

$$J \ddot{\theta} = -Bl^2 I \theta \quad (3)$$

此方程与单摆的动力学方程在形式上完全一致, 所以线框将做简谐运动, 可设其运动方程为

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t \quad (4)$$

将其代入③式, 可求得

$$\omega = l \sqrt{\frac{BI}{J}} = \sqrt{\frac{6BI}{m}} \quad (5)$$

于是, 角位移 θ 随时间 t 而变化的关系式为

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{6BI}{m}} t \quad (6)$$

角速度 $\dot{\theta}$ 随时间 t 而变化的关系式为

$$\dot{\theta} = -\theta_0 \sqrt{\frac{6BI}{m}} \sin \sqrt{\frac{6BI}{m}} t \quad (7)$$

角加速度 $\ddot{\theta}$ 随时间 t 而变化的关系式为

$$\ddot{\theta} = -\theta_0 \frac{6BI}{m} \cos \sqrt{\frac{6BI}{m}} t \quad (8)$$

由⑥⑦⑧式知, 当 $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{6BI}}$ 时, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = -\theta_0 \sqrt{\frac{6BI}{m}}$ 达到反向最大值, $\ddot{\theta} = 0$, 可见, 线框的运动是以 $\theta = 0$ 为平衡位置、圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{6BI}{m}}$ 、周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{6BI}}$ 、振幅为 θ_0 的简谐运动。

(3) 线框在做上述运动的过程中, 当逆时针转至 ab 边与 X 轴正向重合时,

$$\theta = 0, \text{ 且 } \dot{\theta}_0 = \theta_0 \sqrt{\frac{6BI}{m}}, \quad (9)$$

此时 P 、 Q 形成断路, 线框内没有了电流, 不再受到安培力的力矩。由于没有阻力, 线框将保持作角速度为 $\dot{\theta}_0$ 的匀角速转动

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0, \quad t \geq t_0 \quad (10)$$

因为 ab 和 cd 边切割磁力线, 线框中产生的感应电动势随时间变化的关系为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2Blv \sin \left[\theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}}(t-t_0) \right] = 2Bl \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \left[\theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}}(t-t_0) \right] \\ &= Bl^2 \theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}} \sin \left[\theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}}(t-t_0) \right]\end{aligned}\quad (11)$$

P 、 Q 间电压 V_{PQ} 随时间变化的表达式为

$$V_{PQ} = -Bl^2 \theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}} \sin \left[\theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}}(t-t_0) \right]\quad (12)$$

(4) 当 P 、 Q 短路后, 设线框转到某一角位置 θ 时的角速度为 $\dot{\theta}$, 由于 ab 和 cd 边切割磁力线产生的感应电动势为 $Bl^2 \dot{\theta} \sin \theta$, 在线框中产生的电流为 $\frac{Bl^2 \dot{\theta}}{R} \sin \theta$, ab 和 cd 边受到的安培力大小为

$$B \left(\frac{Bl^2 \dot{\theta}}{R} \right) l \sin \theta = \frac{B^2 l^3}{R} \dot{\theta} \sin \theta, \text{ 分别指向 } X \text{ 轴正向和反向, 形成的力偶矩为}$$

$$M = -\frac{B^2 l^4}{R} \dot{\theta} \sin^2 \theta\quad (13)$$

设 P 、 Q 刚短路的时刻为 t_1 , 此时线框还在以⑨式的角速度逆时针转动, 其角动量为

$$J \dot{\theta}_0 = \frac{ml^2}{6} \theta_0 \sqrt{\frac{6Bl}{m}} = l^2 \theta_0 \sqrt{\frac{mBl}{6}}\quad (14)$$

由于受到上述力偶矩的作用, 线框转动会减慢直至停止。设停止转动时的时刻为 t_x , 角位置为 $\theta_1 + \alpha$, 此时线框的角动量为 0。根据角动量定理, 应有

$$0 - J \dot{\theta}_0 = \int_{t_1}^{t_x} M dt,\quad (15)$$

由此得

$$J \dot{\theta}_0 = \int_{t_1}^{t_x} \frac{B^2 l^4}{R} \dot{\theta} \sin^2 \theta dt = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \alpha} \frac{B^2 l^4}{R} \sin^2 \theta d\theta \approx \frac{B^2 l^4}{R} \alpha \sin^2 \theta_1\quad (16)$$

式中右端积分已应用了 α 是小角度的题设条件。由①⑩式得

$$\alpha = \frac{RJ \dot{\theta}_0}{B^2 l^4 \sin^2 \theta_1} = \frac{R \theta_0}{Bl^2 \sin^2 \theta_1} \sqrt{\frac{mI}{6B}}\quad (17)$$

当

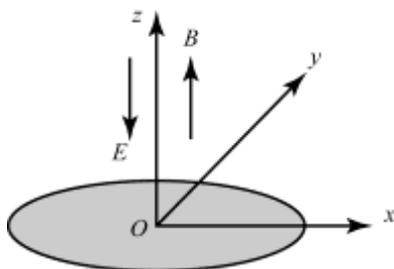
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}\quad (18)$$

时, α 有最小值

$$\alpha_m = \frac{R}{Bl^2} \sqrt{\frac{mI}{6B}} \theta_0\quad (19)$$

评分参考: 第(1)问 2分, ①式 2分; 第(2)问 12分, ②③④⑤⑥式各 2分, ⑦⑧式各 1分; 第(3)问 8分, ⑨⑩⑪⑫式各 2分; 第(4)问 13分, ⑬⑭⑮⑯⑰式各 2分, ⑱式 1分, ⑲式 2分。

五、(35分) 如图, 某圆形薄片材料置于 xOy 水平面上, 圆心位于坐标原点 O : xOy 平面上方存在大小为 E 、沿 z 轴负向的匀强电场, 以该圆形材料为底的圆柱体区域内存在大小为 B 、沿 z 轴正向的匀强磁场, 圆柱体区域外无磁场。从原点 O 向 xOy 平面上方的各方向均匀发射电荷量为 q 、质量为 m 、速度大小为 v 的带正电荷的粒子。粒子所受重力的影响可忽略, 不考虑粒子间的相互作用。



(1) 若粒子每次与材料表面的碰撞为弹性碰撞, 且被该电场和磁场束缚在上述圆柱体内的粒子占发射粒子总数的百分比为 $\eta = 50\%$, 求该薄片材料的圆半径 R 。

(2) 若在粒子每次与材料表面碰撞后的瞬间, 速度竖直分量反向, 水平分量方向不变, 竖直方向的速度大小和水平方向的速度大小均按同比例减小, 以至于动能减小 10% 。

(i) 求在粒子射出直至它第一次与材料表面发生碰撞的过程中, 粒子在 xOy 平面上的投影点走过路程的最大值;

(ii) 对 (i) 问中投影点走过路程最大的粒子, 求该粒子从发射直至最终动能耗尽而沉积于材料表面的过程中走过的路程。

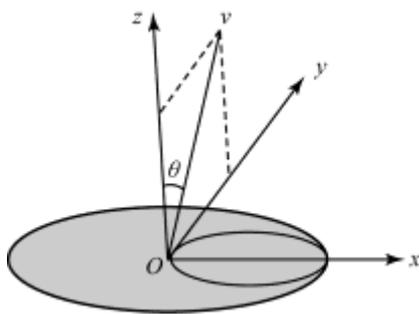
已知 $\int du \sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C$, C 为积分常数。

参考解答:

(1) 由于本问题在 xOy 平面上具有以圆点为中心的圆对称性, 不妨设某一带正电荷的粒子的速度为 $(0, v\sin\theta, v\cos\theta)$

被电场和磁场束缚的粒子将在以材料表面为底的圆柱形区域内做 z 方向的螺旋运动 (即在 xOy 平面做匀速圆周运动。在 z 方向做匀变速直线运动)。

粒子在 xOy 平面内的投影做匀速圆周运动的半径为



$$r(\theta) = \frac{mv\sin\theta}{qB} \tag{1}$$

若该粒子能被该电场和磁场束缚在以圆形材料为底的圆柱形区域内, 则有

$$r(\theta) \leq \frac{R_0}{2} \tag{2}$$

假设被电场和磁场束缚住的粒子的发射方向均匀分布在以 z 轴为对称轴的立体角 $\Delta\Omega$: $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 内, 这一立体角所对应半径为一个长度单位的球面的面积 (立体角的值 $\Delta\Omega$) 为

$$\Delta\Omega = -2\pi \int_0^\theta d \cos\theta = 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (3)$$

从原点 O 向 xOy 平面上方各方向均匀发射的带正电荷的粒子所占的立体角为 2π 。按题意，被该电场和磁场束缚的粒子占发射粒子总数的百分比 η 为

$$\eta = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 50\% \quad (4)$$

由③④式得

$$\theta \leq \Theta = \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

可见，只要粒子速度方向与 z 轴的夹角 θ 满足条件⑤式，它就必然会被电场和磁场束缚住。

由①②③④⑤式可知

$$R = \frac{\sqrt{3}mv}{qB} \quad (6)$$

(2)

(i) 带正电荷的粒子在磁场和电场区域做螺旋运动，由①式得，粒子投影在 xOy 平面做一次圆周运动的时间为

$$T = \frac{2\pi r}{v \sin\theta} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (7)$$

粒子在 z 方向做匀变速直线运动，以粒子发射时刻为计时零点。设粒子第一次与材料表面碰撞前的瞬间为时刻 $t_1(\theta)$ ，由运动学公式有

$$v \cos\theta - a \frac{t_1(\theta)}{2} = 0 \quad (8)$$

式中

$$a = \frac{qE}{m} \quad (9)$$

由⑧⑨式得

$$t_1(\theta) = \frac{2mv \cos\theta}{qE} \quad (10)$$

粒子在 xOy 平面的投影做一次圆周运动的路程为

$$d(\theta) = 2\pi r(\theta) = \frac{2\pi m v \sin\theta}{qB} \quad (11)$$

粒子在 xOy 平面的投影在 t_1 时间走过的总路程 $s_{z=0}(\theta)$ 为

$$s_{z=0}(\theta) = \frac{t_1(\theta)}{T} d(\theta) = \frac{mv^2}{qE} \sin 2\theta \quad (12)$$

当

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (13)$$

时， $s_{z=0}$ 最大

$$s_{z=0}^{\max} = s_{z=0} \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right) = \frac{mv^2}{qE} \quad (14)$$

(ii) 若粒子的投影在 xOy 平面上走过的总路程恰好达到最大值, 则 θ 的取值如⑬式所示, 粒子在 z 方向做匀减速直线运动, 在 xOy 平面上做匀速圆周运动, 以粒子发射时刻为计时零点, 粒子在发射后时刻 t 的合速度大小为

$$v_{\text{合}} = \sqrt{\left(v \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 + \left(v \cos \frac{\pi}{4} - at \right)^2} \quad (15)$$

该粒子从发射到第一次与材料表面碰撞前的瞬间运动的路程为

$$s_1 = 2 \int_0^{t_1(\theta=\pi/4)/2} dt v_{\text{合}} = \frac{mv^2}{qE} \int_0^1 du \sqrt{1+u^2} \quad (16)$$

已利用⑩⑮式。利用题给积分公式, 由⑯式得

$$s_1 = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{qE} \frac{1}{2} mv^2 \quad (17)$$

它与粒子发射时的动能成正比。

粒子每一次与材料表面碰撞前后, z 方向速度反向, 而沿 xOy 平面的速度方向不变, 且沿 z 方向的速度和沿 xOy 平面的速度都按同样比例减小: 以至于动能减小 10%, 粒子再次出射的出射角大小不变。粒子按照同样的规律运动下去, 其第 n 次发射到与材料表面碰撞前的瞬间走过的路程 s_n 为

$$s_n = k^{n-1} s_1, \quad k = 1 - 10\% \quad (18)$$

最终其动能耗尽 (沉积到材料表面)。利用⑱式, 粒子从发射直至最终动能耗尽而沉积于材料表面的过程中运动的总路程 $S_{\text{总}}$ 为

$$\begin{aligned} S_{\text{总}} &= s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots \\ &= (1 + k + \cdots + k^{n-1} + \cdots) s_1 \\ &= \frac{s_1}{1 - k} = 10s_1 \end{aligned} \quad (19)$$

由⑰⑱式得

$$S_{\text{总}} = [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \frac{5mv^2}{qE} \quad (20)$$

评分参考: 第 (1) 问 12 分, ①②③④⑤⑥式各 2 分; 第 (2) (i) 问 13 分, ⑦式 2 分, ⑧⑨式各 1 分, ⑩⑪⑫式各 2 分, ⑬式 1 分, ⑭式各 2 分; 第 (2) (ii) 问 10 分, ⑮⑯⑰⑱⑳式中 2 分。

六、(35 分) 有一根长为 6.00 cm、内外半径分别为 0.500 mm 和 5.00 mm 的玻璃毛细管。

(1) 毛细管竖直悬空固定放置, 注入水后, 在管的下端中央形成一悬挂的水滴, 管中水柱表面中心相对于水滴底部的高度为 3.50 cm, 求水滴底部表面的曲率半径 a ;

(2) 若将该毛细管长度的三分之一竖直浸入水中, 问需要多大向上的力才能使该毛细管保持不动? 已知玻璃的密度是水的 2 倍, 水的密度是 $1.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 水的表面张力系数为 $7.27 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 水与玻璃的接触角 θ 可视为零, 重力加速度取 $9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

参考解答:

(1) 设大气压强为 P_0 , 毛细管的内径为 r , 外径为 R , 水的密度为 ρ_0 , 表面张力系数为 σ , 重力加速

度为 g ，对于水柱的上端水与管壁完全浸润，接触角 $\theta = 0$ ，水柱上端内表面压强 P_1 为

$$P_1 = P_0 - \frac{2\sigma}{r} \quad (1)$$

水柱下端内表面压强 P_2 为

$$P_2 = P_0 + \frac{2\sigma}{a} \quad (2)$$

水柱平衡时有

$$P_2 = P_1 + \rho_0 g h \quad (3)$$

由①②③式得

$$a = \frac{2\sigma r}{\rho_0 g h r - 2\sigma} \quad (4)$$

由④式和题给数据得

$$a = 2.79 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (5)$$

(2) 将该毛细管长度的三分之一竖直浸入水中后，设管内水柱顶部与管外水平的水面高度差为 h_1 ，由平衡条件得

$$\rho_0 \cdot \pi r^2 h_1 g = 2\pi r \cdot \sigma \quad (6)$$

即

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho_0 g r}$$

由上式和题给数据得

$$h_1 = 2.97 \text{ cm} < 4.00 \text{ cm} \quad (7)$$

毛细管内壁所受的附着力 F_1 大小等于管外水平的水面以上管内水柱的重力大小 G_1 ，即

$$F_1 = G_1 = \rho_0 g \pi r^2 h_1 \quad (8)$$

方向向下。玻璃管外壁所受的附着力 F_2 大小为

$$F_2 = \sigma 2\pi R \quad (9)$$

方向向下。设玻璃管长度为 h ，玻璃管所受的重力大小为

$$G = 2\rho_0 g \pi (R^2 - r^2) h \quad (10)$$

方向向下。玻璃管所受到的浮力大小 F_0 为

$$F_0 = \frac{1}{3} h \rho_0 g \pi (R^2 - r^2) \quad (11)$$

方向向上。设向上的拉力大小为 F ，由平衡条件，得

$$F = G + G_1 + F_2 - F_0 \quad (12)$$

由⑦⑧⑨⑩⑪⑫式得

$$\begin{aligned} F &= \rho_0 g \pi (R^2 - r^2) h + \rho_0 g \pi r^2 h_1 + \sigma 2\pi R - \frac{1}{3} \rho_0 g \pi (R^2 - r^2) h \\ &= \frac{5}{3} \rho_0 g \pi h (R^2 - r^2) + 2\pi \sigma (R + r) \end{aligned} \quad (13)$$

由⑬式和题给数据得

$$F = 7.87 \times 10^{-2} \text{ N} \quad (14)$$

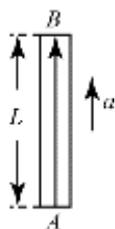
评分参考：第(1)问15分，①②③④⑤式各3分；第(2)问20分，⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各2分，⑬⑭式各3分。

七、(35分)

(1) 爱因斯坦等效原理可表述为：在有引力作用的情况下的物理规律和没有引力但有适当加速度的参考系中的物理规律是相同的。作为一个例子，考察下面两种情况：

(i) 当一束光从引力势比较低的地方传播到引力势比较高的地方时，其波长变长，这个现象称为引力红移。如果在某质量分布均匀的球形星体表面附近的 A 处竖直向上发射波长为 λ_0 的光，在 A 处竖直上方高度为 L 的 B 处放置一固定接收器，求 B 处接收器接收到的光的波长 λ' 。已知该星体质量为 M ，半径为 R ($R \gg L$)；引力场满足弱场条件，可应用牛顿引力理论；真空中的光速为 c ，引力常量为 G 。

(ii) 如图，假设在没有引力的情况下，有一个长度为 L 的箱子，在箱子上、下面的 B 、 A 两处分别放置激光接收器和激光发射器。在 $t=0$ 时刻，箱子从初速度为零开始，沿 AB 方向做加速度为 a 的匀加速运动 ($aL \ll c^2$)，同时从 A 处发出一束波长为 λ_0 的激光。根据狭义相对论，求 B 处接收器接收到的激光波长 λ'' 。



(iii) 根据等效原理，试比较 (i) 和 (ii) 的结果，要使物理规律在 (i) 和 (ii) 中的情况下相同，则 (ii) 中的 a 应为多大？

(2) 引力红移现象的第一个实验验证是在地球表面附近利用穆斯堡尔探测器完成的，穆斯堡尔探测器能以极高的精度分辨伽马光子的能量。按第 (1) (i) 问，在地球表面附近， A 处放置一个静止的伽马辐射源，辐射的伽马光子的频率为 ν_0 ； B 处放置一个穆斯堡尔探测器，假设该探测器在相对于自身静止的参考系中仅能探测到频率为 ν_0 的伽马光子。为了探测到从 A 处发射的伽马光子，该穆斯堡尔探测器需要某一竖直向下的运动速度。1960-1964 年期间，庞德、雷布卡和斯奈德利用美国哈佛大学杰弗逊物理实验室的高塔多次做了这个实验，实验中 $L = 22.6\text{m}$ 。试问： A 处发射的伽马光子被探测到时，该穆斯堡尔探测器的运动速度为多大？已知地球表面重力加速度 $g = 9.81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ，真空中的光速 $c = 3.00 \times 10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

参考解答：

(1) (i) 对于能量为 $\frac{hc}{\lambda_0}$ 的光子，根据质能关系有

$$\frac{hc}{\lambda_0} = mc^2 \quad (1)$$

式中， m 是该光子的等效质量。设在星球的引力场中，星球表面的重力加速度为 g' ，根据万有引力定律有

$$g' = \frac{GM}{R^2} \quad (2)$$

由能量守恒知，光子在 A 、 B 两点的能量相等，即

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + mg'L \quad (3)$$

由①③式得

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 - \frac{g'L}{c^2}\right) \quad (4)$$

由④式解得

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{1}{1 - \frac{g'L}{c^2}} \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{g'L}{c^2}\right) \quad (5)$$

将②式代入⑤式得

$$\lambda' \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{GM}{R^2} \frac{L}{c^2}\right) \quad (6)$$

(ii) 光在真空中的速度大小 c 与发射器的运动状态无关。设 A 发出的光以光速 c 射向接收器 B 的运动需要的时间为 t ，有

$$ct = L + \frac{1}{2}at^2 \quad (7)$$

设接收器 B 接收到激光时相对于地面的速度为

$$v = at \quad (8)$$

由⑦⑧式得

$$v = \frac{aL}{c} \quad (9)$$

已略去 $\frac{aL}{c^2}$ 的高阶小量。按照多普勒频移公式，B 点接收到的光的波长 λ'' 满足

$$\frac{c}{\lambda''} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{c}{\lambda_0} \quad (10)$$

式中

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{aL}{c^2} \quad (11)$$

由于 $\beta \ll 1$ ，有

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{1+\beta}} \approx 1 - \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{1}{1+\beta} \quad (12)$$

将⑪⑫式代入⑩式得，B 点的接收器收到的激光波长为

$$\lambda'' = \lambda_0 \left(1 + a \frac{L}{c^2}\right) \quad (13)$$

(iii) 根据等效性原理，⑥式和⑬式应表达相同的物理规律，若将在 (i) 和 (ii) 中所计算的 B 点接收器收到的激光波长 λ' 和 λ'' 视为同一事件，须有

$$a = \frac{GM}{R^2} \quad (14)$$

(2) 在地球表面，重力加速度为 g ，用 g 代替④式中的 g' 得，B 点接收到的光子的频率 ν' 为

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{gL}{c^2}\right) \quad (15)$$

由⑮式得地球重力作用造成的光子频移为

$$\Delta\nu = \nu' - \nu_0 = -\nu_0 \frac{gL}{c^2}$$

可见，重力作用造成的频率减小了 $\nu_0 \frac{gL}{c^2}$ (红移)，需要由穆斯堡尔探测器的相对于地面的运动来进行补偿，以使用穆斯堡尔探测器能探测到该光子。设穆斯堡尔探测器相对于地面沿 BA 方向运动的速度为 v 时，穆斯堡尔探测器能探测到的光子的频率。按照多普勒频移公式有

$$v_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} v' \quad (16)$$

由⑫⑬式可知

$$v' = \frac{v_0}{1+\beta} \approx v_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (17)$$

由⑮⑯式得

$$\frac{gL}{c^2} = \frac{v}{c} \quad (18)$$

即

$$v = \frac{gL}{c} \quad (19)$$

由⑱式和题给数据得

$$v = \frac{9.81 \times 22.6}{3.00 \times 10^8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7.39 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (20)$$

评分参考：第（1）问 25 分，①②③式各 2 分，⑤式 3 分，⑥⑦⑧⑨⑩⑫⑬⑭式各 2 分；第（2）问 10 分，⑮⑯⑰⑱⑳式各 2 分。

八、（35 分）用薄膜制备技术在某均质硅基片上沉积一层均匀等厚氮化镓薄膜，制备出一个硅基氮化镓样品，如图 1 所示。



图 1

（1）当用波长范围为 450 ~ 1200nm 的光垂直均匀照射该样品氮化镓表面，观察到其反射光谱仅有两种波长的光获得最大相干加强，其中之一波长为 600nm；氮化镓的折射率 n 与入射光在真空中波长 λ （单位 nm）之间的关系（色散关系）为

$$n^2 = 2.26^2 + \frac{330.1^2}{\lambda - 265.7^2}$$

硅的折射率随波长在 3.49 ~ 5.49 范围内变化。只考虑氮化镓表面和氮化镓-硅基片界面的反射，求氮化镓薄膜的厚度 d 和另一种获得最大相干加强光的波长。

（2）在该样品硅基片的另一面左、右对称的两个半面上分别均匀沉积一光谱选择性材料涂层，如图 2 所示；对某种特定波长的光，左半面涂层全吸收，右半面全反射。用两根长均为 a 的轻细线竖直悬挂该样品，样品长为 a 、宽为 b ，可绕过其中心的光滑竖直固定轴 OO' 转动，也可上下移动，如图 3 所示。开始时，样品静止，用上述特定波长的强激光持续均匀垂直照射该样品涂层表面。此后保持激光方向始终不变，样品绕 OO' 轴转动直至稳定。涂层表面始终被激光完全照射。不计激光对样品侧面的照射。设硅基片厚度为 d' 、密度为 ρ' ，氮化镓薄膜的厚度为 d 、密度为 ρ ，涂层质量可忽略，真空的介电常量 ϵ_0 ，重力加速度为 g 。若样品稳定后相对于光照前原位形的转角为 α ，求所用强激光的电场强度有效值 E 。

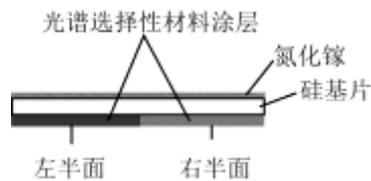


图 2

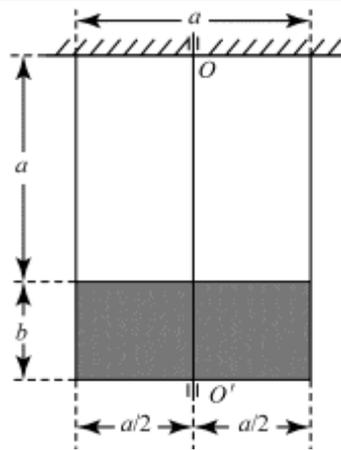


图 3

(3) 取 $E = 5.00 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $d' = 3.00 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\rho' = 2.33 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho = 6.10 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 求 α 的值。

参考解答:

(1) 已知入射光的波长范围为 450–1200nm, 由色散关系可得到折射率范围

$$2.278 \leq n \leq 2.436$$

可见, 氮化镓的折射率小于硅的折射率, 在空气-氮化镓和氮化镓-硅界面处均要考虑半波损失, 但对于两界面反射光的干涉不需要考虑半波损失。

设对于波长为 600nm 的入射光, 薄膜的折射率为 n_1 ; 对于波长 λ 的入射光, 薄膜的折射率为 n 。对于波长为 600nm 的入射光, 光经厚度为 d 的氮化镓薄膜的前、后面反射后, 在表面相遇, 相干加强条件为

$$2n_1d = k_1\lambda_1 \quad (k_1 = 1, 2, \dots) \quad ①$$

同理, 对于波长 λ 的入射光, 相干加强的条件有为

$$2nd = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots) \quad ②$$

由①②式有

$$\frac{k_1}{k} \frac{n}{n_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \text{ 或 } \frac{k_1}{k} = \frac{n_1}{n} \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad ③$$

由③式, 根据题意, 设 λ' 和 λ'' 分别对应 450nm 和 1200nm 的入射光波长, 薄膜相应的折射率分别为 n' 和 n'' , 根据题给色散关系得

$$n_1(660\text{nm}) \approx 2.342, \quad n'(450\text{nm}) \approx 2.436, \quad n'(1200\text{nm}) \approx 2.278 \quad ④$$

由④式有

$$\frac{k_1}{k'} = \frac{n_1(600)}{n'(450)} \frac{450}{600} \approx 0.721, \quad \frac{k_1}{k''} = \frac{n_1(600)}{n''(1200)} \frac{1200}{600} \approx 2.056 \quad ⑤$$

由⑤式和题意, 得

$$\frac{k_1}{k'} < \frac{k_1}{k} < \frac{k_1}{k''} \quad ⑥$$

由⑥式和题给条件知仅有

$$k_1 = 2, \quad k = 1 \quad ⑦$$

符合条件, 由④⑦式代入①式得

$$d \approx 256\text{nm} \quad \textcircled{8}$$

将⑦⑧式代入②式得

$$\frac{\lambda}{n} \approx 512.38 \quad \textcircled{9}$$

由题给色散关系式和⑨式得

$$2.41n^4 - 12.97n^2 + 2.32 = 0$$

或

$$2.41\left(\frac{\lambda}{512.38}\right)^4 - 12.97\left(\frac{\lambda}{512.38}\right)^2 + 2.32 = 0$$

由此方程得

$$\lambda = 1168\text{nm} \quad \textcircled{10}$$

另一解 $\lambda = 220\text{nm}$ 不在题给波长范围内，舍去。

(2) 设频率为 ν 的单色光，每秒垂直入射到物体表面每平方米上的光子数为 N 。每个光子传给物体的动量 $\frac{h\nu}{c}$ (h 为普朗克常数， c 是真空中光速)，若入射光子全被物体吸收，则该表面每平方米在每秒

内所获得的动量即光压 P_0 为

$$P_0 = N \frac{h\nu}{c}$$

每个光子传给物体的能量为 $h\nu$ ，每秒垂直入射到全吸收物体表面每平方米上的能量为

$$Nh\nu = \bar{w}c$$

式中 \bar{w} 为电磁波平均能量密度

$$\bar{w} = \varepsilon_0 E^2$$

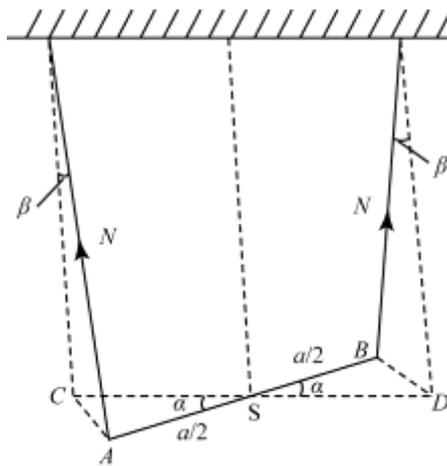
由以上三式得，频率为 ν 的单色光正如射到全吸收表面时对该表面的光压 P_0 为

$$P_0 = \bar{w} = \varepsilon_0 E^2 \quad \textcircled{11}$$

辐射压强对样品的合力矩为

$$L_p = \left(2P_0 \cdot \frac{ab}{2} \cdot \cos\alpha\right) \cdot \frac{a}{4} \cdot \cos\alpha - \left(P_0 \cdot \frac{ab}{2} \cdot \cos\alpha\right) \cdot \frac{a}{4} \cdot \cos\alpha = P_0 \cdot \frac{a^2 b}{8} \cdot \cos^2\alpha \quad \textcircled{12}$$

如图，由几何关系可知



$$AC = a \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \quad (13)$$

样品在竖直方向受力平衡，由⑬式得

$$2N \cos \frac{\alpha}{2} = Mg \quad (14)$$

式中 N 为细绳的拉力， M 为基片质量 m' 和氮化镓薄膜质量 m 的和，即

$$M = m' + m = (\rho'd' + \rho d)ab \quad (15)$$

由⑮⑯式得，轻细线提供给样品转矩为

$$L_N = 2N \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (16)$$

根据样品所受力矩平衡条件 $L_N = L_p$ ，由⑬⑮⑯式得，

$$(\rho'd' + \rho d)ab \cdot g \cdot \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = P_0 \cdot \frac{a^2 b}{8} \cdot \cos^2 \alpha \quad (17)$$

由⑮⑯式得

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4(\rho'd' + \rho d)g}$$

即

$$E = 2 \left[\frac{(\rho'd' + \rho d)g \sin \frac{\alpha}{2}}{\varepsilon_0 \cos^2 \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

(3) 将题给数据代入⑱式

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha} = 8.12 \times 10^{-4} \quad (19)$$

考虑到⑱式右边很小， α 也很小，由⑱式和 $\sin \alpha \approx \alpha$ 与 $\cos \alpha \approx 1$ ，得

$$\alpha \approx 1.62 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (20)$$

评分参考：第(1)问 15分，①②式各1分，④⑤⑥⑦⑧式各2分，⑨式1分，⑩式2分；第(2)问 18分，⑪⑫式各4分，⑬式1分，⑭式2分，⑮式1分，⑯⑰⑱式各2分；第(3)问 2分，⑳式2分。