2013年北京市中学生数学竞赛高一年级初赛试题及解答

一、选择题(满分36分)

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B\{2,3,4,5,6\}$,则集合 $C=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B$,且关于 x 的方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 有实根$\}$的元素个数为(　　).

(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

解　当 $a>0,b>0$ 时,$x^2+2ax+b^2=0$ 有实根的充要条件为 $a\geqslant b$.

设集合 $D=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$,$D$ 的元素个数为 $5\times5=25$ 个,而 C 是 D 的子集,因此,集合 C 的元素如右面的整点图1中的黑点所示:

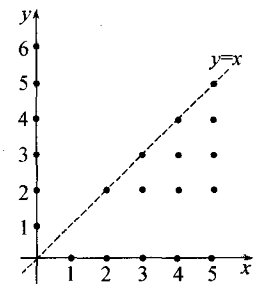

图1

因此,C 的元素个数等于10.

2. 已知 $\sqrt{24-a}-\sqrt{8-a}=2$,则 $\sqrt{24-a}+\sqrt{8-a}$ 等于(　　).

(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

解　$\sqrt{24-a}+\sqrt{8-a}=\dfrac{(\sqrt{24-a})^2-(\sqrt{8-a})^2}{\sqrt{24-a}-\sqrt{8-a}}=\dfrac{24-8}{2}=8.$

3. 如图2所示,矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 经过坐标原点 O,矩形的边分别平行于坐标轴,点 C 在反比例函数 $y=\dfrac{3k+1}{x}$ 的图像上,若 A 点的坐标为 $(-2,-2)$,则 k 等于(　　).

(A)2　　(B)1　　(C)0　　(D)-1.

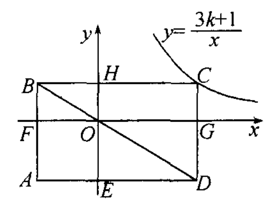

图2

解　因为矩形的对角线平分矩形的面积,所以矩形 $CHOG$ 的面积=矩形 $OFAE$ 的面积 $=|-2|\times|-2|=4$. 即 $3k+1=OG\times GC=4$,因此 $k=1$.

4. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$,满足 $f(x+1)=-f(x)$,且在区间 $[-1,0]$ 上递增,则(　　).

(A)$f(3)<f(\sqrt{3})<f(2)$　　(B)$f(2)<f(3)<f(\sqrt{3})$

(C)$f(3)<f(2)<f(\sqrt{3})$　　(D)$f(2)<f(\sqrt{3})<f(3)$

解　根据题意 $f(x)=-f(x+1)=-[-f(x+2)]=f(x+2)$,因为 $f(x)$ 是偶函数,即 $f(a)=f(-a)$,则 $f(3)=f(1)=f(-1)$,$f(2)=f(0)$,$f(\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})=f(2-\sqrt{3})=f(\sqrt{3}-2)$. 而 $-1<\sqrt{3}-2<0$,$f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上递增,所以 $f(3)<f(\sqrt{3})<f(2)$.

5. 由1开始的连续 n 个正整数相乘,简记为 $n!=1\times2\times\cdots\times n$,如 $3!=1\times2\times3=6$,$10!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=3628800$ 等等,则 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{5}{6!}+\dfrac{6}{7!}+\dfrac{7}{8!}$ 等于(　　).

(A)$\dfrac{719}{720}$　　(B)$\dfrac{5039}{5040}$　　(C)$\dfrac{40319}{40320}$　　(D)$\dfrac{40321}{40320}$.

解　因为 $\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{n}{n!}-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$,

所以 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\dfrac{5}{6!}+\dfrac{6}{7!}+\dfrac{7}{8!}$.

$=(\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!})+(\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!})+(\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!})+(\frac{5}{5!}-\frac{1}{5!})+(\frac{6}{6!}-\frac{1}{6!})+(\frac{7}{7!}-\frac{1}{7!})+(\frac{8}{8!}-\frac{1}{8!})$

$=(1-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!})+(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})+(\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!})+(\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!})+(\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!})$

$=1-\frac{1}{8!}=1-\frac{1}{40320}=\frac{40319}{40320}.$

6. 如图3，正方形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，P 为劣弧$\overset{\frown}{CD}$上一点，PA 交 BD 于点 M，PB 交 AC 于点 N，记$\angle PAC=\theta$，若 $MN\perp PA$，则 $2\cos^2\theta-\tan\theta$ 的值等于(　　).

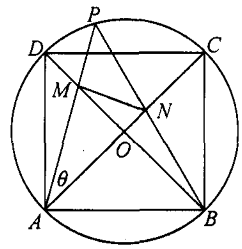

图3

(A) 1　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解　∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle ACB=45^\circ$，$DB\perp AC$，

∴ $\angle APB=\angle ACB=45^\circ$，

∵ $MN\perp PA$，

∴ $\angle MNP=\angle APB=45^\circ$，

∴ $MP=MN$.

∵ AC 为圆的直径，

∴ $\angle APC=90^\circ$，

∴ P、M、O、C 四点共圆.

∴ $AM\cdot AP=AO\cdot AC$.

因此　$2\cos^2\theta-\tan\theta=2\cdot\frac{AO^2}{AM^2}-\frac{MN}{AM}=\frac{2AO^2-AM\cdot MN}{AM^2}$

$=\frac{AO\cdot AC-AM\cdot MN}{AM^2}=\frac{AM\cdot AP-AM\cdot MN}{AM^2}$

$=\frac{AP-MN}{AM}=\frac{AP-PM}{AM}=1.$

二、填空题(满分64分)

1. 求$\frac{\sin^2 30^\circ+\sin^2 35^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 55^\circ+\sin^2 60^\circ}{\tan 36^\circ\times\tan^3 39^\circ\times\tan^5 42^\circ\times\tan^7 45^\circ\times\tan^5 48^\circ\times\tan^3 51^\circ\times\tan 54^\circ}$的值.

解　注意到 $\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sin^2 45^\circ=\frac{1}{2}$，

n 为正整数时，$\tan^n\alpha\times\tan^n(90^\circ-\alpha)=\tan^n\alpha\times\cot^n\alpha=(\tan\alpha\times\cot\alpha)^n=1$，$\tan 45^\circ=1$，

则　$\frac{\sin^2 30^\circ+\sin^2 35^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 55^\circ+\sin^2 60^\circ}{\tan 36^\circ\times\tan^3 39^\circ\times\tan^5 42^\circ\times\tan^7 45^\circ\times\tan^5 48^\circ\times\tan^3 51^\circ\times\tan 54^\circ}=3.5.$

2. $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+2x+b$(b 为常数)，求 $f(-10)$的值.

解　因为 $f(x)$为定义在 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $2^0+2\times 0+b=0$，得 $b=-1$. 由奇函数的性质 $f(-x)=-f(x)$，有

若 $x<0$，即 $-x>0$，则 $-f(x)=f(-x)=2^{-x}-2x-1$，即 $f(x)=-2^{-x}+2x+1(x<0)$.

所以　$f(-10)=-2^{10}-2\times 10+1=1043.$

3. 若实数 x,y,z 满足方程$\sqrt{x+9+\sqrt{x-7}}+\frac{|x+y-z|}{4}=4$，试确定$(5x+3y-3z)^{2013}$的末位数字.

解 易见 $x\geqslant7$，则$\sqrt{x+9+\sqrt{x-7}}\geqslant4$，而$\frac{|x+y-z|}{4}\geqslant0$，又 x,y,z 满足方程$\sqrt{x+9+\sqrt{x-7}}+\frac{|x+y-z|}{4}=4$，所以$\sqrt{x+9+\sqrt{x-7}}=4$，且$\frac{|x+y-z|}{4}=0$.

所以 $x=7$，$x+y-z=0$，$(5x+3y-3z)^{2013}=14^{2013}$，这个数的末位数字为 4.

4. 如图 4，正方形 $ABCD$ 被分成了面积相等的 8 个三角形，如果 $AG=\sqrt{50}$，求正方形 $ABCD$ 面积的值.

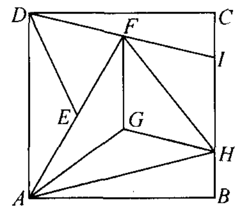

图 4

解 如图 5，过 F 作 $KL\parallel DC$，取 AB 的中点 N，延长 GN 交 AH 于 P，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，

由于$\triangle DCI$、ABH 的面积都是正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{8}$，

所以 $CI=BH=\frac{1}{4}BC=\frac{a}{4}$.

由$\triangle ADF$ 的面积$=\triangle DCL$ 的面积的 2 倍，得

$\frac{1}{2}AD\times KF=2\times\frac{1}{2}CD\times CI$.

所以 $KF=2CI=\frac{1}{2}a$.

所以 F 为 DI 中点.

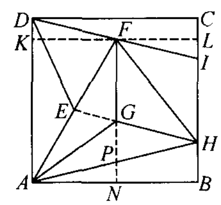

图 5

易见，E 是 AF 的中点，由$\triangle FAG$、$\triangle FHG$ 的面积相等，可得 $AP=PH$，即 FP 为$\triangle FAH$ 的一条中线，因此 F、P、N 是一条直线.

同理可证，HG 的延长线必过 AE 的中点 E，所以 HE 为$\triangle FAH$ 的另一条中线，中线 FP 与 HE 的交点 G 为$\triangle FAH$ 的重心，$GP=\frac{1}{2}FG$.

注意 FP 为梯形 $AHID$ 的中位线，$FP\parallel BC$，所以 $FP=\frac{HI+AD}{2}=\frac{\frac{1}{2}a+a}{2}=\frac{3a}{4}$，所以 $GP=\frac{1}{3}FP=\frac{a}{4}$，所以 $GN=GP+PN=\frac{a}{4}+\frac{a}{8}=\frac{3a}{8}$.

而 $AN=\frac{a}{2}$，根据勾股定理，有 $AG^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(\frac{3a}{8})^2=\frac{25a^2}{64}$，即 $50=\frac{25a^2}{64}$，所以 $a^2=128$.

5. 已知实数 m、n 满足 $m-n=\sqrt{10}$，m^2-3n^2 为质数. 若 m^2-3n^2 的最大值为 a，最小值为 b. 试确定 $a-b$ 的值.

解 设 $m^2-3n^2=p$(p 为质数). ①

由 $m-n=\sqrt{10}$，得 $m=\sqrt{10}+n$. ②

把②式代入①式得$(\sqrt{10}+n)^2-3n^2=p$，整理得 $2n^2-2\sqrt{10}n+p-10=0$，

$\therefore$ $\Delta=40-8p+80\geqslant0$，$\therefore$ $p\leqslant15$.

$\therefore$ p 的最大值 $a=13$，最小值 $b=2$，

$\therefore\ a-b=11.$

6.如图6,在$\triangle ABC$的边BC上有一点D,$\angle ADB$是锐角,P、Q分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的外心,且四边形$APDQ$面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{3}{4}$.求$\sin\angle ADB$的值.

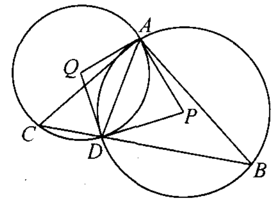

图6

解 如图7,连结PQ,易证$\triangle AQP\cong\triangle DQP$,

由已知得 $\dfrac{S_{\triangle AQP}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{8}$,

易证:$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$,所以$\dfrac{S_{\triangle AQP}}{S_{\triangle ABC}}=(\dfrac{AQ}{AC})^2$,所以$\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

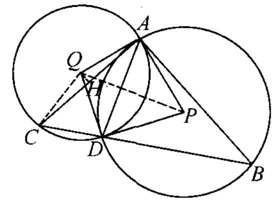

图7

连结QC,作$OH\perp AC$于H,则

$\angle ADB=\angle ACD+\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}=\frac{1}{2}\angle AQC=\angle AQH.$

所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle AQH=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

7.$S(x)$表示自然数x的数字和,试确定方程$x+S(x)+S(S(x))=2013$的解集.

解 显然$x<2013$,而$S(x)$最大值为28,$S(S(x))$最大值为10,因此x最小值为$2013-38=1975$.因此$1975\leqslant x<2013$,容易试验得

$x=2003,S(2003)=5,S(S(2003))=5,2003+5+5=2013$;

$x=1991,S(1991)=20,S(S(1991))=2,1991+20+2=2013$;

$x=1985,S(1985)=23,S(S(1985))=5,1985+23+5=2013$;

$x=1979,S(1979)=26,S(S(1979))=8,1979+26+8=2013$.

除此之外的x都不满足方程,所以解集是$\{1979,1985,1991,2003\}$.

8.直角$\triangle ABC$中,内切圆$\odot O$切斜边AB于D,切BC于E,切CA于F,作$DK\perp AC$于K,$DP\perp BC$于P,已知$AD=m$,$BD=n$,试确定矩形$CKDP$的面积(用m,n来表示).

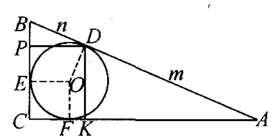

图8

解 设内切圆半径为r,连结OD,OE,OF,如图8,则 $OD=OE=OF=r$.

由切线长定理得 $AD=AF=m,BD=BE=n,CE=CF=r$.

设$\triangle ABC$的半周长为p,面积为S,则$p=r+m+n$,所以 $S=\dfrac{(r+m)(r+n)}{2}$.

即 $2S=r^2+rm+rn+mn=r(r+m+n)+mn=rp+mn$.

因为$S=rp$,代入上式得 $S=mn$.

因为$DK\parallel BC$,所以 $\triangle ADK\backsim\triangle ABC$,

所以 $S_{\triangle ADK}=S_{\triangle ABC}\times\dfrac{m^2}{(m+n)^2}=mn\times\dfrac{m^2}{(m+n)^2}=\dfrac{m^3n}{(m+n)^2}$,

同理可得 $S_{\triangle BDP}=S_{\triangle ABC}\times\dfrac{n^2}{(m+n)^2}=mn\times\dfrac{n^2}{(m+n)^2}=\dfrac{mn^3}{(m+n)^2}$,

因此,矩形$CKDP$的面积$=mn-\dfrac{m^3n}{(m+n)^2}-\dfrac{mn^3}{(m+n)^2}=\dfrac{2m^2n^2}{(m+n)^2}$.

(北京数学会普及委员会提供)