2009年北京市中学生数学竞赛高一年级初赛试题及参考解答

一、选择题(满分36分,每小题只有一个正确答案,答对得6分,答错或不答均计0分)

1. 图1表示的是定义在$[-4,6]$上的函数$y=f(x)$与函数$y=g(x)$的图像.则使$f(x)\leqslant g(x)$成立的区间是(　　).

(A) $[-1,3]$　(B) $[-4,3]\cup[5,6]$

(C) $[-4,2]$　(D) $[-4,-1]\cup[3,6]$

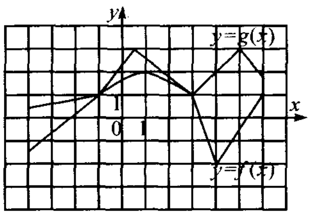

图1

答:(D).

2. 将sin12,cos13,cos14从小到大排列的次序是(　　).

(A) $\sin12<\cos13<\cos14$

(B) $\sin12<\cos14<\cos13$

(C) $\cos13<\sin12<\cos14$

(D) $\cos14<\cos13<\sin12$

答:(B).

解　因为$3\pi<12<4\pi$,所以$\sin12<0$.又$4\pi<13<14<4.5\pi$,13与14弧度都是第一象限的角,余弦函数取正值且在第一象限是减函数,所以$\cos13>\cos14>0>\sin12$.选(B).

3. 在$\triangle ABC$中,$AB=6$,$AC=8$,$\angle BAC=90^\circ$.AD、BE分别为边BC和AC上的中线.则向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$之间所成角的余弦值等于(　　).

(A) $\frac{\sqrt{13}}{65}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\frac{\sqrt{13}}{65}$　(D) 0

答:(C).

解　以A为原点、两直角边为坐标轴建立直角坐标系,如图2所示.则$A(0,0)$,$B(6,0)$,$C(0,8)$,$D(3,4)$,$E(0,4)$.于是$\overrightarrow{AD}$的坐标为$(3,4)$,$\overrightarrow{BE}$的坐标为$(-6,4)$,所以

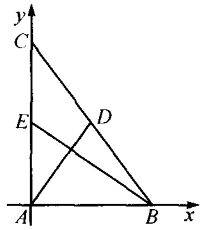

图2

$$\cos(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE})=\frac{3\times(-6)+4\times4}{\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{(-6)^2+4^2}}=\frac{-2}{5\times2\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}.$$

4. $\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}$等于(　　).

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3

答:(A).

解　$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}$

$$=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{4}\cdot2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\log_2\frac{1}{8}$$
$$=-3.$$

5. 对于函数$f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c & (x\geqslant0),\\ -2 & (x<0),\end{cases}$ $f(4)=f(0)$,$f(1)=-1$,则方程$f(x)=x$的解的个数为(　　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

答:(D).

解　由$f(4)=f(0)$,$f(1)=-1$,得$16+$

$4b+c=c$, $1+b+c=-1$，解得 $b=-4$, $c=2$. 所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+2 & (x\geqslant 0),\\ -2 & (x<0),\end{cases}$

其图像如图 3 所示，共 3 个解.

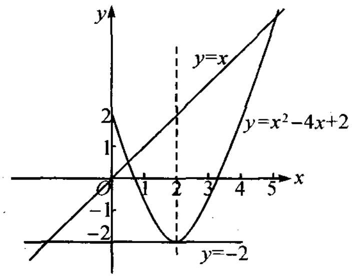

图 3

6. a 为参数，函数 $f(x)=(x+a)3^{x-2+a^2}-(x-a)3^{8-x-3a}$ 是偶函数，则 a 可取值的集合是(　　).

(A) $\{0,5\}$　　(B) $\{-2,5\}$

(C) $\{-5,2\}$　　(D) $\{1,2009\}$

答:(C).

解　如果函数 $f(x)=(x+a)3^{x-2+a^2}-(x-a)3^{8-x-3a}$ 是偶函数，则 $f(-a)=f(a)$，

即 $2a\cdot 3^{8+a-3a}=2a\cdot 3^{a-2+a^2}$. 所以，要么 $a=0$，要么 $8+a-3a=a-2+a^2$.

若取 $a=0$，函数 $f(x)=x(3^{x-2}-3^{8-x})$ 不是偶函数. 故 $a\neq 0$.

若 $8+a-3a=a-2+a^2$，则 $a=-5$，或 $a=2$，此时，函数 $f(x)=-(5-x)3^{23+x}-(5+x)3^{23-x}$ 和 $f(x)=(2+x)3^{2+x}+(2-x)3^{2-x}$ 都是偶函数.

二、填空题(满分 64 分，每小题 8 分)

1. 依次排列的正数 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{59},b_{60}$ 满足

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\cdots=\frac{b_{59}}{b_{58}}=\frac{b_{60}}{b_{59}},$$

试确定 $\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2\cdots b_{60})$ 的值.

答:30.

解　设 $\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\cdots=\frac{b_{59}}{b_{58}}=\frac{b_{60}}{b_{59}}=q$，

所以 $b_2=b_1q$, $b_3=b_1q^2$, $b_4=b_1q^3$, $\cdots$, $b_{58}=b_1q^{57}$, $b_{59}=b_1q^{58}$, $b_{60}=b_1q^{59}$.

则　$\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2\cdots b_{60})$

$=\log_{b_1q^{10}\cdot b_1q^{49}}(b_1q^0\cdot b_1q^1\cdot\cdots\cdot b_1q^{59})$

$=\log_{b_1^2q^{10+49}}(b_1^{60}q^{0+1+\cdots+59})$

$=\log_{b_1^2q^{59}}(b_1^2q^{59})^{30}=30$.

2. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=0.8$, $\cos(\alpha-\beta)=0.3$，求 $(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$ 的值.

答:-0.5.

解　$(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$\quad-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=0.3-0.8$

$=-0.5$.

3. 如果四边形 $ABCD$ 顶点的坐标依次为 $A(1,2)$, $B(2,5)$, $C(7,3)$, $D(5,1)$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

答:13.5.

解　如图 4，在坐标平面上作点 A,B,C,D，围绕所得到的四边形 $ABCD$ 作外接长方形，其顶点为 $M(1,1)$, $N(1,5)$, $P(7,5)$, $T(7,1)$，四边形 $ABCD$ 则是从长方形 $MNPT$ 中去掉 $\triangle AMD$、$\triangle ANB$、$\triangle BPC$、$\triangle CTD$ 得到的图形，易知

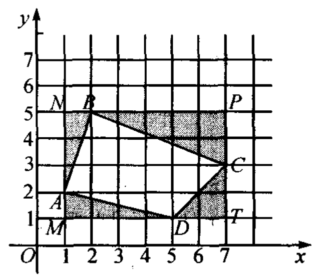

图 4

$S_{MNPT}=24$,　$S_{\triangle AMD}=2$,　$S_{\triangle ANB}=1.5$,

$S_{\triangle BPC}=5$,　$S_{\triangle CTD}=2$,

因此，$S_{ABCD}=24-(2+1.5+5+2)$

$=13.5$.

4. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $[\log_3 6]+[\log_3 7]+[\log_3 8]+\cdots+[\log_3$

$(n-1)]+[\log_3 n]=2009$，

试确定正整数 n 的值.

答：474.

解 $\because$ $[\log_3 6]=[\log_3 7]=[\log_3 8]=1$，

$\therefore$ $[\log_3 6]+[\log_3 7]+[\log_3 8]=3$，

$\because$ $[\log_3 9]=[\log_3 10]=\cdots=[\log_3 26]=2$，

$\therefore$ $[\log_3 9]+[\log_3 10]+\cdots+[\log_3 26]=36$，

$\because$ $[\log_3 27]=[\log_3 28]=\cdots=[\log_3 80]=3$，

$\therefore$ $[\log_3 27]+[\log_3 28]+\cdots+[\log_3 80]$
$=162$，

$\because$ $[\log_3 81]=[\log_3 82]=\cdots=[\log_3 242]=4$，

$\therefore$ $[\log_3 81]+[\log_3 82]+\cdots+[\log_3 242]$
$=648$，

又$\because$ $3+36+162+648=849$
$=2009-1160<2009$，

$[\log_3 243]=[\log_3 244]=\cdots=[\log_3 728]$
$=5$，

$[\log_3 243]+[\log_3 244]+\cdots+[\log_3 728]$
$=2430>1160$，

$\therefore$ $243<243<n<728.\ n<728.$

由于 $849+5\times(n-242)=2009$，

解得 $n=474$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC>AC$，AH 与 AM 分别为 BC 上的高线和中线，$\dfrac{S_{\triangle AMH}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{8}$. 试确定 $\cos\angle BAC$ 的值.

答：$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{4}$.

解 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC>AC$，$AH\perp BC$，$BM=MC$，作 $BD\perp AC$ 于 D.

设 $AB=BC=a$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{1}{2}AH\cdot a$，且 $S_{\triangle AMH}=\dfrac{1}{2}AH\cdot MH$，

因为 $\dfrac{S_{\triangle AMH}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{8}$，

所以 $\dfrac{\frac{1}{2}AH\cdot MH}{\frac{1}{2}AH\cdot a}=\dfrac{3}{8}$，

所以 $MH=\dfrac{3}{8}a$，

$HC=MC-MH=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{8}a=\dfrac{1}{8}a$.

设 $\angle BAC=\beta$，则 $\angle BCA=\beta$.

由 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 得 $DC=a\cos\beta$.

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2DC=2a\cos\beta$.

由 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 得 $\cos\beta=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{\frac{1}{8}a}{2a\cos\beta}$，

即 $\cos^2\beta=\dfrac{1}{16}$. 由于 β 是锐角，

所以 $\cos\beta=\dfrac{1}{4}$.

6. 函数 $f(x)=2x^2-2x-1$ 和 $g(x)=-5x^2+2x+3$ 的图像交于两个点，通过这两个交点的直线方程为 $y=ax+b$. 求 $a-b$ 的值.

答：-1.

解 函数 $f(x)=2x^2-2x-1$ 和 $g(x)=-5x^2+2x+3$ 的图像两个交点的坐标是方程组 $\begin{cases}y=2x^2-2x-1\\y=-5x^2+2x+3\end{cases}$ 的两个解，因此

$$7y=5(2x^2-2x-1)+2(-5x^2+2x+3)$$
$$=-6x+1.$$

所以图形的两个交点在直线 $y=-\dfrac{6}{7}x+\dfrac{1}{7}$ 上，即 $a=-\dfrac{6}{7}$，$b=\dfrac{1}{7}$，$a-b=-1$.

7. 知 6027 位数 $\underbrace{\overline{abcabcabc\cdots abc}}_{2009\text{个}abc}$ 是 91 的倍数. 求三位数 $\overline{abc}$ 的最小值与最大值的和.

答：1092.

解 由于 $91=7\times13$，$1001=7\times11\times13$，所以 $91\mid1001$. 而 $\overline{abcabc}=1001\times\overline{abc}$，所以 $91\mid\overline{abcabc}$. 已知 $\underbrace{\overline{abcabcabc\cdots abc}}_{2009\text{个}abc}$ 被 91 整除，而

$$\underbrace{\overline{abcabcabc\cdots abc}}_{2009\text{个}abc}=\underbrace{\overline{abcabcabc\cdots abc}}_{2\times1004\text{个}abc}\times1000+\overline{abc}，$$

又 $\underbrace{\overline{abcabcabc\cdots abc}}_{2\times1004\text{个}abc}$ 被 91 整除，所以 $\overline{abc}$ 被 91 整除. 能被 91 整除的三位数最小为 182，最大为

910,所以$\overline{abc}$的最小值与最大值的和$=182+910=1092$.

8. 如图5,在菱形$ABCD$中,$\angle ABC=120°$,$BC=6\sqrt{3}$,P是BC延长线上向远离点C方向运动的一个动点,AP交CD于点E,联结BE并延长交DP于点Q.如果动点P在初始位置时$\angle QBP=15°$,在终止位置时$\angle QBP=35°$,试确定P运动时点Q走过的曲线段的长度.

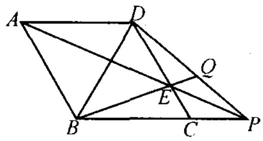

图5

答:$\frac{4}{3}\pi$.

解 如图6,连接BD,作$\triangle ABD$的外接圆交AP于F,连接BF,DF,FC和CQ,易知$\angle DFB=\angle DFP=\angle BFP=120°$,$\angle BFE=\angle ECP=120°$,所以$B$,$F$,$E$,$C$四点共圆,所以$\angle 1=\angle 2$,由于$\angle DFP=\angle DCP=120°$,所以$D$,$F$,$C$,$P$四点共圆,所以$\angle 2=\angle 3$,因此$\angle 1=\angle 3$,所以$B$,$C$,$Q$,$D$四点共圆.即点$Q$在$\triangle BCD$的外接圆上.

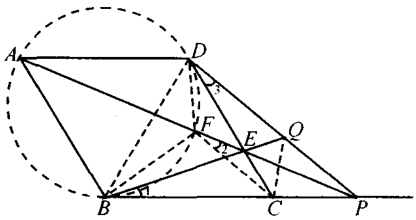

图6

易知,当P在BC延长线上由C向外运动时,Q在$\triangle BCD$的外接圆的$\overset{\frown}{CD}$上从点C起沿逆时针方向运动.

$\triangle BCD$是边长为$6\sqrt{3}$的正三角形,它的外接圆半径为$6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=6$,所以外接圆周长为$2\pi\times 6=12\pi$.由于$Q$在$\triangle BCD$的外接圆上运动的圆周角等于$35°-15°=20°$,所以$Q$在$\triangle BCD$的外接圆上运动的弧为$40°$,是整个圆周的$\frac{1}{9}$,所以,动点$P$运动时$Q$走过的这段曲线$\overset{\frown}{Q_1Q_2}$的长度为$\frac{12\pi}{9}=\frac{4}{3}\pi$.

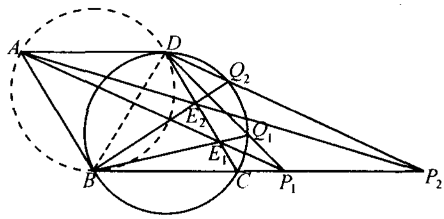

图7

(北京数学会普及委员会提供)

(上接第39页)

由柯西不等式可得$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\geqslant\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{个}1}{}^2=n^2$,

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$\geqslant\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$=\frac{n^2}{(1+\frac{2}{3})+(1+\frac{2}{3^2})+\cdots+(1+\frac{2}{3^n})}$$

$$=\frac{n^2}{n+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}}$$

$$=\frac{n^2}{n+1-(\frac{1}{3})^n}>\frac{n^2}{n+1}.$$

此证明更自然、简洁明了,让人回味无穷.

三、体会

由此可见我们在以后数列的学习中,不仅要注重通性通法,更要在细微处下功夫.既要从宏观上把握方法,又要在细微处灵活调整.

(责审 张思明)