

物理竞赛专题

（高中版）

目录

最新高中物理竞赛讲义（完整版）	1
第 0 部分 绪言	3
一、高中物理奥赛概况	3
二、知识体系	3
第一部分 力 & 物体的平衡	4
第一讲 力的处理	4
第二讲 物体的平衡	6
第三讲 习题课	7
第四讲 摩擦角及其它	10
第二部分 牛顿运动定律	13
第一讲 牛顿三定律	13
第二讲 牛顿定律的应用	14
第二讲 配套例题选讲	22
第三部分 运动学	22
第一讲 基本知识介绍	22
第二讲 运动的合成与分解、相对运动	24
第四部分 曲线运动 万有引力	26
第一讲 基本知识介绍	26
第二讲 重要模型与专题	27

第三讲 典型例题解析.....	36
第五部分 动量和能量.....	36
第一讲 基本知识介绍.....	36
第二讲 重要模型与专题.....	38
第三讲 典型例题解析.....	50
第六部分 振动和波.....	51
第一讲 基本知识介绍.....	51
第二讲 重要模型与专题.....	55
第三讲 典型例题解析.....	63
第七部分 热学.....	64
一、分子动理论.....	64
二、热现象和基本热力学定律.....	66
三、理想气体.....	68
四、相变.....	74
五、固体和液体.....	78
第八部分 静电场.....	79
第一讲 基本知识介绍.....	79
第二讲 重要模型与专题.....	82
第九部分 稳恒电流.....	92
第一讲 基本知识介绍.....	92
第二讲 重要模型和专题.....	96
第十部分 磁场.....	105

第一讲 基本知识介绍.....	105
第二讲 典型例题解析.....	109
第十一部分 电磁感应.....	115
第一讲、基本定律.....	115
第二讲 感生电动势.....	118
第三讲 自感、互感及其它.....	122
第十二部分 量子论.....	125
第一节 黑体辐射.....	125
第二节 光电效应.....	128
第三节 波粒二象性.....	134
第四节 测不准关系.....	137

第 0 部分 绪言

一、高中物理奥赛概况

1、国际 (International Physics Olympiad 简称 IPhO)

- ① 1967 年第一届，(波兰) 华沙，只有五国参加。
- ② 几乎每年一届，参赛国逐年增加，每国代表不超过 5 人。
- ③ 中国参赛始于 1986 年的第十七届，此后未间断，成绩一直辉煌。
- ④ 1994 年第二十五届，首次在中国 (北京) 承办。
- ⑤ 考试内容：笔试和试验各 5 小时，分两天进行，满分各为 30 分和 20 分。成绩最佳者记 100%，积分在 90% 以上者获金奖，78%~89 者获银奖，65~77% 者获铜奖。

2、国家 (Chinese Physics Olympiad 简称 CPhO)

① 1984 年以前，中学物理竞赛经常举行，但被冠以各种名称，无论是组织，还是考纲、知识体系都谈不上规范。

② 1984 年开始第一届 CPhO，此后每学年举办一届。

③ 初赛：每年九月第一个星期天考试。全国命题，各市、县组考，市统一阅卷，选前 30 名 (左右) 参加 (全省) 复赛。

复赛：九月下旬考试。全省命题，各省组织。理论考试前 20 名参加试验考试，取理论、试验考试总分前 10 名者参加省集训队。集训队成员经短期培训后推荐 3~7 名参加 (全国) 决赛。

决赛：全国统一组织。按成绩挑选 15~25 名参加国家集训队，到有关大学强化训练，最后从中选拔 5 名优秀队员参加 IPhO。

④ 满分 140 分。除初赛外，均含理论和试验两部分 (试验满分 60 分)。

3、湖南省奥赛简况

① 至 1998 年，湖南选手获 CPhO 决赛一等奖 29 人次，占全国的 18.24%；在 IPhO 中获金牌 5 枚、银牌 2 枚、铜牌 2 枚，居各省之首。

② 题型与风格：初赛第十一届 (1992 年) 开始统一，只有天空和计算。复赛第十三届 (1994 年) 开始统一，只有计算题六个，考试时量均为 3 小时。

二、知识体系

1、高中物理的三档要求：一般要求 (会考) → 高考要求 → 竞赛要求。

竞赛知识的特点：① 初赛——对高中物理基础融会贯通，更注重物理方法的运用；② 复赛——知识点更多，对数学工具的运用更深入。

2、教法贯彻

① 高一：针对“高考要求”，进度尽量超前高一新课，知识点只做有限添加，目标瞄准初赛过关。

② 高二：针对“竞赛要求”，瞄准复赛难度。高二知识一步到位，高一知识做短暂的回顾与加深。

③ 复赛对象在约 15 天的时间内模拟考试，进行考法训练。

3、教材范本：龚霞玲主编《奥林匹克物理思维训练教材》，知识出版社，2002年8月第一版。

推荐典型参考书目——

① 孙尚礼 毛瑾主编《高中物理奥林匹克基础知识及题解》（上、下册），科学技术出版社，1994年10月第一版；

② 张大同主编《通向金牌之路》，陕西师范大学出版社（版本逐年更新）；

③ 湖南省奥林匹克竞赛委员会物理分会编《物理奥林匹克竞赛教程》，湖南师范大学出版社，1993年6月第一版；

④ 湖南省奥林匹克委员会物理分会、湖南省物理奥林匹克培训基地编《新编物理奥林匹克教程》，湖南师范大学出版社，1999年5月第一版；

⑤ 舒幼生主编《奥林匹克物理》（分1、2、3…多册出版），湖南教育出版社，第一册1993年8月第一版。

第一部分 力 & 物体的平衡

第一讲 力的处理

一、矢量的运算

1、加法

表达： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 。

名词： \vec{c} 为“和矢量”。

法则：平行四边形法则。如图1所示。

和矢量大小： $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$ ，其

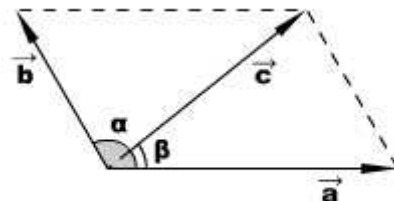


图 1

中 α 为 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角。

和矢量方向： \vec{c} 在 \vec{a} 、 \vec{b} 之间，和 \vec{a} 夹角 $\beta = \arcsin \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}$

2、减法

表达： $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ 。

名词： \vec{c} 为“被减数矢量”， \vec{b} 为“减数矢量”， \vec{a} 为“差矢量”。

法则：三角形法则。如图2所示。将被减数矢量和减数矢量的起始端平移到一点，然后连接两时量末端，指向被减数时量的时量，即是差矢量。

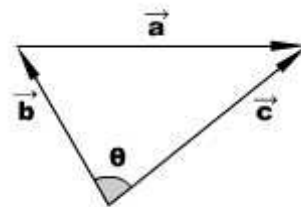


图 2

差矢量大小： $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta}$ ，其中 θ 为 \vec{c} 和 \vec{b} 的夹角。

差矢量的方向可以用正弦定理求得。

一条直线上的矢量运算是平行四边形和三角形法则的特例。

例题：已知质点做匀速率圆周运动，半径为 R ，周期为 T ，求它在 $\frac{1}{4}T$ 内和在 $\frac{1}{2}T$ 内的平均加速度大小。

解说：如图 3 所示，A 到 B 点对应 $\frac{1}{4}T$ 的过程，A 到 C 点对应 $\frac{1}{2}T$ 的过程。这三点的速度矢量分别设为 \vec{v}_A 、 \vec{v}_B 和 \vec{v}_C 。

根据加速度的定义 $\vec{a} = \frac{\vec{v}_t - \vec{v}_0}{t}$ 得： $\vec{a}_{AB} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{t_{AB}}$ ， $\vec{a}_{AC} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_A}{t_{AC}}$

由于有两处涉及矢量减法，设两个差矢量 $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ ， $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_C - \vec{v}_A$ ，根据三角形法则，它们在图 3 中的大小、方向已绘出（ $\Delta\vec{v}_2$ 的“三角形”已被拉伸成一条直线）。

本题只关心各矢量的大小，显然：

$$v_A = v_B = v_C = \frac{2\pi R}{T}, \text{ 且: } \Delta v_1 = \sqrt{2} v_A = \frac{2\sqrt{2}\pi R}{T}, \Delta v_2 = 2v_A = \frac{4\pi R}{T}$$

$$\text{所以: } a_{AB} = \frac{\Delta v_1}{t_{AB}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}\pi R}{T}}{\frac{T}{4}} = \frac{8\sqrt{2}\pi R}{T^2}, a_{AC} = \frac{\Delta v_2}{t_{AC}} = \frac{\frac{4\pi R}{T}}{\frac{T}{2}} = \frac{8\pi R}{T^2}。$$

（学生活动）观察与思考：这两个加速度是否相等，匀速率圆周运动是不是匀变速运动？

答：否；不是。

3、乘法

矢量的乘法有两种：叉乘和点乘，和代数的乘法有着质的不同。

(1) 叉乘

$$\text{表达: } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

名词： \vec{c} 称“矢量的叉积”，它是一个新的矢量。

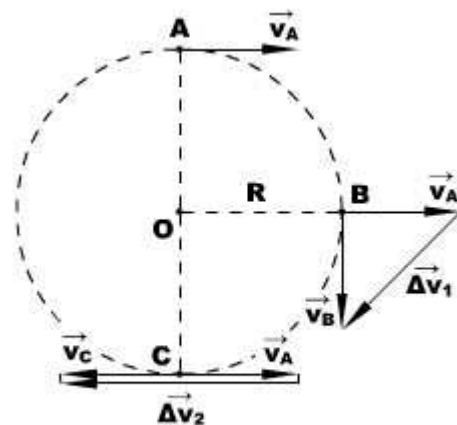


图 3

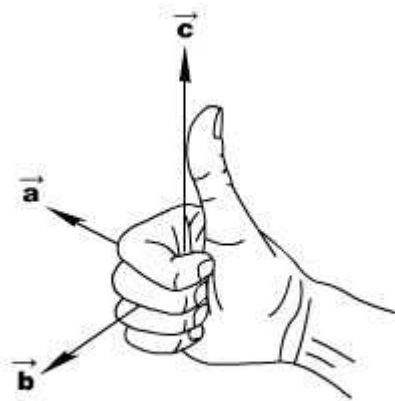


图 4

叉积的大小： $c = ab \sin \alpha$ ，其中 α 为 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角。意义： \vec{c} 的大小对应由 \vec{a} 和 \vec{b} 作成的平行四边形的面积。

叉积的方向：垂直 \vec{a} 和 \vec{b} 确定的平面，并由右手螺旋定则确定方向，如图 4 所示。

显然， $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ ，但有： $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(2) 点乘

表达： $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$

名词： c 称“矢量的点积”，它不再是一个矢量，而是一个标量。

点积的大小： $c = ab \cos \alpha$ ，其中 α 为 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角。

二、共点力的合成

1、平行四边形法则与矢量表达式

2、一般平行四边形的合力与分力的求法

余弦定理（或分割成 $Rt\Delta$ ）解合力的大小

正弦定理解方向

三、力的分解

1、按效果分解

2、按需要——正交分解

第二讲 物体的平衡

一、共点力平衡

1、特征：质心无加速度。

2、条件： $\Sigma \vec{F} = 0$ ，或 $\Sigma F_x = 0$ ， $\Sigma F_y = 0$

例题：如图 5 所示，长为 L 、粗细不均匀的横杆被两根轻绳水平悬挂，绳子与水平方向的夹角在图上已标示，求横杆的重心位置。

解说：直接用三力共点的知识解题，几何关系比较简单。

答案：距棒的左端 $L/4$ 处。

（学生活动）思考：放在斜面上的均质长方体，按实际情况分析受力，斜面的支持力会通过长方体的重心吗？

解：将各处的支持力归纳成一个 N ，则长方体受三个力（ G 、 f 、 N ）必共点，由此推知， N 不可能通过长方体的重心。正确受力情形如图 6 所示（通常的受力图是将受力物体看成一个点，这时， N 就过重心了）。

8/142



图 5

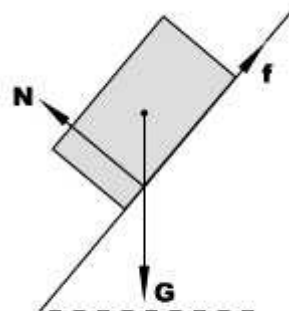


图 6

答：不会。

二、转动平衡

1、特征：物体无转动加速度。

2、条件： $\sum \vec{M} = 0$ ，或 $\sum M_{\perp} = \sum M_{\parallel}$

如果物体静止，肯定会同时满足两种平衡，因此用两种思路均可解题。

3、非共点力的合成

大小和方向：遵从一条直线矢量合成法则。

作用点：先假定一个等效作用点，然后让所有的平行力对这个作用点的和力矩为零。

第三讲 习题课

1、如图 7 所示，在固定的、倾角为 α 斜面上，有一块可以转动的夹板（ β 不定），夹板和斜面夹着一个质量为 m 的光滑均质球体，试求： β 取何值时，夹板对球的弹力最小。

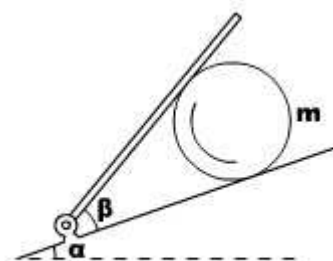


图 7

解说：法一，平行四边形动态处理。

对球体进行受力分析，然后对平行四边形中的矢量 G 和 N_1 进行平移，使它们构成一个三角形，如图 8 的左图和中图所示。

由于 G 的大小和方向均不变，而 N_1 的方向不可变，当 β 增大导致 N_2 的方向改变时， N_2 的变化和 N_1 的方向变化如图 8 的右图所示。

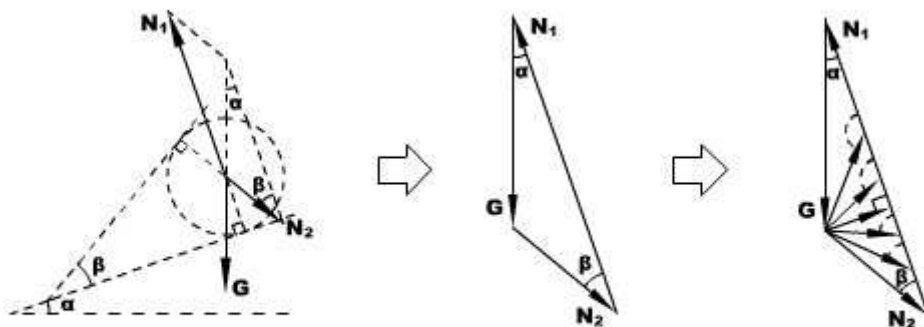


图 8

显然，随着 β 增大， N_1 单调减小，而 N_2 的大小先减小后增大，当 N_2 垂直 N_1 时， N_2 取极小值，且 $N_{2\min} = G \sin \alpha$ 。

法二，函数法。

看图 8 的中间图，对这个三角形用正弦定理，有：

$$\frac{N_2}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin \beta}, \text{ 即: } N_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sin \beta}, \text{ } \beta \text{ 在 } 0 \text{ 到 } 180^\circ \text{ 之间取值, } N_2 \text{ 的极值讨}$$

论是很容易的。

答案：当 $\beta = 90^\circ$ 时，甲板的弹力最小。

2、把一个重为 G 的物体用一个水平推力 F 压在竖直的足够高的墙壁上， F 随时间 t 的变化规律如图 9 所示，则在 $t = 0$ 开始物体所受的摩擦力 f 的变化图线是图 10 中的哪一个？

解说：静力学旨在解决静态问题和准静态过程的问题，但本题是一个例外。物体在竖直方向的运动先加速后减速，平衡方程不再适用。如何避开牛顿第二定律，是本题授课时的难点。

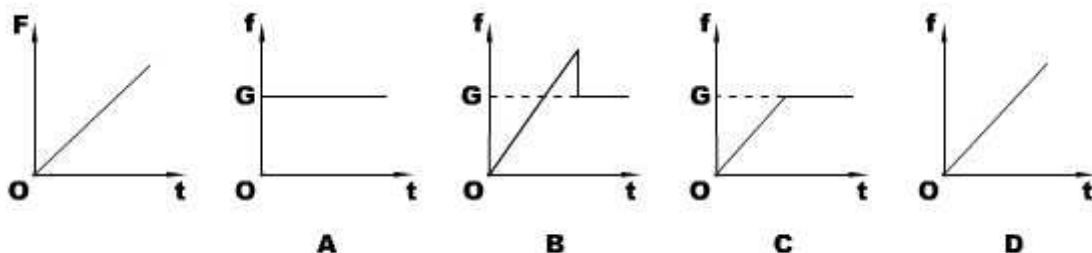


图 9

图 10

静力学的知识，本题在于区分两种摩擦的不同判据。

水平方向合力为零，得：支持力 N 持续增大。

物体在运动时，滑动摩擦力 $f = \mu N$ ，必持续增大。但物体在静止后静摩擦力 $f' \equiv G$ ，与 N 没有关系。

对运动过程加以分析，物体必有加速和减速两个过程。据物理常识，加速时， $f < G$ ，而在减速时 $f > G$ 。

答案：B。

3、如图 11 所示，一个重量为 G 的小球套在竖直放置的、半径为 R 的光滑大环上，另一轻质弹簧的劲度系数为 k ，自由长度为 L ($L < 2R$)，一端固定在大圆环的顶点 A ，另一端与小球相连。环静止平衡时位于大环上的 B 点。试求弹簧与竖直方向的夹角 θ 。

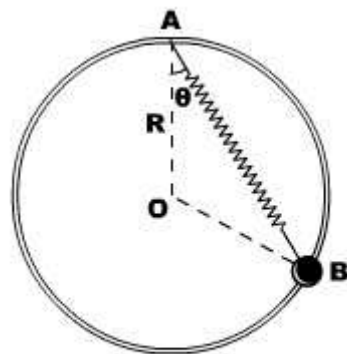


图 11

解说：平行四边形的三个矢量总是可以平移到一个三角形中去讨论，解三角形的典型思路有三种：①分割成直角三角形（或本来就是直角三角形）；②利用正、余弦定理；③利用力学矢量三角形和某空间位置三角形相似。本题旨在贯彻第三种思路。

分析小球受力→矢量平移，如图 12 所示，其中 F 表示弹簧弹力， N 表示大环的支持力。

（学生活动）思考：支持力 N 可不可以沿图 12 中的反方向？（正交分解看水平方向平衡——不可以。）

容易判断，图中的灰色矢量三角形和空间位置三角形 $\triangle AOB$ 是相似的，所以：

$$\frac{F}{G} = \frac{\overline{AB}}{R} \quad (1)$$

$$\text{由胡克定律：} F = k (\overline{AB} - R) \quad (2)$$

$$\text{几何关系：} \overline{AB} = 2R \cos \theta \quad (3)$$

解以上三式即可。

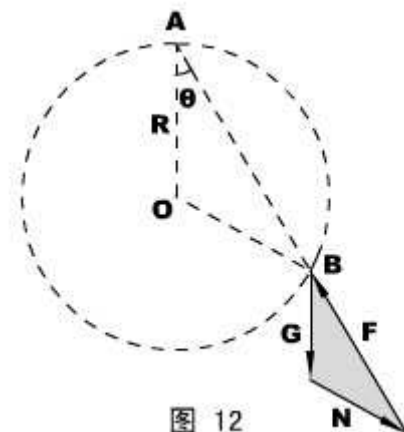


图 12

答案： $\arccos \frac{kL}{2(kR - G)}$ 。

（学生活动）思考：若将弹簧换成劲度系数 k' 较大的弹簧，其它条件不变，则弹簧弹力怎么变？环的支持力怎么变？

答：变小；不变。

（学生活动）反馈练习：光滑半球固定在水平面上，球心 O 的正上方有一定滑轮，一根轻绳跨过滑轮将一小球从图 13 所示的 A 位置开始缓慢拉至 B 位置。试判断：在此过程中，绳子的拉力 T 和球面支持力 N 怎样变化？

解：和上题完全相同。

答： T 变小， N 不变。

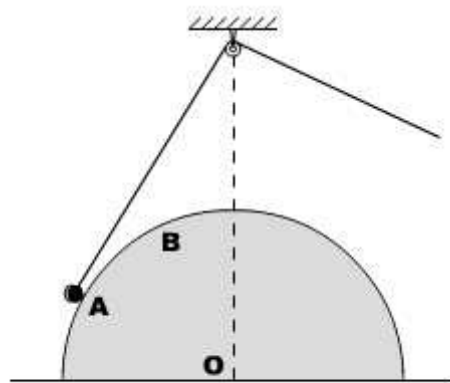


图 13

4、如图 14 所示，一个半径为 R 的非均质圆球，其重心不在球心 O 点，先将它置于水平地面上，平衡时球面上的 A 点和地面接触；再将它置于倾角为 30° 的粗糙斜面上，平衡时球面上的 B 点与斜面接触，已知 A 到 B 的圆心角也为 30° 。试求球体的重心 C 到球心 O 的距离。

解说：练习三力共点的应用。

根据在平面上的平衡，可知重心 C 在 OA 连线上。根据在斜面上的平衡，支持力、重力和静摩擦力共点，可以画出重心的具体位置。几何计算比较简单。

答案： $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 。

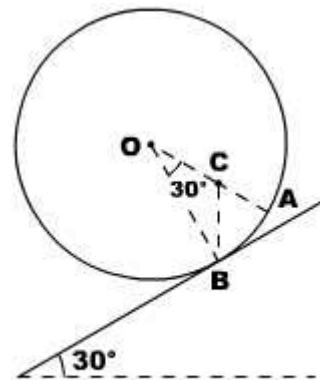


图 14

（学生活动）反馈练习：静摩擦足够，将长为 a 、厚为 b 的砖块码在倾角为 θ 的斜面上，最多能码多少块？

解：三力共点知识应用。

答： $\frac{a}{b} \text{ctg} \theta$ 。

4、两根等长的细线，一端拴在同一悬点 O 上，另一端各系一个小球，两球的质量分别为 m_1 和 m_2 ，已知两球间存在大小相等、方向相反的斥力而使两线张开一定角度，分别为 45° 和 30° ，如图 15 所示。则 $m_1 : m_2$ 为多少？

解说：本题考查正弦定理、或力矩平衡解静力学问题。

对两球进行受力分析，并进行矢量平移，如图 16 所示。

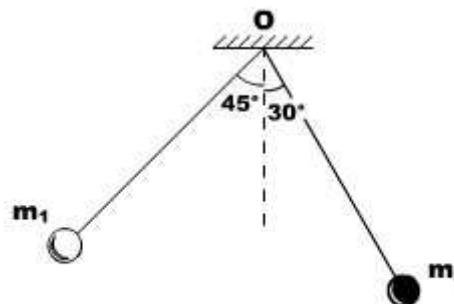


图 15

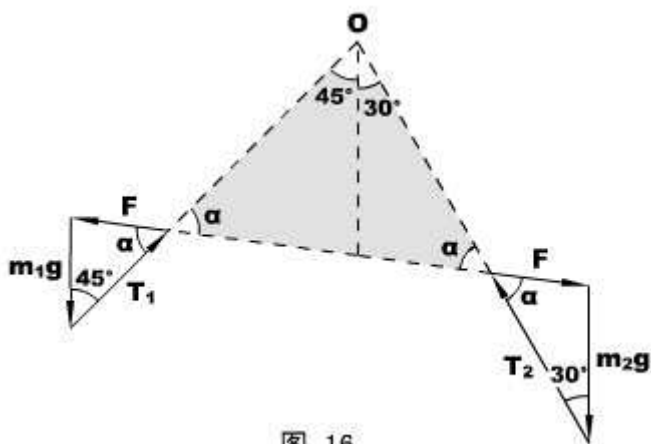


图 16

首先注意，图 16 中的灰色三角形是等腰三角形，两底角相等，设为 α 。

而且，两球相互作用的斥力方向相反，大小相等，可用同一字母表示，设为 F 。

对左边的矢量三角形用正弦定理，有：

$$\frac{m_1 g}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin 45^\circ}$$

①

同理，对右边的矢量三角形，有：
$$\frac{m_2 g}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin 30^\circ}$$

②

解①②两式即可。

答案： $1 : \sqrt{2}$ 。

（学生活动）思考：解本题是否还有其它的方法？

答：有——将模型看成用轻杆连成的两小球，而将 O 点看成转轴，两球的重力对 O 的力矩必然是平衡的。这种方法更直接、简便。

应用：若原题中绳长不等，而是 $l_1 : l_2 = 3 : 2$ ，其它条件不变， m_1 与 m_2 的比值又将是多少？

解：此时用共点力平衡更加复杂（多一个正弦定理方程），而用力矩平衡则几乎和“思考”完全相同。

答： $2 : 3\sqrt{2}$ 。

5、如图 17 所示，一个半径为 R 的均质金属球上固定着一根长为 L 的轻质细杆，细杆的左端用铰链与墙壁相连，球下边垫上一块木板后，细杆恰好水平，而木板下面是光滑的水平面。由于金属球和木板之间有摩擦（已知摩擦因素为 μ ），所以要将木板从球下面向右抽出时，至少需要大小为 F 的水平拉力。试问：现要将木板继续向左插进一些，至少需要多大的水平推力？

解说：这是一个典型的力矩平衡的例题。

以球和杆为对象，研究其对转轴 O 的转动平衡，设木板拉出时给球体的摩擦力为 f ，支持力为 N ，重力为 G ，力矩平衡方程为：

$$fR + N(R+L) = G(R+L) \quad \text{①}$$

球和板已相对滑动，故： $f = \mu N$

②

$$\text{解①②可得：} f = \frac{\mu G(R+L)}{R+L+\mu R}$$

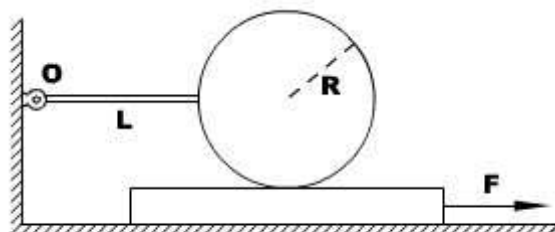


图 17

再看木板的平衡， $F = f$ 。

同理，木板插进去时，球体和木板之间的摩擦 $f' = \frac{\mu G(R+L)}{R+L-\mu R} = F'$ 。

答案： $\frac{R+L+\mu R}{R+L-\mu R} F$ 。

第四讲 摩擦角及其它

一、摩擦角

1、全反力：接触面给物体的摩擦力与支持力的合力称全反力，一般用 R 表示，亦称接触反力。

2、摩擦角：全反力与支持力的最大夹角称摩擦角，一般用 ϕ_m 表示。

此时，要么物体已经滑动，必有： $\phi_m = \arctg \mu$ (μ 为动摩擦因素)，称动摩擦角；要么物体达到最大运动趋势，必有： $\phi_{ms} = \arctg \mu_s$ (μ_s 为静摩擦因素)，称静摩擦角。通常处理为 $\phi_m = \phi_{ms}$ 。

3、引入全反力和摩擦角的意义：使分析处理物体受力时更方便、更简捷。

二、隔离法与整体法

1、隔离法：当物体对象有两个或两个以上时，有必要各个击破，逐个讲每个个体隔离开来分析处理，称隔离法。

在处理各隔离方程之间的联系时，应注意相互作用力的大小和方向关系。

2、整体法：当各个体均处于平衡状态时，我们可以不顾个体的差异而讲多个对象看成一个整体进行分析处理，称整体法。

应用整体法时应注意“系统”、“内力”和“外力”的涵义。

三、应用

1、物体放在水平面上，用与水平方向成 30° 的力拉物体时，物体匀速前进。若此力大小不变，改为沿水平方向拉物体，物体仍能匀速前进，求物体与水平面之间的动摩擦因素 μ 。

解说：这是一个能显示摩擦角解题优越性的题目。可以通过不同解法的比较让学生留下深刻印象。

法一，正交分解。（学生分析受力→列方程→得结果。）

法二，用摩擦角解题。

引进全反力 R ，对物体两个平衡状态进行受力分析，再进行矢量平移，得到图 18 中的左图和中间图（注意：重力 G 是不变的，而全反力 R 的方向不变、 F 的大小不变）， ϕ_m 指摩擦角。

再将两图重叠成图 18 的右图。由于灰色的三角形是一个顶角为 30° 的等腰三角形，其顶角的角平分线必垂直底边……故有： $\phi_m = 15^\circ$ 。

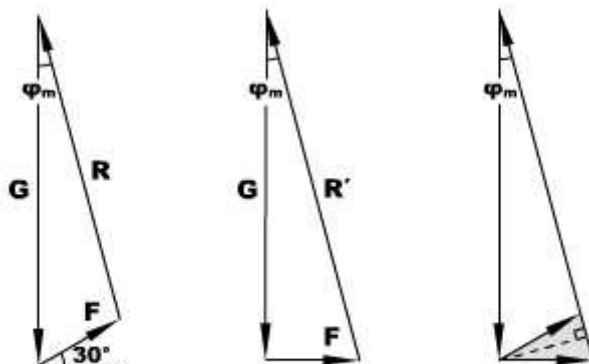


图 18

最后， $\mu = \text{tg} \phi_m$ 。

答案：0.268。

（学生活动）思考：如果 F 的大小是可以选择的，那么能维持物体匀速前进的最小 F 值是多少？

解：见图 18，右图中虚线的长度即 F_{\min} ，所以， $F_{\min} = G \sin \phi_m$ 。

答： $G \sin 15^\circ$ （其中 G 为物体的重量）。

2、如图 19 所示，质量 $m = 5\text{kg}$ 的物体置于一粗糙斜面上，并用一平行斜面的、大小 $F = 30\text{N}$ 的推力推物体，使物体能够沿斜面向上匀速运动，而斜面体始终静止。已知斜面的质量 $M = 10\text{kg}$ ，倾角为 30° ，重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$ ，求地面对斜面体的摩擦力大小。

解说：本题旨在显示整体法的解题的优越性。

法一，隔离法。简要介绍……

法二，整体法。注意，滑块和斜面随有相对运动，但从平衡的角度看，它们是完全等价的，可以看成是一个整体。

做整体的受力分析时，内力不加考虑。受力分析比较简单，列水平方向平衡方程很容易解地面摩擦力。

答案：26.0N。

（学生活动）地面给斜面体的支持力是多少？

解：略。

答：135N。

应用：如图 20 所示，一上表面粗糙的斜面体上放在光滑的水平地面上，斜面的倾角为 θ 。另一质量为 m 的滑块恰好能沿斜面匀速下滑。若用一推力 F 作用在滑块上，使之能沿斜面匀速上滑，且要求斜面体静止不动，就必须施加一个大小为 $P = 4mgsin\theta \cos\theta$ 的水平推力作用于斜面体。使满足题意的这个 F 的大小和方向。

解说：这是一道难度较大的静力学题，可以动用一切可能的工具解题。

法一：隔离法。

由第一个物理情景易得，斜面于滑块的摩擦因素 $\mu = \text{tg} \theta$

对第二个物理情景，分别隔离滑块和斜面体分析受力，并将 F 沿斜面、垂直斜面分解成 F_x 和 F_y ，滑块与斜面之间的两对相互作用力只用两个字母表示（ N 表示正压力和弹力， f 表示摩擦力），如图 21 所示。

对滑块，我们可以考查沿斜面方向和垂直斜面方向的平衡——

$$F_x = f + mg \sin \theta$$

$$F_y + mg \cos \theta = N$$

$$\text{且 } f = \mu N = N \text{tg} \theta$$

综合以上三式得到：

$$F_x = F_y \text{tg} \theta + 2mgsin \theta$$

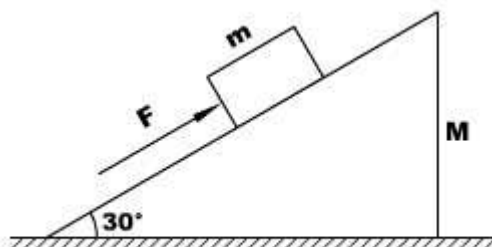


图 19

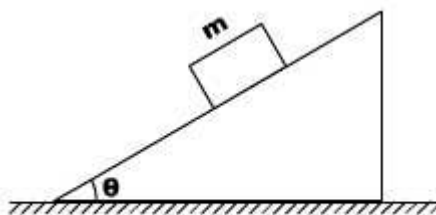


图 20

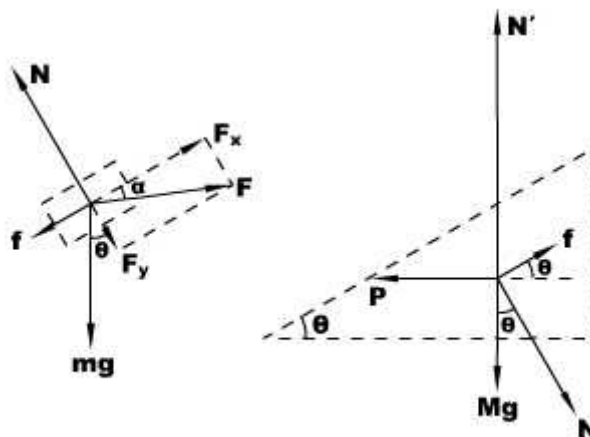


图 21

①

对斜面体，只看水平方向平衡就行了——

$$P = f \cos \theta + N \sin \theta$$

$$\text{即： } 4mg \sin \theta \cos \theta = \mu N \cos \theta + N \sin \theta$$

$$\text{代入 } \mu \text{ 值，化简得： } F_y = mg \cos \theta \quad \text{②}$$

$$\text{②代入①可得： } F_x = 3mg \sin \theta$$

最后由 $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ 解 F 的大小，由 $\text{tg } \alpha = \frac{F_y}{F_x}$ 解 F 的方向（设 α 为 F 和斜面的夹角）。

面的夹角）。

答案：大小为 $F = mg \sqrt{1 + 8 \sin^2 \theta}$ ，方向和斜面夹角 $\alpha = \text{arctg}(\frac{1}{3} \text{ctg} \theta)$ 指向斜面内部。

法二：引入摩擦角和整体法观念。

仍然沿用“法一”中关于 F 的方向设置（见图 21 中的 α 角）。

先看整体的水平方向平衡，有： $F \cos(\theta - \alpha) = P$

(1)

再隔离滑块，分析受力时引进全反力 R 和摩擦角 ϕ ，由于简化后只有三个力（ R 、 mg 和 F ），可以将矢量平移后构成一个三角形，如图 22 所示。

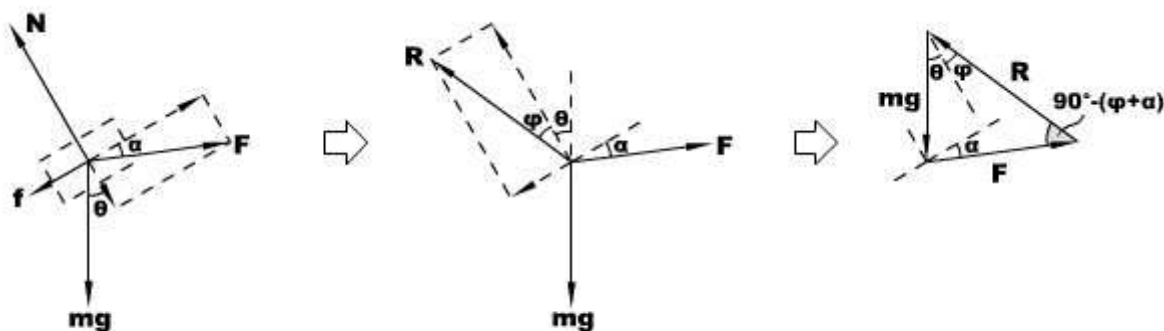


图 22

在图 22 右边的矢量三角形中，有： $\frac{F}{\sin(\theta + \phi)} = \frac{mg}{\sin[90^\circ - (\alpha + \phi)]} = \frac{mg}{\cos(\alpha + \phi)}$

(2)

注意： $\phi = \text{arctg } \mu = \text{arctg}(\text{tg } \theta) = \theta$

(3)

解(1)(2)(3)式可得 F 和 α 的值。

第二部分 牛顿运动定律

第一讲 牛顿三定律

一、牛顿第一定律

- 1、定律。惯性的量度
- 2、观念意义，突破“初态困惑”

二、牛顿第二定律

- 1、定律
- 2、理解要点
 - a、矢量性
 - b、独立作用性： $\Sigma F \rightarrow a$ ， $\Sigma F_x \rightarrow a_x \dots$

c、瞬时性。合力可突变，故加速度可突变（与之对比：速度和位移不可突变）；牛顿第二定律展示了加速度的决定式（加速度的定义式仅仅展示了加速度的“测量手段”）。

3、适用条件

- a、宏观、低速
- b、惯性系

对于非惯性系的定律修正——引入惯性力、参与受力分析

三、牛顿第三定律

- 1、定律
- 2、理解要点
 - a、同性质（但不同物体）
 - b、等时效（同增同减）
 - c、无条件（与运动状态、空间选择无关）

第二讲 牛顿定律的应用

一、牛顿第一、第二定律的应用

单独应用牛顿第一定律的物理问题比较少，一般是需要用其解决物理问题中的某一个环节。

应用要点：合力为零时，物体靠惯性维持原有运动状态；只有物体有加速度时才需要合力。有质量的物体才有惯性。 a 可以突变而 v 、 s 不可突变。

1、如图1所示，在马达的驱动下，皮带运输机上方的皮带以恒定的速度向右运动。现将一工件（大小不计）在皮带左端A点轻轻放下，则在此后的过程中（ ）

A、一段时间内，工件将在滑动摩擦力作用下，对地做加速运动

B、当工件的速度等于 v 时，它与皮带之间的摩擦力变为静摩擦力

C、当工件相对皮带静止时，它位于皮带上A点右侧的某一点

D、工件在皮带上有可能不存在与皮带相对静止的状态

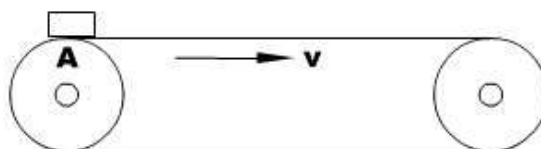


图 1

解说：B选项需要用到牛顿第一定律，A、C、D选项用到牛顿第二定律。

较难突破的是A选项，在为什么不会“立即跟上皮带”的问题上，建议使用反证法（ $t \rightarrow 0, a \rightarrow \infty$ ，则 $\Sigma F_x \rightarrow \infty$ ，必然会出现“供不应求”的局面）和比较法（为什么人跳上速度不大的物体可以不发生相对滑动？因为人是可以形变、重心可以调节的特殊“物体”）

此外，本题的D选项还要用到匀变速运动规律。用匀变速运动规律和牛顿第二定律不难得出

只有当 $L > \frac{v^2}{2\mu g}$ 时（其中 μ 为工件与皮带之间的动摩擦因素），才有相对静止的过程，否则没有。

答案：A、D

思考：令 $L = 10\text{m}$ ， $v = 2\text{ m/s}$ ， $\mu = 0.2$ ， g 取 10 m/s^2 ，试求工件到达皮带右端的时间 t （过程略，答案为 5.5s ）

进阶练习：在上面“思考”题中，将工件给予一水平向右的初速 v_0 ，其它条件不变，再求 t （学生分以下三组进行）——

- ① $v_0 = 1\text{m/s}$ （答： $0.5 + 37/8 = 5.13\text{s}$ ）
- ② $v_0 = 4\text{m/s}$ （答： $1.0 + 3.5 = 4.5\text{s}$ ）
- ③ $v_0 = 1\text{m/s}$ （答： 1.55s ）

2、质量均为 m 的两只钩码 A 和 B，用轻弹簧和轻绳连接，然后挂在天花板上，如图 2 所示。试问：

- ① 如果在 P 处剪断细绳，在剪断瞬时，B 的加速度是多少？
- ② 如果在 Q 处剪断弹簧，在剪断瞬时，B 的加速度又是多少？

解说：第①问是常规处理。由于“弹簧不会立即发生形变”，故剪断瞬间弹簧弹力维持原值，所以此时 B 钩码的加速度为零（A 的加速度则为 $2g$ ）。

第②问需要我们反省这样一个问题：“弹簧不会立即发生形变”的原因是什么？是 A、B 两物的惯性，且速度 v 和位移 s 不能突变。但在 Q 点剪断弹簧时，弹簧却是没有惯性的（没有质量），遵从理想模型的条件，弹簧应在一瞬间恢复原长！即弹簧弹力突变为零。

答案：0； g 。

二、牛顿第二定律的应用

应用要点：受力较少时，直接应用牛顿第二定律的“矢量性”解题。受力比较多时，结合正交分解与“独立作用性”解题。

在难度方面，“瞬时性”问题相对较大。

1、滑块在固定、光滑、倾角为 θ 的斜面上下滑，试求其加速度。

解说：受力分析 \rightarrow 根据“矢量性”定合力方向 \rightarrow 牛顿第二定律应用

答案： $g\sin\theta$ 。

思考：如果斜面解除固定，上表仍光滑，倾角仍为 θ ，要求滑块与斜面相对静止，斜面应具备一个多大的水平加速度？（解题思路完全相同，

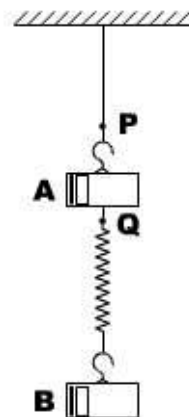


图 2

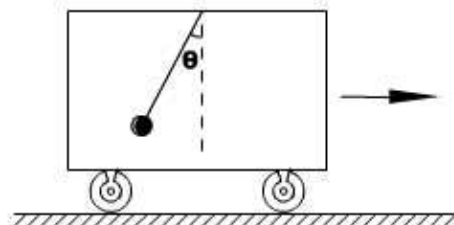


图 3

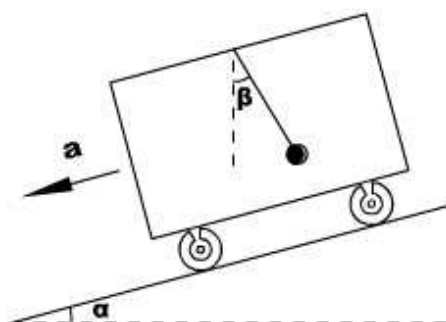


图 4

研究对象仍为滑块。但在第二环节上应注意区别。答： $gtg\theta$ 。）

进阶练习 1：在一向右运动的车厢中，用细绳悬挂的小球呈现如图 3 所示的稳定状态，试求车厢的加速度。（和“思考”题同理，答： $gtg\theta$ 。）

进阶练习 2、如图 4 所示，小车在倾角为 α 的斜面上匀加速运动，车厢顶用细绳悬挂一小球，发现悬绳与竖直方向形成一个稳定的夹角 β 。试求小车的加速度。

解：继续贯彻“矢量性”的应用，但数学处理复杂了一些（正弦定理解三角形）。

分析小球受力后，根据“矢量性”我们可以做如图 5 所示的平行四边形，并找到相应的夹角。设张力 T 与斜面方向的夹角为 θ ，则

$$\theta = (90^\circ + \alpha) - \beta = 90^\circ - (\beta - \alpha) \quad (1)$$

对灰色三角形用正弦定理，有

$$\frac{\Sigma F}{\sin\beta} = \frac{G}{\sin\theta} \quad (2)$$

解 (1) (2) 两式得： $\Sigma F = \frac{mg \cdot \sin\beta}{\cos(\beta - \alpha)}$

最后运用牛顿第二定律即可求小球加速度（即小车加速度）

答： $\frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \alpha)}g$ 。

2、如图 6 所示，光滑斜面倾角为 θ ，在水平地面上加速运动。斜面上用一条与斜面平行的细绳系一质量为 m 的小球，当斜面加速度为 a 时（ $a < ctg\theta$ ），小球能够保持相对斜面静止。试求此时绳子的张力 T 。

解说：当力的个数较多，不能直接用平行四边形寻求合力时，宜用正交分解处理受力，在对应牛顿第二定律的“独立作用性”列方程。

正交坐标的选择，视解题方便程度而定。

解法一：先介绍一般的思路。沿加速度 a 方向建 x 轴，与 a 垂直的方向上建 y 轴，如图 7 所示（ N 为斜面支持力）。于是可得两方程

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma, \quad \text{即 } T_x - N_x &= ma \\ \Sigma F_y = 0, \quad \text{即 } T_y + N_y &= mg \end{aligned}$$

代入方位角 θ ，以上两式成为

$$\begin{aligned} T \cos\theta - N \sin\theta &= ma \\ T \sin\theta + N \cos\theta &= mg \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

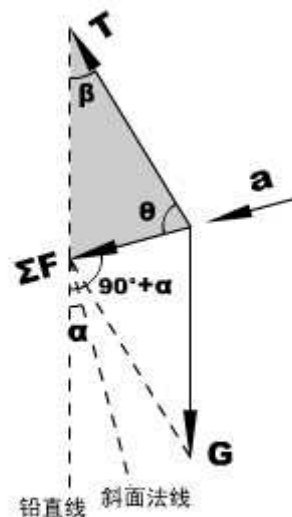


图 5

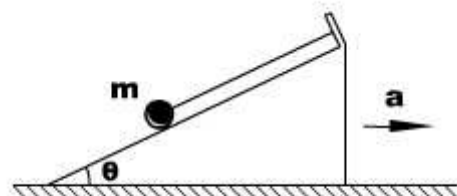


图 6

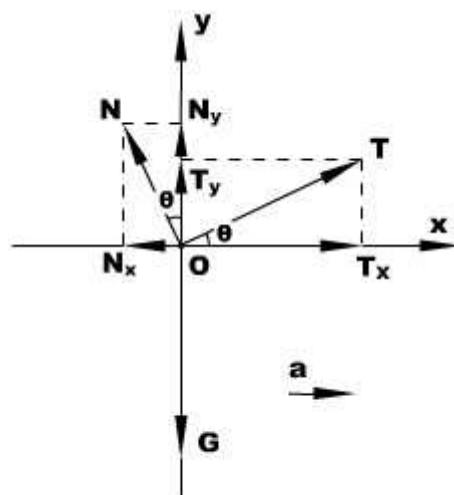


图 7

这是一个关于 T 和 N 的方程组，解 (1) (2) 两式得： $T = mg \sin \theta + ma \cos \theta$
 解法二：下面尝试一下能否独立地解张力 T 。将正交分解的坐标选择为： x ——斜面方向， y ——和斜面垂直的方向。这时，在分解受力时，只分解重力 G 就行了，但值得注意，加速度 a 不在任何一个坐标轴上，是需要分解的。矢量分解后，如图 8 所示。

根据独立作用性原理， $\Sigma F_x = ma_x$

即： $T - G_x = ma_x$

即： $T - mg \sin \theta = m a \cos \theta$

显然，独立解 T 值是成功的。结果与解法一相同。

答案： $mg \sin \theta + ma \cos \theta$

思考：当 $a > ctg \theta$ 时，张力 T 的结果会变化吗？

(从支持力的结果 $N = mg \cos \theta - ma \sin \theta$ 看小球脱离斜面的条件，求脱离斜面后， θ 条件已没有意义。答： $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$ 。)

学生活动：用正交分解法解本节第 2 题“进阶练习 2”

进阶练习：如图 9 所示，自动扶梯与地面的夹角为 30° ，但扶梯的台阶是水平的。当扶梯以 $a = 4m/s^2$ 的加速度向上运动时，站在

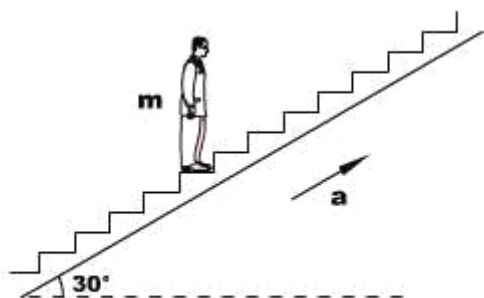


图 9

扶梯上质量为 $60kg$ 的人相对扶梯静止。重力加速度 $g = 10 m/s^2$ ，试求扶梯对人的静摩擦力 f 。

解：这是一个展示独立作用性原理的经典例题，建议学生选择两种坐标(一种是沿 a 方向和垂直 a 方向，另一种是水平和竖直方向)，对比解题过程，进而

充分领会用牛顿第二定律解题的灵活性。

答：208N。

3、如图 10 所示，甲图系着小球的是两根轻绳，乙图系着小球的是一根轻弹簧和轻绳，方位角 θ 已知。现将它们的水平绳剪断，试求：在剪断瞬间，两种情形下小球的瞬时加速度。

解说：第一步，阐明绳子弹力和弹簧弹力的区别。

(学生活动) 思考：用竖直的绳和弹簧悬吊小球，并用竖直向下的力拉住小球静止，然后同时释放，会有什么现象？原因是什么？

结论——绳子的弹力可以突变而弹簧的弹力不能突变（胡克定律）。

第二步，在本例中，突破“绳子的拉力如何瞬时调节”这一难点（从即将开始的运动来反推）。

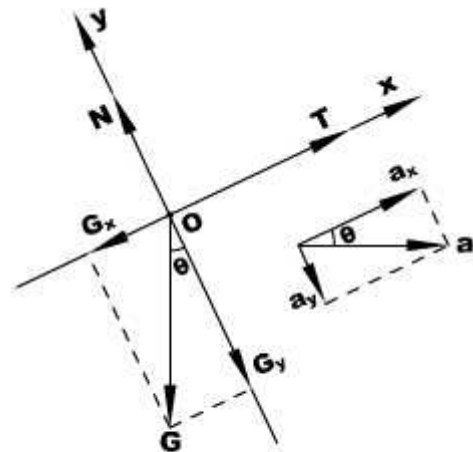


图 8

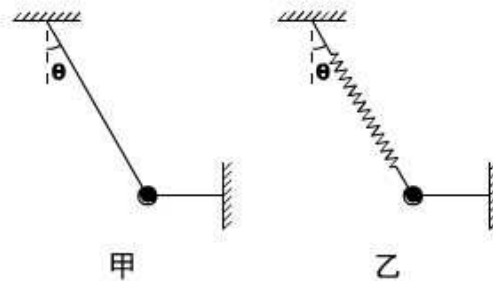


图 10

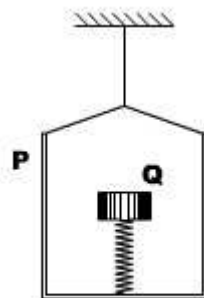


图 11

知识点，牛顿第二定律的瞬时性。

答案： $a_P = g \sin \theta$ ； $a_Q = g \tan \theta$ 。

应用：如图 11 所示，吊篮 P 挂在天花板上，与吊篮质量相等的物体 Q 被固定在吊篮中的轻弹簧托住，当悬挂吊篮的细绳被烧断瞬间，P、Q 的加速度分别是多少？

解：略。

答： $2g$ ； 0 。

三、牛顿第二、第三定律的应用

要点：在动力学问题中，如果遇到几个研究对象时，就会面临如何处理对象之间的力和对象与外界之间的力问题，这时有必要引进“系统”、“内力”和“外力”等概念，并适时地运用牛顿第三定律。

在方法的选择方面，则有“隔离法”和“整体法”。前者是根本，后者有局限，也有难度，但常常使解题过程简化，使过程的物理意义更加明晰。

对 N 个对象，有 N 个隔离方程和一个（可能的）整体方程，这 (N + 1) 个方程中必有一个是通解方程，如何取舍，视解题方便程度而定。

补充：当多个对象不具有共同的加速度时，一般来讲，整体法不可用，但也有一种特殊的“整体方程”，可以不受这个局限（可以介绍推导过程）——

$$\Sigma \bar{F}_{\text{外}} = m_1 \bar{a}_1 + m_2 \bar{a}_2 + m_3 \bar{a}_3 + \dots + m_n \bar{a}_n$$

其中 $\Sigma \bar{F}_{\text{外}}$ 只能是系统外力的矢量和，等式右边也是矢量相加。

1、如图 12 所示，光滑水平面上放着一个长为 L 的均质直棒，现给棒一个沿棒方向的、大小为 F 的水平恒力作用，则棒中各部位的张力 T 随图中 x 的关系怎样？

解说：截取隔离对象，列整体方程和隔离方程（隔离右段较好）。

答案： $N = \frac{F}{L} x$ 。

思考：如果水平面粗糙，结论又如何？

解：分两种情况，(1) 能拉动；(2) 不能拉动。

第 (1) 情况的计算和原题基本相同，只是多了一个摩擦力的处理，结论的化简也麻烦一些。

第 (2) 情况可设棒的总质量为 M，和水平面的摩擦因素为 μ ，而 $F = \mu \frac{1}{L} Mg$ ，其中 $l < L$ ，则 $x < (L-l)$ 的右段没有张力， $x > (L-l)$ 的左端才有张力。

答：若棒仍能被拉动，结论不变。

若棒不能被拉动，且 $F = \mu \frac{1}{L} Mg$ 时（ μ 为棒与平面的摩擦因素，l 为小于 L 的某一值，M 为棒的总质量），当 $x < (L-l)$ ， $N \equiv 0$ ；当 $x > (L-l)$ ， $N = \frac{F}{l} [x - (L-l)]$ 。

应用：如图 13 所示，在倾角为 θ 的固定斜面上，叠放着两个长方体滑块，它们的质量分别为 m_1 和 m_2 ，它们之间的摩擦因素、和斜面的摩擦因素分别为 μ_1 和 μ_2 ，



图 12

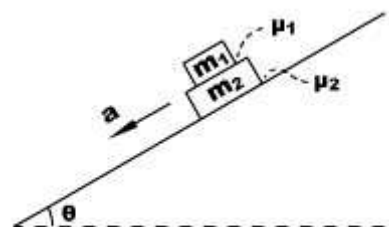


图 13

系统释放后能够一起加速下滑，则它们之间的摩擦力大小为：

- A、 $\mu_1 m_1 g \cos \theta$; B、 $\mu_2 m_1 g \cos \theta$;
 C、 $\mu_1 m_2 g \cos \theta$; D、 $\mu_1 m_2 g \cos \theta$;

解：略。

答：B。（方向沿斜面向上。）

思考：（1）如果两滑块不是下滑，而是以初速度 v_0 一起上冲，以上结论会变吗？（2）如果斜面光滑，两滑块之间有没有摩擦力？（3）如果将下面的滑块换成如图 14 所示的盒子，上面的滑块换成小球，它们以初速度 v_0 一起上冲，球应对盒子的哪一侧内壁有压力？

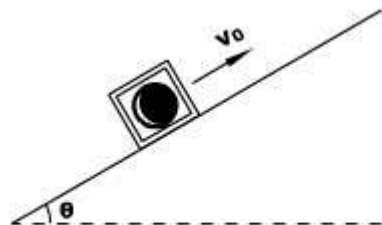


图 14

解：略。

答：（1）不会；（2）没有；（3）若斜面光滑，对两内壁均无压力，若斜面粗糙，对斜面上方的内壁有压力。

2、如图 15 所示，三个物体质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 ，带滑轮的物体放在光滑水平面上，滑轮和所有接触面的摩擦均不计，绳子的质量也不计，为使三个物体无相对滑动，水平推力 F 应为多少？

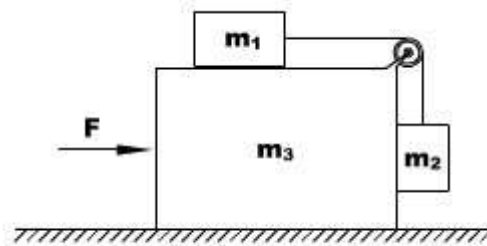


图 15

解说：此题对象虽然有三个，但难度不大。隔离 m_2 ，竖直方向有一个平衡方程；隔离 m_1 ，水平方向有一个动力学方程；整体有一个动力学方程。就足以解题了。

答案：
$$F = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 g}{m_1}$$

思考：若将质量为 m_3 物体右边挖成凹形，让 m_2 可以自由摆动（而不与 m_3 相碰），如图 16 所示，其它条件不变。是否可以选择一个恰当的 F' ，使三者无相对运动？如果没有，说明理由；如果有，求出这个 F' 的值。

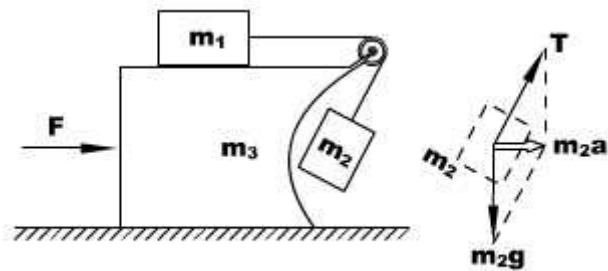


图 16

解：此时， m_2 的隔离方程将较为复杂。设绳子张力为 T ， m_2 的受力情况如图，隔离方程为：

$$\sqrt{T^2 - (m_2 g)^2} = m_2 a$$

隔离 m_1 ，仍有： $T = m_1 a$

解以上两式，可得：
$$a = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} g$$

最后用整体法解 F 即可。

答：当 $m_1 \leq m_2$ 时，没有适应题意的 F' ；当 $m_1 > m_2$ 时，适应题意的 $F' = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 g}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}$ 。

3、一根质量为 M 的木棒，上端用细绳系在天花板上，棒上有一质量为 m 的猫，如图 17 所示。现将系木棒的绳子剪断，同时猫相对棒往上爬，

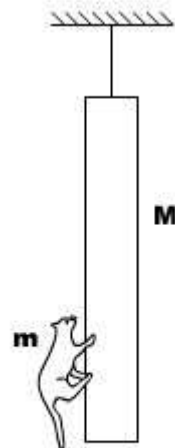


图 17

但要求猫对地的高度不变，则棒的加速度将是多少？

解说：法一，隔离法。需要设出猫爪抓棒的力 f ，然后列猫的平衡方程和棒的动力学方程，解方程组即可。

法二，“新整体法”。

据 $\Sigma \vec{F}_{\text{外}} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots + m_n \vec{a}_n$ ，猫和棒的系统外力只有两者的重力，竖直向下，而猫的加速度 $a_1 = 0$ ，所以：

$$(M + m)g = m \cdot 0 + M a_1$$

解棒的加速度 a_1 十分容易。

答案： $\frac{M+m}{M}g$ 。

四、特殊的连接体

当系统中各个体的加速度不相等时，经典的整体法不可用。如果各个体的加速度不在一条直线上，“新整体法”也将有一定的困难（矢量求和不易）。此时，我们回到隔离法，且要更加注意找各参量之间的联系。

解题思想：抓某个方向上加速度关系。方法：“微元法”先看位移关系，再推加速度关系。

1、如图 18 所示，一质量为 M 、倾角为 θ 的光滑斜面，放置在光滑的水平面上，另一个质量为 m 的滑块从斜面顶端释放，试求斜面的加速度。

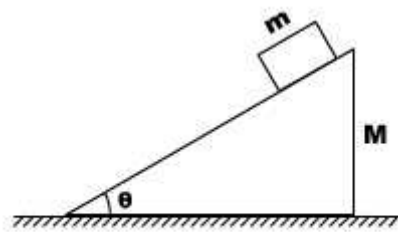


图 18

解说：本题涉及两个物体，它们的加速度关系复杂，但在垂直斜面方向上，大小是相等的。对两者列隔离方程时，务必在这个方向上进行突破。

（学生活动）定型判断斜面的运动情况、滑块的运动情况。

位移矢量示意图如图 19 所示。根据运动学规律，加速度矢量 a_1 和 a_2 也具有这样的关系。

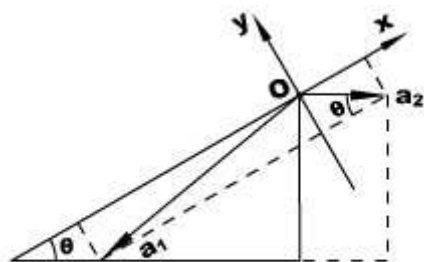


图 19

（学生活动）这两个加速度矢量有什么关系？

沿斜面方向、垂直斜面方向建 x 、 y 坐标，可得：

$$a_{1y} = a_{2y}$$

①

且： $a_{1y} = a_2 \sin \theta$

②

隔离滑块和斜面，受力图如图 20 所示。

对滑块，列 y 方向隔离方程，有：

$$mg \cos \theta - N = ma_{1y}$$

③

对斜面，仍沿合加速度 a_2 方向列方程，有：

$$N \sin \theta = Ma_2 \quad \text{④}$$

解①②③④式即可得 a_2 。

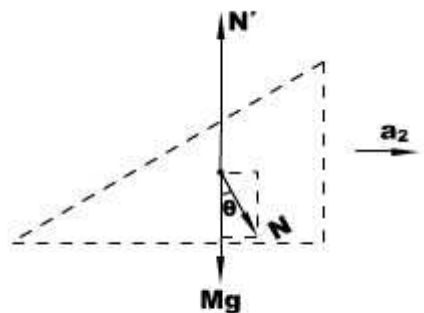
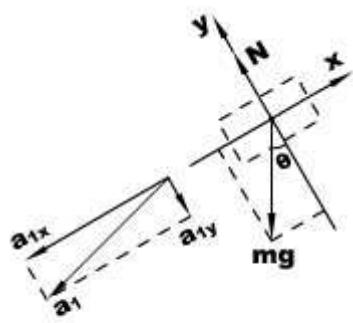


图 20

答案： $a_2 = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g$ 。

（学生活动）思考：如何求 a_1 的值？

解： a_{1y} 可以通过解上面的方程组求出； a_{1x} 只要看滑块的受力图，列 x 方向的隔离方程即可，显然有 $mg \sin \theta = ma_{1x}$ ，得： $a_{1x} = g \sin \theta$ 。最后据 $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}$ 求 a_1 。

答： $a_1 = \frac{g \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} \sqrt{M^2 + m(m + 2M) \sin^2 \theta}$ 。

2、如图 21 所示，与水平面成 θ 角的 AB 棒上有一滑套 C，可以无摩擦地在棒上滑动，开始时与棒的 A 端相距 b ，相对棒静止。当棒保持倾角 θ 不变地沿水平面匀加速运动，加速度为 a （且 $a > g \tan \theta$ ）时，求滑套 C 从棒的 A 端滑出所经历的时间。

解说：这是一个比较特殊的“连接体问题”，寻求运动学参量的关系似乎比动力学分析更加重要。动力学方面，只需要隔离滑套 C 就行了。

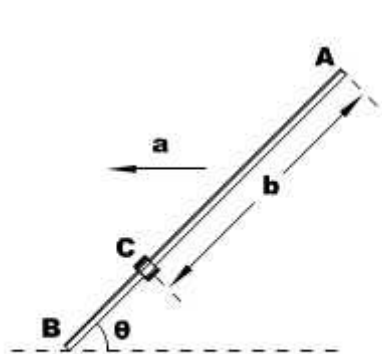


图 21

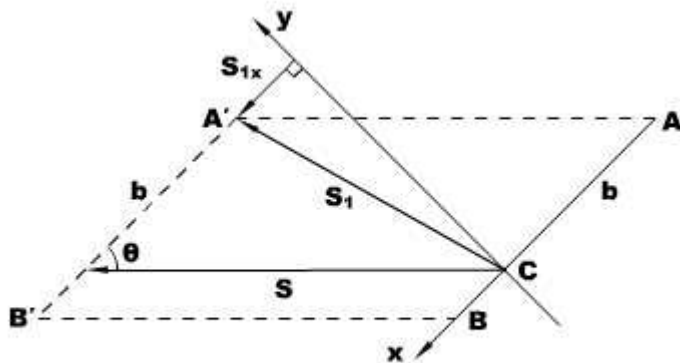


图 22

（学生活动）思考：为什么题

意要求 $a > g \tan \theta$ ？（联系本讲第二节第 1 题之“思考题”）

定性绘出符合题意的运动过程图，如图 22 所示： S 表示棒的位移， S_1 表示滑套的位移。沿棒与垂直棒建直角坐标后， S_{1x} 表示 S_1 在 x 方向上的分量。不难看出：

① $S_{1x} + b = S \cos \theta$

设全程时间为 t ，则有：

② $S = \frac{1}{2} at^2$

③ $S_{1x} = \frac{1}{2} a_{1x} t^2$

而隔离滑套，受力图如图 23 所示，显然：

④ $mg \sin \theta = ma_{1x}$

解①②③④式即可。

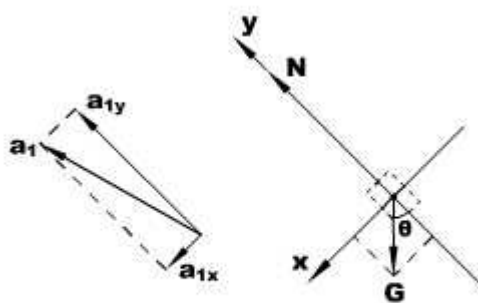


图 23

$$\text{答案: } t = \sqrt{\frac{2b}{a \cos \theta - g \sin \theta}}$$

另解：如果引进动力学在非惯性系中的修正式 $\Sigma \bar{F}_{\text{外}} + \bar{F}^* = m \bar{a}$ （注： \bar{F}^* 为惯性力），此题极简单。过程如下——

以棒为参照，隔离滑套，分析受力，如图 24 所示。

注意，滑套相对棒的加速度 $a_{\text{相}}$ 是沿棒向上的，故动力学方程为：

$$F^* \cos \theta - mg \sin \theta = ma_{\text{相}} \quad (1)$$

$$\text{其中 } F^* = ma \quad (2)$$

而且，以棒为参照，滑套的相对位移 $S_{\text{相}}$ 就是 b ，即：

$$b = S_{\text{相}} = \frac{1}{2} a_{\text{相}} t^2 \quad (3)$$

解 (1) (2) (3) 式就可以了。

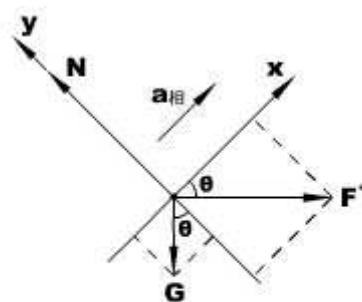


图 24

第二讲 配套例题选讲

教材范本：龚霞玲主编《奥林匹克物理思维训练教材》，知识出版社，2002年8月第一版。

例题选讲针对“教材”第三章的部分例题和习题。

第三部分 运动学

第一讲 基本知识介绍

一. 基本概念

1. 质点
2. 参照物
3. 参照系——固连于参照物上的坐标系（解题时要记住所选的是参照系，而不仅是一个点）

4. 绝对运动，相对运动，牵连运动： $v_{\text{绝}} = v_{\text{相}} + v_{\text{牵}}$

二. 运动的描述

1. 位置： $r = r(t)$
2. 位移： $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$
3. 速度： $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta r / \Delta t$. 在大学教材中表述为： $v = dr/dt$ ，表示 r 对 t 求导数

4. 加速度 $a = a_n + a_\tau$. a_n : 法向加速度，速度方向的改变率，且 $a_n = v^2 / \rho$ ， ρ 叫做曲率半径，（这是中学物理竞赛求曲率半径的唯一方法） a_τ : 切向加速度，速度

大小的改变率。 $a=dv/dt$

5. 以上是运动学中的基本物理量，也就是位移、位移的一阶导数、位移的二阶导数。可是三阶导数为什么不是呢？因为牛顿第二定律是 $F=ma$ ，即直接和加速度相联系。（ a 对 t 的导数叫“急动度”。）

6. 由于以上三个量均为矢量，所以在运算中用分量表示一般比较好

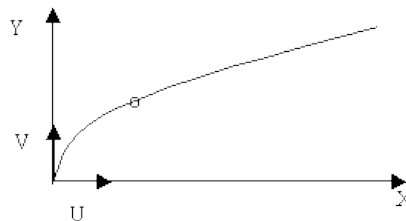


三. 等加速运动

$$v(t)=v_0+at$$

$$r(t)=r_0+v_0t+1/2 at^2$$

一道经典的物理问题：二次世界大战中物理学家曾经研究，当大炮的位置固定，以同一速度 v_0 沿各种角度发射，问：当飞机在哪一区域飞行之外时，不会有危险？（注：结论是这一区域为一抛物线，此抛物线是所有炮弹抛物线的包络线。此抛物线为在大炮上方 $h=v_0^2/2g$ 处，以 v_0 平抛物体的轨迹。）



练习题：

一盏灯挂在离地板高 l_2 ，天花板下面 l_1 处。灯泡爆裂，所有碎片以同样大小的速度 v 朝各个方向飞去。求碎片落到地板上的半径（认为碎片和天花板的碰撞是完全弹性的，即切向速度不变，法向速度反向；碎片和地板的碰撞是完全非弹性的，即碰后静止。）

四. 刚体的平动和定轴转动

1. 我们讲过的圆周运动是平动而不是转动

2. 角位移 $\phi = \phi(t)$ ，角速度 $\omega = d\phi/dt$ ，角加速度 $\varepsilon = d\omega/dt$

3. 有限的角位移是标量，而极小的角位移是矢量

4. 同一刚体上两点的相对速度和相对加速度

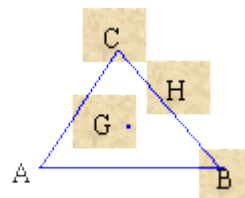
——► 两点的相对距离不变，相对运动轨迹为圆弧， $V_A = V_B + V_{AB}$ ，

在 AB 连线上

投影： $[V_A]_{AB} = [V_B]_{AB}$ ， $a_A = a_B + a_{AB}$ ， $a_{AB} = a_{AB}^n + a_{AB}^t$ ， a_{AB}^t 垂直于 AB， $a_{AB}^n = V_{AB}^2 / AB$

例：A, B, C 三质点速度分别 V_A, V_B, V_C

求 G 的速度。



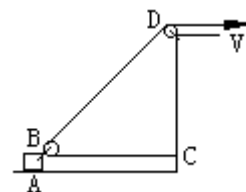
五. 课后习题：

一只木筏离开河岸，初速度为 V ，方向垂直于岸边，航行路线如图。经过时间 T 木筏划到路线上标有符号处。河水速度恒定 U 用作图法找到在 $2T, 3T, 4T$ 时刻木筏在航线上的确切位置。

五、处理问题的一般方法

(1) 用微元法求解相关速度问题

例 1：如图所示，物体 A 置于水平面上，A 前固定一滑轮 B，高台上有一定滑轮 D，一根轻绳一端固定在 C 点，再绕过 B、D，BC 段水平，当以恒定水平速度 v 拉绳上的自由端时，A 沿水平面前进，求当跨过 B 的两段绳子的夹角为 α 时，A 的运动速度。



$$(v_A = \frac{v}{1 + \cos \alpha})$$

(2) 抛体运动问题的一般处理方法

1. 平抛运动

2. 斜抛运动
3. 常见的处理方法

(1) 将斜上抛运动分解为水平方向的匀速直线运动和竖直方向的竖直上抛运动

(2) 将沿斜面和垂直于斜面方向作为 x 、 y 轴，分别分解初速度和加速度后用运动学公式解题

(3) 将斜抛运动分解为沿初速度方向的斜向上的匀速直线运动和自由落体运动两个分运动，用矢量合成法则求解

例 2：在掷铅球时，铅球出手时距地面的高度为 h ，若出手时的速度为 V_0 ，求以何角度掷球时，水平射程最远？最远射程为多少？

$$\left(\alpha = \sin^{-1} \frac{v_0}{\sqrt{2v_0^2 + 2gh}}, \quad x = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \right)$$

第二讲 运动的合成与分解、相对运动

(一) 知识点点拨

- (1) 力的独立性原理：各分力作用互不影响，单独起作用。
- (2) 运动的独立性原理：分运动之间互不影响，彼此之间满足自己的运动规律
- (3) 力的合成分解：遵循平行四边形定则，方法有正交分解，解直角三角形等

- (4) 运动的合成分解：矢量合成分解的规律方法适用
- A. 位移的合成分解 B. 速度的合成分解 C. 加速度的合成分解

参考系的转换：动参考系，静参考系

相对运动：动点相对于动参考系的运动

绝对运动：动点相对于静参考系（通常指固定于地面的参考系）的运动

牵连运动：动参考系相对于静参考系的运动

(5) 位移合成定理： $S_{A对地} = S_{A对B} + S_{B对地}$

速度合成定理： $V_{绝对} = V_{相对} + V_{牵连}$

加速度合成定理： $a_{绝对} = a_{相对} + a_{牵连}$

(二) 典型例题

(1) 火车在雨中以 30m/s 的速度向南行驶，雨滴被风吹向南方，在地球上静止的观察者测得雨滴的径迹与竖直方向成 21° 角，而坐在火车里乘客看到雨滴的径迹恰好竖直方向。求解雨滴相对于地的运动。

提示：矢量关系入图

答案： 83.7m/s

(2) 某人手拿一只停表，上了一次固定楼梯，又以不同方式上了两趟自动扶梯，为什么他可以根据测得的数据来计算自动扶梯的台阶数？

提示： $V_{人对梯} = n_1/t_1$

$V_{梯对地} = n/t_2$

$V_{人对地} = n/t_3$



$V_{人对地} = V_{人对梯} + V_{梯对地}$

答案： $n = t_2 t_3 n_1 / (t_2 - t_3) t_1$

(3) 某人驾船从河岸 A 处出发横渡，如果使船头保持跟河岸垂直的方向航行，则经 10min 后到达正对岸下游 120m 的 C 处，如果他使船逆向上游，保持跟河岸成 α 角的方向航行，则经过 12.5min 恰好到达正对岸的 B 处，求河的宽度。

提示： $120 = V_{水} * 600$

$D = V_{船} * 600$

答案：200m

(4) 一船在河的正中航行，河宽 $l = 100m$ ，流速 $u = 5m/s$ ，并在距船 $s = 150m$ 的下游形成瀑布，为了使小船靠岸时，不至于被冲进瀑布中，船对水的最小速度为多少？

提示：如图船航行

答案：1.58m/s

(三) 同步练习

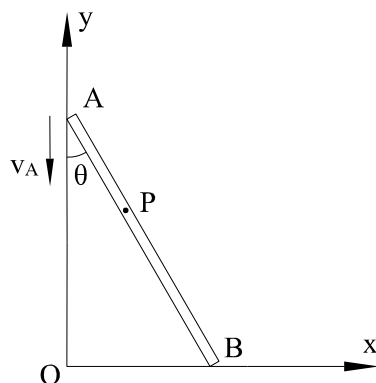
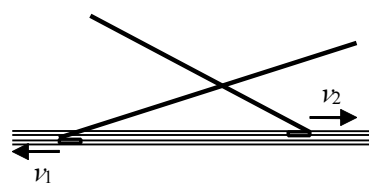
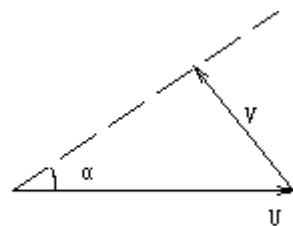
1. 一辆汽车的正面玻璃一次安装成与水平方向倾斜角为 $\beta_1 = 30^\circ$ ，另一次安装成倾角为 $\beta_2 = 15^\circ$ 。问汽车两次速度之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 为多少时，司机都是看见冰雹都是

以竖直方向从车的正面玻璃上弹开？（冰雹相对地面是竖直下落的）

2. 模型飞机以相对空气 $v = 39km/h$ 的速度绕一个边长 2km 的等边三角形飞行，设风速 $u = 21km/h$ ，方向与三角形的一边平行并与飞机起飞方向相同，试求：飞机绕三角形一周需多少时间？

3. 图为从两列蒸汽机车上冒出的两股长幅气雾拖尾的照片（俯视）。两列车沿直轨道分别以速度 $v_1 = 50km/h$ 和 $v_2 = 70km/h$ 行驶，行驶方向如箭头所示，求风速。

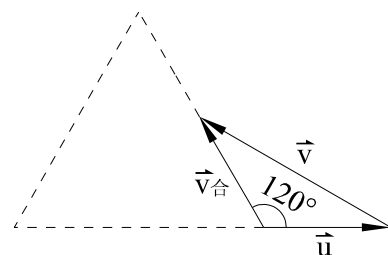
4. 细杆 AB 长 L ，两端分别约束在 x 、 y 轴上运动，(1) 试求杆上与 A 点相距 aL ($0 < a < 1$) 的 P 点运动轨迹；(2) 如果 v_A 为已知，试求 P 点的 x 、 y 向分速度 v_{Px} 和 v_{Py} 对杆方位角 θ 的函数。



(四) 同步练习提示与答案

1. 提示：利用速度合成定理，作速度的矢量三角形。答案为：3。

2. 提示：三角形各边的方向为飞机合速度的方向（而非机头的指向）；



第二段和第三段 $\bar{v}_{\text{合}}$ 大小相同。

参见右图，显然：

$$v^2 = v_{\text{合}}^2 + u^2 - 2v_{\text{合}}u\cos 120^\circ$$

可解出 $v_{\text{合}} = 24\text{km/h}$ 。

答案：0.2hour（或 12min.）。

3、提示：方法与练习一类似。答案为：3

4、提示：（1）写成参数方程 $\begin{cases} x = aL\sin\theta \\ y = (1-a)L\cos\theta \end{cases}$ 后消参数 θ 。

（2）解法有讲究：以 A 端为参照，则杆上各点只绕 A 转动。但鉴于杆子的实际运动情形如右图，应有 $v_{\text{牵}} = v_A\cos\theta$ ，

$v_{\text{转}} = v_A\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ ，可知 B 端相对 A 的转动线速

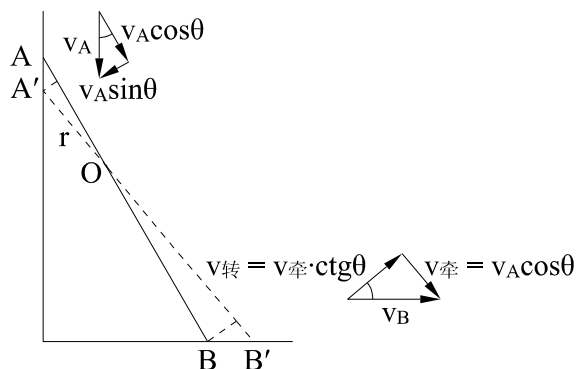
度为： $v_{\text{转}} + v_A\sin\theta = \frac{v_A}{\sin\theta}$ 。

P 点的线速度必为 $\frac{av_A}{\sin\theta} = v_{\text{相}}$

所以 $v_{Px} = v_{\text{相}}\cos\theta + v_{Ax}$ ， $v_{Py} = v_{Ay} - v_{\text{相}}\sin\theta$

答案：（1） $\frac{x^2}{(aL)^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2L^2} = 1$ ，为

椭圆；（2） $v_{Px} = av_A\text{ctg}\theta$ ， $v_{Py} = (1-a)v_A$



第四部分 曲线运动 万有引力

第一讲 基本知识介绍

一、曲线运动

1、概念、性质

2、参量特征

二、曲线运动的研究方法——运动的分解与合成

1、法则与对象

2、两种分解的思路

a、固定坐标分解（适用于匀变速曲线运动）

建立坐标的一般模式——沿加速度方向和垂直加速度方向建直角坐标；提高思想——根据解题需要建直角坐标或非直角坐标。

b、自然坐标分解（适用于变加速曲线运动）

基本常识：在考查点沿轨迹建立切向 τ 、法向 n 坐标，所有运动学矢量均沿这两个方向分解。

动力学方程 $\begin{cases} \sum F_{\tau} = ma_{\tau} \\ \sum F_n = ma_n \end{cases}$ ，其中 a_{τ} 改变速度的大小（速率）， a_n 改变速度的

方向。且 $a_n = m \frac{v^2}{\rho}$ ，其中 ρ 表示轨迹在考查点的曲率半径。定量解题一般只涉

及法向动力学方程。

三、两种典型的曲线运动

1、抛体运动（类抛体运动）

关于抛体运动的分析，和新课教材“平抛运动”的分析基本相同。在坐标的选择方面，有灵活处理的余地。

2、圆周运动

匀速圆周运动的处理：运动学参量 v 、 ω 、 n 、 a 、 f 、 T 之间的关系，向心力的寻求于合成；临界问题的理解。

变速圆周运动：使用自然坐标分析法，一般只考查法向方程。

四、万有引力定律

1、定律内容

2、条件

a、基本条件

b、拓展条件：

球体（密度呈球对称分布）**外部空间**的拓展——对球体外一点 A 的吸引等效于位于球心的质量为球的质量的质点对质点 A 的吸引；

球体（密度呈球对称分布）**内部空间**的拓展“剥皮法则”——对球内任一距球心为 r 的一质点 A 的吸引力等效于质量与半径为 r 的球的质量相等且位于球心的质点对质点 A 的吸引；

球壳（密度呈球对称分布）**外部空间**的拓展——对球壳外一点 A 的吸引等效于位于球心的质量为球壳的质量的质点对质点 A 的吸引；

球体（密度呈球对称分布）**内部空间**的拓展——对球壳内任一位置上任一质点 A 的吸引力都为零；

并且根据以为所述，由牛顿第三定律，也可求得一质点对球或对球壳的吸引力。

c、不规则物体间的万有引力计算——分割与矢量叠加

3、万有引力做功也具有只与初末位置有关而与路径无关的特征。因而相互作用的物体间有引力势能。在任一惯性系中，若规定相距无穷远时系统的万有引力势能为零，可以证明，当两物体相距为 r 时系统的万有引力势能为 $E_p = -$

$$G \frac{m_1 m_2}{r}$$

五、开普勒三定律

天体运动的本来模式与近似模式的差距，近似处理的依据。

六、宇宙速度、天体运动

1、第一宇宙速度的常规求法

2、从能量角度求第二、第三宇宙速度

$$\text{万有引力势能 } E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

3、解天体运动的本来模式时，应了解椭圆的数学常识

第二讲 重要模型与专题

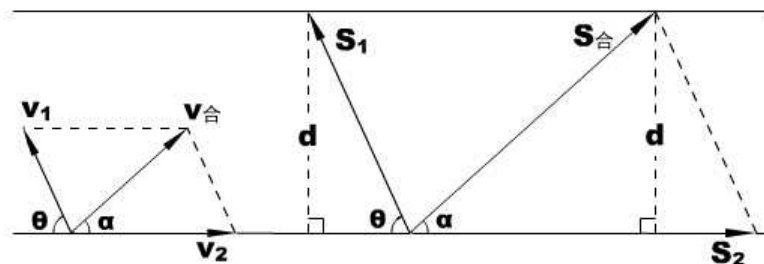


图 1

一、小船渡河

物理情形：在宽度为 d 的河中，水流速度 v_2 恒定。岸边有一艘小船，保持相对河水恒定的速率 v_1 渡河，但船头的方向可以选择。试求小船渡河的最短时间和最小位移。

模型分析：小船渡河的实际运动（相对河岸的运动）由船相对水流速度 v_1 和水相对河岸的速度 v_2 合成。可以设船头与河岸上游夹角为 θ （即 v_1 的方向），速度矢量合成如图 1

（学生活动）用余弦定理可求 $v_{\text{合}}$ 的大小

$$v_{\text{合}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta}$$

（学生活动）用正弦定理可求 $v_{\text{合}}$ 的方向。令 $v_{\text{合}}$ 与河岸下游夹角为 α ，则

$$\alpha = \arcsin \frac{v_1 \sin \theta}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta}}$$

1、求渡河的时间与最短时间

由于合运动合分运动具有等时性，故渡河时间既可以根据合运动求，也可以根据分运动去求。针对这一思想，有以下两种解法

$$\text{解法一： } t = \frac{S_{\text{合}}}{v_{\text{合}}}$$

其中 $v_{\text{合}}$ 可用正弦定理表达，

$$\text{故有 } t = \frac{d / \sin \alpha}{v_1 \sin \theta} = \frac{d}{v_1 \sin \theta \sin \alpha}$$

$$\text{解法二： } t = \frac{S_1}{v_1} =$$

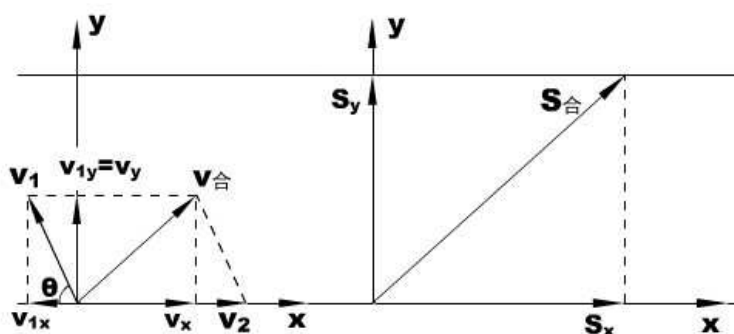


图 2

$$\frac{d/\sin\theta}{v_1} = \frac{d}{v_1 \sin\theta}$$

此外，结合静力学正交分解的思想，我们也可以建立沿河岸合垂直河岸的坐标 x 、 y ，然后先将 v_1 分解（ v_2 无需分解），再合成，如图 2 所示。而且不难看出，合运动在 x 、 y 方向的分量 v_x 和 v_y 与 v_1 在 x 、 y 方向的分量 v_{1x} 、 v_{1y} 以及 v_2 具有以下关系

$$v_y = v_{1y}$$

$$v_x = v_2 - v_{1x}$$

由于合运动沿 y 方向的分量 $S_y \equiv d$ ，故有

$$\text{解法三： } t = \frac{S_y}{v_y} = \frac{d}{v_{1y}} = \frac{d}{v_1 \sin\theta}$$

$t(\theta)$ 函数既已得出，我们不难得出结论

$$\text{当 } \theta = 90^\circ \text{ 时，渡河时间的最小值 } t_{\min} = \frac{d}{v_1}$$

（从“解法三”我们最容易理解 t 为什么与 v_2 无关，故 t_{\min} 也与 v_2 无关。这个结论是意味深长的。）

2、求渡河的位移和最小位移

在上面的讨论中，小船的位移事实上已经得出，即

$$S_{\text{合}} = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{d}{\frac{v_1}{v_{\text{合}}}\sin\theta} = \frac{d\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}}{v_1 \sin\theta}$$

但 $S_{\text{合}}(\theta)$ 函数比较复杂，寻求 $S_{\text{合}}$ 的极小值并非易事。因此，我们可以从其它方面作一些努力。

将 $S_{\text{合}}$ 沿 x 、 y 方向分解成 S_x 和 S_y ，因为 $S_y \equiv d$ ，要 $S_{\text{合}}$ 极小，只要 S_x 极小就行了。而 $S_x(\theta)$ 函数可以这样求——

$$\text{解法一： } S_x = v_x t = (v_2 - v_{1x}) \frac{S_y}{v_y} = (v_2 - v_1 \cos\theta) \frac{d}{v_1 \sin\theta}$$

为求极值，令 $\cos\theta = p$ ，则 $\sin\theta = \sqrt{1-p^2}$ ，再将上式两边平方、整理，得到

$$v_1^2(S_x^2 + d^2)p^2 - 2v_1v_2d^2p + d^2v_2^2 - S_x^2v_1^2 = 0$$

这是一个关于 p 的一元二次方程，要 p 有解，须满足 $\Delta \geq 0$ ，即

$$4v_1^2v_2^2d^4 \geq 4v_1^2(S_x^2 + d^2)(d^2v_2^2 - S_x^2v_1^2)$$

$$\text{整理得 } S_x^2v_1^2 \geq d^2(v_2^2 - v_1^2)$$

所以， $S_{x\min} = \frac{d}{v_1} \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$ ，代入 $S_x(\theta)$ 函数可知，此时 $\cos \theta = \frac{v_1}{v_2}$

最后， $S_{\min} = \sqrt{S_{x\min}^2 + S_y^2} = \frac{v_2}{v_1} d$

此过程仍然比较繁复，且数学味太浓。结论得出后，我们还不难发现一个问题：当 $v_2 < v_1$ 时， $S_{\min} < d$ ，这显然与事实不符。（造成这个局面的原因是：在以上的运算过程中，方程两边的平方和开方过程中必然出现了增根或遗根的现象）所以，此法给人一种玄乎的感觉。

解法二：纯物理解——矢量三角形的动态分析

从图 2 可知， S_y 恒定， S_x 越小，必有 $S_{\text{合}}$ 矢量与下游河岸的夹角越大，亦即 $v_{\text{合}}$ 矢量与下游河岸的夹角越大（但不得大于 90° ）。

我们可以通过 v_1 与 v_2 合成 $v_{\text{合}}$ 矢量图探讨 $v_{\text{合}}$ 与下游河岸夹角的最大可能。

先进行平行四边形到三角形的变换，如图 3 所示。

当 θ 变化时， $v_{\text{合}}$ 矢量的大小和方向随之变化，具体情况如图 4 所示。

从图 4 不难看出，只有当 $v_{\text{合}}$ 和虚线半圆周相切时， $v_{\text{合}}$ 与 v_2 （下游）的夹角才会最大。此时， $v_{\text{合}} \perp v_1$ ， v_1 、 v_2 和 $v_{\text{合}}$ 构成一个直角三角形， $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{v_1}{v_2}$

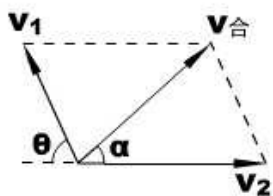


图 3

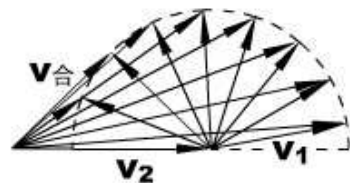


图 4

并且，此时： $\theta = \arccos \frac{v_1}{v_2}$

有了 α_{\max} 的值，结合图 1 可以求出： $S_{\text{合}\min} = \frac{v_2}{v_1} d$

最后解决 $v_2 < v_1$ 时结果不切实际的问题。从图 4 可以看出，当 $v_2 < v_1$ 时， $v_{\text{合}}$ 不可能和虚线半圆周相切（或 $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{v_1}{v_2}$ 无解），结合实际情况， α_{\max} 取 90°

即： $v_2 < v_1$ 时， $S_{\text{合}\min} = d$ ，此时， $\theta = \arccos \frac{v_2}{v_1}$

结论：若 $v_1 < v_2$ ， $\theta = \arccos \frac{v_1}{v_2}$ 时， $S_{\text{合min}} = \frac{v_2}{v_1} d$

若 $v_2 < v_1$ ， $\theta = \arccos \frac{v_2}{v_1}$ 时， $S_{\text{合min}} = d$

二、滑轮小船

物理情形：如图 5 所示，岸边的汽车用一根不可伸长的轻绳通过定滑轮牵引水中的小船，设小船始终不离开水面，且绳足够长，求汽车速度 v_1 和小船速度 v_2 的大小关系。

模型分析：由于绳不可伸长，滑轮右边绳子缩短的速率即是汽车速度的大小 v_1 ，考查绳与船相连的端点运动情况， v_1 和 v_2 必有一个运动的合成与分解的问题。

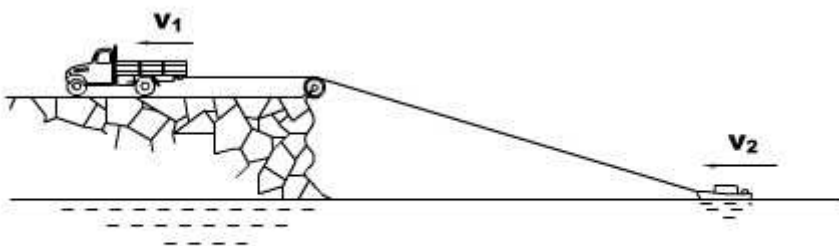


图 5

（学生活动）如果 v_1 恒定不变， v_2 会恒定吗？若恒定，说明理由；若变化，定性判断变化趋势。

结合学生的想法，介绍极限外推的思想：当船离岸无穷远时，绳与水的夹角趋于零， $v_2 \rightarrow v_1$ 。当船比较靠岸时，可作图比较船的移动距离、绳子的缩短长度，得到 $v_2 > v_1$ 。故“船速增大”才是正确结论。

故只能引入瞬时方位角 θ ，看 v_1 和 v_2 的瞬时关系。

（学生活动） v_1 和 v_2 定量关系若何？是否可以考虑用运动的分解与合成的知识解答？

针对如图 6 所示的两种典型方案，初步评说——甲图中 $v_2 = v_1 \cos \theta$ ，船越靠岸， θ 越大， v_2 越小，和前面的定性结论冲突，必然是错误的。

错误的根源分析：和试验修订本教材中“飞机起飞”的运动分析进行了不恰当地联系。仔细比较这两个运动的差别，并联系“小船渡河”的运动合成等事例，总结出这样的规律——

合运动是显性的、轨迹实在的运动，分运动是隐性的、需要分析而具有人为特征（无唯一性）的运动。

解法一：在图 6（乙）中，当我们挖掘、分析了滑轮绳子端点的运动后，不难得出：船的沿水面运动是 v_2 合运动，端点参与绳子的缩短运动 v_1 和随绳子的转动 $v_{\text{转}}$ ，从而肯定乙方案是正确的。

即： $v_2 = v_1 / \cos \theta$

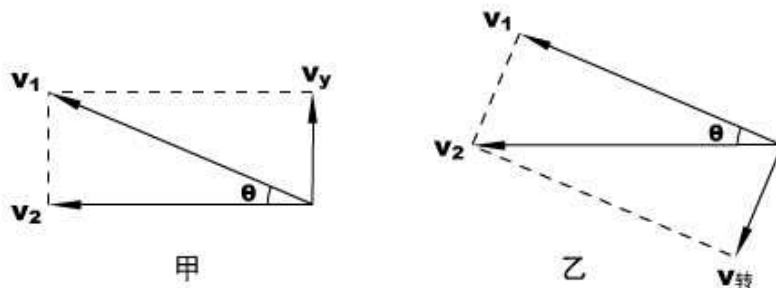


图 6

解法二：微元法。从考查位置开始取一个极短过程，将绳的运动和船的运动在图7（甲）

中标示出来，AB是绳的初识位置，AC是绳的末位置，在AB上取

$\overline{AD} = \overline{AC}$ 得

D点，并连接CD。显然，图中BC是船的位移大小，DB是绳子的缩短长度。由于过程极短，等腰三角形ACD的顶角 $\angle A \rightarrow 0$ ，则底角 $\angle ACD \rightarrow 90^\circ$ ， $\triangle CDB$ 趋于直角三角形。将此三角放大成图7（乙），

得出： $S_2 = S_1 / \cos \theta$ 。

鉴于过程极短，绳的缩短运动和船的运动都可以认为是匀速的，即： $S_2 = v_2 t$ ， $S_1 = v_1 t$ 。

所以： $v_2 = v_1 / \cos \theta$

三、斜抛运动的最大射程

物理情形：不计空气阻力，将小球斜向上抛出，初速度大小恒为 v_0 ，方向可以选择，试求小球落回原高度的最大水平位移（射程）。

模型分析：斜抛运动的常规分析和平抛运动完全相同。

设初速度方向与水平面夹 θ 角，建立水平、竖直的 x 、 y 轴，将运动学参量沿 x 、 y 分解。针对抛出到落回原高度的过程

$$0 = S_y = v_{0y} t + \frac{1}{2} (-g) t^2$$

$$S_x = v_{0x} t$$

$$\text{解以上两式易得：} S_x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$\text{结论：当抛射角 } \theta = 45^\circ \text{ 时，最大射程 } S_{x\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

（学生活动）若 v_0 、 θ 确定，试用两种方法求小球到达的最大高度。

运动学求解——考查竖直分运动即可；能量求解——注意小球在最高点应具备的速度 v_{0x} ，然后对抛出到最高点的过程用动能定理或机械能守恒。

$$\text{结论：} H_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

四、物体脱离圆弧的讨论

物理情形：如图8所示，长为 L 的细绳一端固

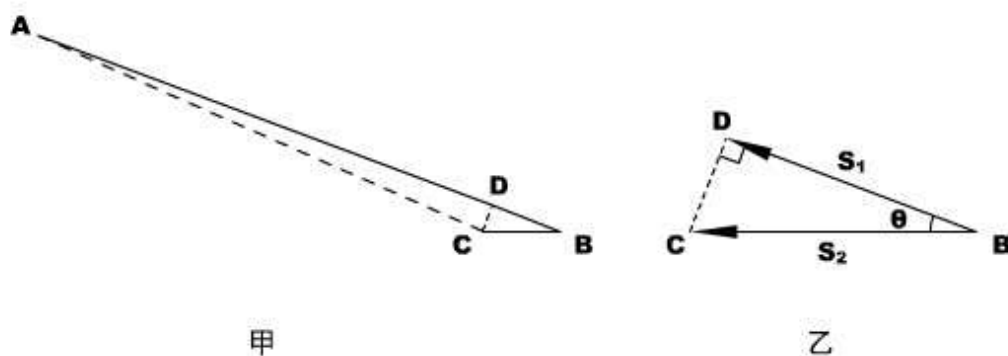


图 7

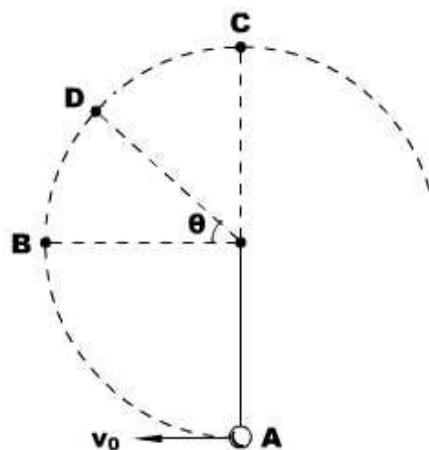


图 8

定，另一端系一小球。当小球在最低点时，给球一个 $v_0 = 2\sqrt{gL}$ 的水平初速，试求所能到达的最大高度。

模型分析：用自然坐标分析变速圆周运动的典型事例。能量关系的运用，也是对常规知识的复习。

（学生活动）小球能否形成的往复的摆动？小球能否到达圆弧的最高点 C？

通过能量关系和圆周运动动力学知识的复习，得出：小球运动超过 B 点、但不能到达 C 点 ($v_0 \geq \sqrt{gL}$)，即小球必然在 BC 之间的某点脱离圆弧。

（学生活动）小球会不会在 BC 之间的某点脱离圆弧后作自由落体运动？

尽管对于本问题，能量分析是可行的（BC 之间不可能出现动能为零的点，则小球脱离圆弧的初速度 v_0 不可能为零），但用动力学的工具分析，是本模型的重点——

在 BC 阶段，只要小球还在圆弧上，其受力分析必如图 9 所示。沿轨迹的切向、法向分别建 τ 、 n 坐标，然后将重力 G 沿 τ 、 n 分解为 G_τ 和 G_n 分量， T 为绳子张力。法向动力学方程为

$$T + G_n = \Sigma F_n = ma_n = m \frac{v^2}{r}$$

由于 $T \geq 0$ ， $G_n > 0$ ，故 $v \neq 0$ 。（学生活动：若换一个 v_0 值，在 AB 阶段， $v = 0$ 是可能出现的；若将绳子换成轻杆，在 BC 阶段 $v = 0$ 也是可能出现的。）

下面先解脱离点的具体位置。设脱离点为 D，对应方位角为 θ ，如图 8 所示。由于在 D 点之后绳子就要弯曲，则此时绳子的张力 T 为零，而此时仍然在作圆周运动，故动力学方程仍满足

$$G_n = G \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

①

在再针对 A→D 过程，小球机械能守恒，即（选 A 所在的平面为参考平面）：

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = mg (L + L \sin \theta) + \frac{1}{2} m v_D^2 \quad \text{②}$$

代入 v_0 值解①、②两式得： $\theta = \arcsin \frac{2}{3}$ ，（同时得到： $v_D = \sqrt{\frac{2}{3}gL}$ ）小球

脱离 D 点后将以 v_D 为初速度作斜向上抛运动。它所能到达的最高点（相对 A）可以用两种方法求得。

解法一：运动学途径。

$$\text{先求小球斜抛的最大高度，} h_m = \frac{(v_D \cos \theta)^2}{2g} = \frac{v_D^2 (1 - \sin^2 \theta)}{2g}$$

$$\text{代入 } \theta \text{ 和 } v_D \text{ 的值得：} h_m = \frac{5}{27} L$$

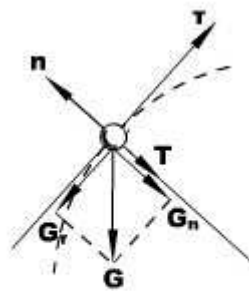


图 9

$$\text{小球相对 A 的总高度: } H_m = L + L\sin\theta + h_m = \frac{50}{27}L$$

解法二：能量途径

小球在斜抛的最高点仍具有 v_D 的水平分量，即 $v_D \sin\theta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$ 。对 A →

最高点的过程用机械能守恒定律（设 A 所在的平面为参考平面），有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m(v_D \sin\theta)^2 + mgH_m$$

$$\text{容易得到: } H_m = \frac{50}{27}L$$

五、万有引力的计算

物理情形：如图 9 所示，半径为 R 的均质球质量为 M ，球心在 O 点，现在被内切的挖去了一个半径为 $R/2$ 的球形空腔（球心在 O' ）。在 O 、 O' 的连线上距离 O 点为 d 的地方放有一个很小的、质量为 m 的物体，试求这两个物体之间的万有引力。

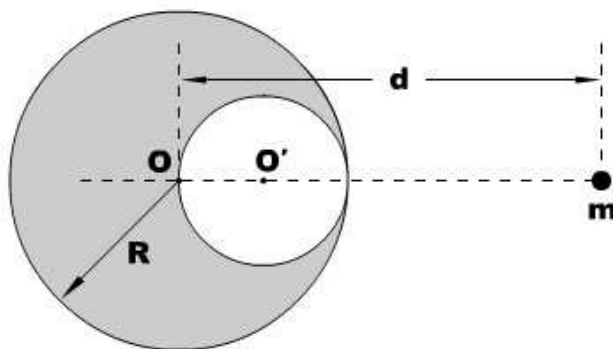


图 10

模型分析：无论是“基本条件”还是“拓展条件”，本模型都很难直接符合，因此必须使用一些特殊的处理方法。本模型除了照应万有引力的拓展条件之外，着重介绍“填补法”的应用。

空腔里现在虽然空无一物，但可以看成是两个半径为 $R/2$ 的球的叠加：一个的质量为 $+M/8$ ，一个的质量为 $-M/8$ 。然后，前者正好填补空腔——和被挖除后剩下的部分构成一个完整的均质球 A；注意后者，虽然是一个比较特殊的物体（质量为负值），但仍然是一个均质的球体，命名为 B。

既然 A、B 两物均为均质球体，他们各自和右边小物体之间的万有引力，就可以使用“拓展条件”中的定势来计算了。只是有一点需要说明，B 物的质量既然负值，它和 m 之间的万有“引力”在方向上不再表现为吸引，而应为排斥——成了“万有斥力”了。具体过程如下

$$F_{Am} = G \frac{Mm}{d^2}$$

$$F_{Bm} = G \frac{-\frac{M}{8} \cdot m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = -G \frac{Mm}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}$$

$$\text{最后, 两物之间的万有引力 } F = F_{Am} + F_{Bm} = G \frac{Mm}{d^2} - G \frac{Mm}{8(d - \frac{R}{2})^2}$$

需要指出的是, 在一部分同学的心目中, 可能还会存在另一种解题思路, 那就是先通过力矩平衡求被挖除物体的重心 (仍然要用到“填补法”、负质量物体的重力反向等), 它将在 O 、 O' 的连线上距离 O 点左侧 $R/14$ 处, 然后“一步到位”地求被挖除物与 m 的万有引力

$$F = G \frac{\frac{M}{7} \cdot m}{(d + \frac{R}{14})^2}$$

然而, 这种求法违背了万有引力定律适用的条件, 是一种错误的思路。

六、天体运动的计算

物理情形: 地球和太阳的质量分别为 m 和 M , 地球绕太阳作椭圆运动, 轨道的半长轴为 a , 半短轴为 b , 如图 11 所示。试求地球在椭圆顶点 A 、 B 、 C 三点的运动速度, 以及轨迹在 A 、 C 两点的曲率半径。

模型分析: 求解天体运动的本来模式, 常常要用到开普勒定律 (定量)、机械能守恒 (万有引力势能)、椭圆的数学常识等等, 相对高考要求有很大的不同。

地球轨道的离心率很小 (其值 $\frac{c}{a} \approx 0.0167$, 其中 c 为半焦距), 这是我们常常能将它近似为圆的原因。为了方便说明问题, 在图 11 中, 我们将离心率夸大了。

针对地球从 A 点运动到 B 点的过程, 机械能守恒

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \left(-G \frac{Mm}{a-c} \right) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \left(-G \frac{Mm}{a+c} \right)$$

比较 A 、 B 两点, 应用开普勒第二定律, 有: $v_A (a-c) = v_B (a+c)$

结合椭圆的基本关系: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\text{解以上三式可得: } v_A = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad v_B = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

再针对地球从 A 到 C 的过程, 应用机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \left(-G \frac{Mm}{a-c} \right) = \frac{1}{2} m v_C^2 + \left(-G \frac{Mm}{a} \right)$$

$$\text{代入 } v_A \text{ 值可解得: } v_C = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

为求 A 、 C 两点的曲率半径, 在 A 、 C 两点建自然坐标, 然后应用动力学 (法向) 方程。

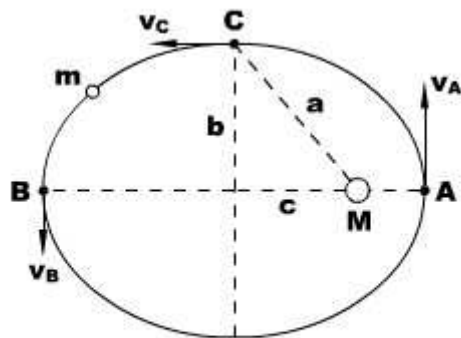


图 11

在 A 点, $F_{\text{万}} = \Sigma F_n = m a_n$, 设轨迹在 A 点的曲率半径为 ρ_A , 即: $G \frac{Mm}{(a-c)^2} =$

$$m \frac{v_A^2}{\rho_A}$$

代入 v_A 值可解得: $\rho_A = \frac{b^2}{a}$

在 C 点, 方程复杂一些, 须将万有引力在 τ 、 n 方向分解, 如图 12 所示。

然后, $F_{\text{万}n} = \Sigma F_n = m a_n$, 即: $F_{\text{万}} \cos \theta = m \frac{v_C^2}{\rho_C}$

即: $G \frac{Mm}{a^2} \cdot \frac{b}{a} = m \frac{v_C^2}{\rho_C}$

代入 v_C 值可解得: $\rho_C = \frac{a^2}{b}$

值得注意的是, 如果针对 A、C 两点用开普勒第二定律, 由于 C 点处的矢径 r 和瞬时速度 v_C 不垂直, 方程不能写作 $v_A (a-c) = v_C a$ 。

正确的做法是: 将 v_C 分解出垂直于矢径的分量 (分解方式可参看图 12, 但分解的平行四边形未画出) $v_C \cos \theta$, 再用 $v_A (a-c) = (v_C \cos \theta) a$, 化简之后的形式成为

$$v_A (a-c) = v_C b$$

要理解这个关系, 有一定的难度, 所以建议最好不要对 A、C 两点用开普勒第二定律

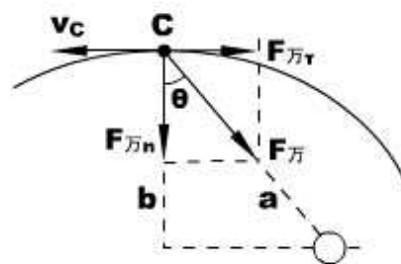


图 12

第三讲 典型例题解析

教材范本: 龚霞玲主编《奥林匹克物理思维训练教材》, 知识出版社, 2002 年 8 月第一版。

例题选讲针对“教材”第五、第六章的部分例题和习题。

第五部分 动量和能量

第一讲 基本知识介绍

一、冲量和动量

1、冲力（F—t 图象特征）→ 冲量。冲量定义、物理意义
冲量在 F—t 图象中的意义→从定义角度求变力冲量（F 对 t 的平均作用力）

2、动量的定义
动量矢量性与运算

二、动量定理

1、定理的基本形式与表达

2、分方向的表达式： $\Sigma I_x = \Delta P_x$ ， $\Sigma I_y = \Delta P_y$ …

3、定理推论：动量变化率等于物体所受的合外力。即 $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \Sigma F_{\text{外}}$

三、动量守恒定律

1、定律、矢量性

2、条件

a、原始条件与等效

b、近似条件

c、某个方向上满足 a 或 b，可在此方向应用动量守恒定律

四、功和能

1、功的定义、标量性，功在 F—S 图象中的意义

2、功率，定义求法和推论求法

3、能的概念、能的转化和守恒定律

4、功的求法

a、恒力的功： $W = FS \cos \alpha = F S_F = F_S S$

b、变力的功：基本原则——过程分割与代数累积；利用 F—S 图象（或先寻求 F 对 S 的平均作用力）

c、解决功的“疑难杂症”时，把握“功是能量转化的量度”这一要点

五、动能、动能定理

1、动能（平动动能）

2、动能定理

a、 ΣW 的两种理解

b、动能定理的广泛适用性

六、机械能守恒

1、势能

a、保守力与耗散力（非保守力）→ 势能（定义： $\Delta E_p = -W_{\text{保}}$ ）

b、力学领域的三种势能（重力势能、引力势能、弹性势能）及定量表达

2、机械能

3、机械能守恒定律

a、定律内容

b、条件与拓展条件（注意系统划分）

c、功能原理：系统机械能的增量等于外力与耗散内力做功的代数和。

七、碰撞与恢复系数

1、碰撞的概念、分类（按碰撞方向分类、按碰撞过程机械能损失分类）

碰撞的基本特征：a、动量守恒；b、位置不超越；c、动能不膨胀。

2、三种典型的碰撞

a、弹性碰撞：碰撞全程完全没有机械能损失。满足——

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

解以上两式（注意技巧和“不合题意”解的舍弃）可得：

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2v_{20}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2v_{10}}{m_2 + m_1}$$

对于结果的讨论：

①当 $m_1 = m_2$ 时， $v_1 = v_{20}$ ， $v_2 = v_{10}$ ，称为“交换速度”；

②当 $m_1 \ll m_2$ ，且 $v_{20} = 0$ 时， $v_1 \approx -v_{10}$ ， $v_2 \approx 0$ ，小物碰大物，原速率返回；

③当 $m_1 \gg m_2$ ，且 $v_{20} = 0$ 时， $v_1 \approx v_{10}$ ， $v_2 \approx 2v_{10}$ ，

b、非（完全）弹性碰撞：机械能有损失（机械能损失的内部机制简介），只满足动量守恒定律

c、完全非弹性碰撞：机械能的损失达到最大限度；外部特征：碰撞后两物体连为一个整体，故有

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

3、恢复系数：碰后分离速度（ $v_2 - v_1$ ）与碰前接近速度（ $v_{10} - v_{20}$ ）的比值，即：

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}。根据“碰撞的基本特征”， $0 \leq e \leq 1$ 。$$

当 $e = 0$ ，碰撞为完全非弹性；

当 $0 < e < 1$ ，碰撞为非弹性；

当 $e = 1$ ，碰撞为弹性。

八、“广义碰撞”——物体的相互作用

1、当物体之间的相互作用时间不是很短，作用不是很强烈，但系统动量仍然守恒时，碰撞的部分规律仍然适用，但已不符合“碰撞的基本特征”（如：位置可能超越、机械能可能膨胀）。此时，碰撞中“不合题意”的解可能已经有意义，如弹性碰撞中 $v_1 = v_{10}$ ， $v_2 = v_{20}$ 的解。

2、物体之间有相对滑动时，机械能损失的重要定势： $-\Delta E = \Delta E_{内} = f_{滑} \cdot S_{相}$ ，其中 $S_{相}$ 指相对路程。

第二讲 重要模型与专题

一、动量定理还是动能定理？

物理情形：太空飞船在宇宙飞行时，和其它天体的万有引力可以忽略，但是，飞船会定时遇到太空垃圾的碰撞而受到阻碍作用。设单位体积的太空均匀分布垃圾 n 颗，每颗的平均质量为 m ，垃圾的运行速度可以忽略。飞船维持恒定的速率 v 飞行，垂直速度方向的横截面积为 S ，与太空垃圾的碰撞后，将垃圾完全粘附住。试求飞船引擎所应提供的平均推力 F 。

模型分析：太空垃圾的分布并不是连续的，对飞船的撞击也不连续，如何正

确选取研究对象，是本题的前提。建议充分理解“平均”的含义，这样才能相对模糊地处理垃圾与飞船的作用过程、淡化“作用时间”和所考查的“物理过程时间”的差异。物理过程需要人为截取，对象是太空垃圾。

先用动量定理推论解题。

取一段时间 Δt ，在这段时间内，飞船要穿过体积 $\Delta V = S \cdot v \Delta t$ 的空间，遭遇 $n \Delta V$ 颗太空垃圾，使它们获得动量 ΔP ，其动量变化率即是飞船应给予那部分垃圾的推力，也即飞船引擎的推力。

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta M \cdot v}{\Delta t} = \frac{m \cdot n \Delta V \cdot v}{\Delta t} = \frac{m \cdot n S v \Delta t \cdot v}{\Delta t} = n m S v^2$$

如果用动能定理，能不能解题呢？

同样针对上面的物理过程，由于飞船要前进 $x = v \Delta t$ 的位移，引擎推力 \bar{F} 须做功 $W = \bar{F} x$ ，它对应飞船和被粘附的垃圾的动能增量，而飞船的 ΔE_k 为零，所以：

$$W = \frac{1}{2} \Delta M v^2$$

$$\text{即：} \bar{F} v \Delta t = \frac{1}{2} (n m S \cdot v \Delta t) v^2$$

$$\text{得到：} \bar{F} = \frac{1}{2} n m S v^2$$

两个结果不一致，不可能都是正确的。分析动能定理的解题，我们不能发现，垃圾与飞船的碰撞是完全非弹性的，需要消耗大量的机械能，因此，认为“引擎做功就等于垃圾动能增加”的观点是错误的。但在动量定理的解题中，由于 $l = \bar{F} t$ ，由此推出的 $\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ 必然是飞船对垃圾的平均推力，再对飞船用平衡条件， \bar{F} 的大小就是引擎推力大小了。这个解没有毛病可挑，是正确的。

（学生活动）思考：如图 1 所示，全长 L 、总质量为 M 的柔软绳子，盘在一根光滑的直杆上，现用手握住绳子的一端，以恒定的水平速度 v 将绳子拉直。忽略地面阻力，试求手的拉力 F 。

解：解题思路和上面完全相同。

$$\text{答：} \frac{Mv^2}{L}$$

二、动量定理的分方向应用

物理情形：三个质点 A、B 和 C，质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 ，用拉直且不可伸长的绳子 AB 和 BC 相连，静止在水平面上，如图 2 所示，AB 和 BC 之间的夹角为 $(\pi - \alpha)$ 。现对质点 C 施加以冲量 I ，方向沿 BC，试求质点 A 开始运动的速度。

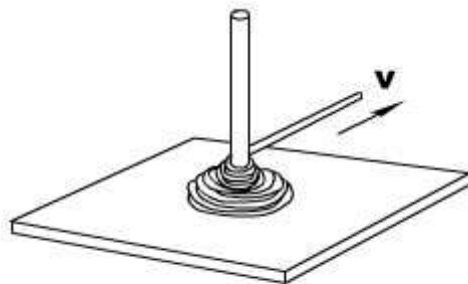


图 1

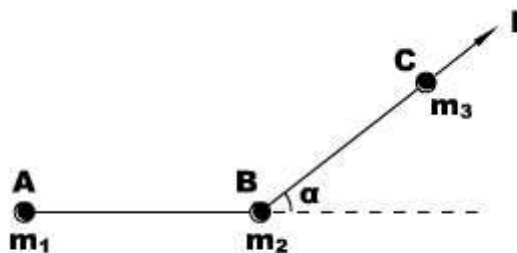


图 2

模型分析：首先，注意“开始运动”的理解，它指绳子恰被拉直，有作用力和冲量产生，但是绳子的方位尚未发生变化。其二，对三个质点均可用动量定理，但是，B质点受冲量不在一条直线上，故最为复杂，可采用分方向的形式表达。其三，由于两段绳子不可伸长，故三质点的瞬时速度可以寻求到两个约束关系。

下面具体看解题过程——

绳拉直瞬间，AB绳对A、B两质点的冲量大小相等（方向相反），设为 I_1 ，BC绳对B、C两质点的冲量大小相等（方向相反），设为 I_2 ；设A获得速度 v_1 （由于A受合冲量只有 I_1 ，方向沿AB，故 v_1 的反向沿AB），设B获得速度 v_2 （由于B受合冲量为 $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$ ，矢量和既不沿AB，也不沿BC方向，可设 v_2 与AB绳夹角为 $\langle \pi - \beta \rangle$ ，如图3所示），设C获得速度 v_3 （合冲量 $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$ 沿BC方向，故 v_3 沿BC方向）。

对A用动量定理，有：

$$I_1 = m_1 v_1 \quad (1)$$

B的动量定理是一个矢量方程： $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 =$

$m_2 \bar{v}_2$ ，可化为两个分方向的标量式，即：

$$I_2 \cos \alpha - I_1 = m_2 v_2 \cos \beta \quad (2)$$

$$I_2 \sin \alpha = m_2 v_2 \sin \beta \quad (3)$$

质点C的动量定理方程为：

$$I - I_2 = m_3 v_3 \quad (4)$$

$$\text{AB绳不可伸长，必有 } v_1 = v_2 \cos \beta \quad (5)$$

$$\text{BC绳不可伸长，必有 } v_2 \cos(\beta - \alpha) = v_3 \quad (6)$$

六个方程解六个未知量（ I_1 、 I_2 、 v_1 、 v_2 、 v_3 、 β ）是可能的，但繁复程度非同一般。解方程要注意条理性，否则易造成混乱。建议采取如下步骤——

1、先用⑤⑥式消掉 v_2 、 v_3 ，使六个一级式变成四个二级式：

$$I_1 = m_1 v_1 \quad (1)$$

$$I_2 \cos \alpha - I_1 = m_2 v_1 \quad (2)$$

$$I_2 \sin \alpha = m_2 v_1 \tan \beta \quad (3)$$

$$I - I_2 = m_3 v_1 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta) \quad (4)$$

2、解(3)(4)式消掉 β ，使四个二级式变成三个三级式：

$$I_1 = m_1 v_1 \quad (-)$$

$$I_2 \cos \alpha - I_1 = m_2 v_1 \quad (二)$$

$$I = m_3 v_1 \cos \alpha + I_2 \frac{m_2 + m_3 \sin^2 \alpha}{m_2} \quad (三)$$

3、最后对(-)(二)(三)式消 I_1 、 I_2 ，解 v_1 就方便多了。结果为：

$$v_1 = \frac{I m_2 \cos \alpha}{m_2 (m_1 + m_2 + m_3) + m_1 m_3 \sin^2 \alpha}$$

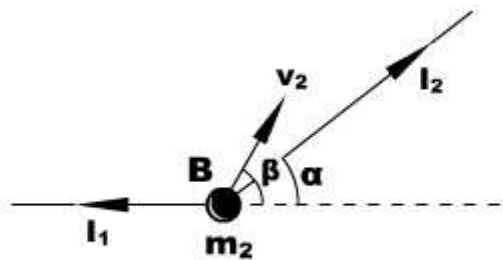


图 3

（学生活动：训练解方程的条理和耐心）思考： v_2 的方位角 β 等于多少？

解：解“二级式”的(1)(2)(3)即可。(1)代入(2)消 l_1 ，得 l_2 的表达式，将 l_2 的表达式代入(3)就行了。

$$\text{答： } \beta = \arctan \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \tan \alpha \right)。$$

三、动量守恒中的相对运动问题

物理情形：在光滑的水平地面上，有一辆车，车内有一个人和 N 个铅球，系统原来处于静止状态。现车内的人以一定的水平速度将铅球一个一个地向车外抛出，车子和人将获得反冲速度。第一过程，保持每次相对地面抛球速率均为 v ，直到将球抛完；第二过程，保持每次相对车子抛球速率均为 v ，直到将球抛完。试问：哪一过程使车子获得的速度更大？

模型分析：动量守恒定律必须选取研究对象之外的第三方（或第四、第五方）为参照物，这意味着，本问题不能选车子为参照。一般选地面为参照系，这样对“第二过程”的铅球动量表达，就形成了难点，必须引进相对速度与绝对速度的关系。至于“第一过程”，比较简单： N 次抛球和将 N 个球一次性抛出是完全等效的。

设车和人的质量为 M ，每个铅球的质量为 m 。由于矢量的方向落在一条直线上，可以假定一个正方向后，将矢量运算化为代数运算。设车速方向为正，且第一过程获得的速度大小为 V_1 ，第二过程获得的速度大小为 V_2 。

第一过程，由于铅球每次的动量都相同，可将多次抛球看成一次抛出。车子、人和 N 个球动量守恒。

$$0 = Nm(-v) + MV_1$$

$$\text{得： } V_1 = \frac{Nm}{M}v \quad \text{①}$$

第二过程，必须逐次考查铅球与车子（人）的作用。

第一个球与 $(N-1)$ 个球、人、车系统作用，完毕后，设“系统”速度为 u_1 。

值得注意的是，根据运动合成法则 $\vec{v}_{\text{球} \rightarrow \text{地}} = \vec{v}_{\text{球} \rightarrow \text{车}} + \vec{v}_{\text{车} \rightarrow \text{地}}$ ，铅球对地的速度并不是 $(-v)$ ，而是 $(-v + u_1)$ 。它们动量守恒方程为：

$$0 = m(-v + u_1) + [M + (N-1)m]u_1$$

$$\text{得： } u_1 = \frac{m}{M + Nm}v$$

第二个球与 $(N-2)$ 个球、人、车系统作用，完毕后，设“系统”速度为 u_2 。它们动量守恒方程为：

$$[M + (N-1)m]u_1 = m(-v + u_2) + [M + (N-2)m]u_2$$

$$\text{得： } u_2 = \frac{m}{M + Nm}v + \frac{m}{M + (N-1)m}v$$

第三个球与 $(N-2)$ 个球、人、车系统作用，完毕后，设“系统”速度为 u_3 。铅球对地的速度是 $(-v + u_3)$ 。它们动量守恒方程为：

$$[M + (N-2)m]u_2 = m(-v + u_3) + [M + (N-3)m]u_3$$

$$\text{得: } u_3 = \frac{m}{M+Nm}v + \frac{m}{M+(N-1)m}v + \frac{m}{M+(N-2)m}v$$

以此类推（过程注意：先找 u_N 和 u_{N-1} 关系，再看 u_N 和 v 的关系，不要急于化简通分）……， u_N 的通式已经可以找出：

$$V_2 = u_N = \frac{m}{M+Nm}v + \frac{m}{M+(N-1)m}v + \frac{m}{M+(N-2)m}v + \cdots + \frac{m}{M+m}v$$

$$\text{即: } V_2 = \sum_{i=1}^N \frac{m}{M+im}v \quad \text{②}$$

我们再将①式改写成：

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \frac{m}{M}v \quad \text{①'}$$

不难发现，①' 式和②式都有 N 项，每项的分子都相同，但①' 式中每项的分母都比②式中的分母小，所以有： $V_1 > V_2$ 。

结论：第一过程使车子获得的速度较大。

（学生活动）思考：质量为 M 的车上，有 n 个质量均为 m 的人，它们静止在光滑的水平地面上。现在车上的人以相对车大小恒为 v 、方向水平向后的初速往车下跳。第一过程， N 个人同时跳下；第二过程， N 个人依次跳下。试问：哪一次车子获得的速度较大？

解：第二过程结论和上面的模型完全相同，第一过程结论为 $V_1 =$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m}{M+nm}v。$$

答：第二过程获得速度大。

四、反冲运动中的一个重要定式

物理情形：如图 4 所示，长度为 L 、质量为 M 的船停止在静水中（但未抛锚），船头上有一个质量为 m 的人，也是静止的。现在令人在船上开始向船尾走动，忽略水的阻力，试问：当人走到船尾时，船将会移动多远？

（学生活动）思考：人不可能匀速（或匀加速）走动？当人中途停下休息，船有速度吗？人的全程位移大小是 L 吗？本系统选船为参照，动量守恒吗？

模型分析：动量守恒展示

了已知质量情况下的速度关系，要过渡到位移关系，需要引进运动学的相关规律。根据实际情况（人必须停在船尾），人的运动不可能是匀速的，也不可能是匀加速的，运动学的规律应选择 $S = \bar{v}t$ 。为寻求时间 t ，则要抓人和船的位移约束关系。

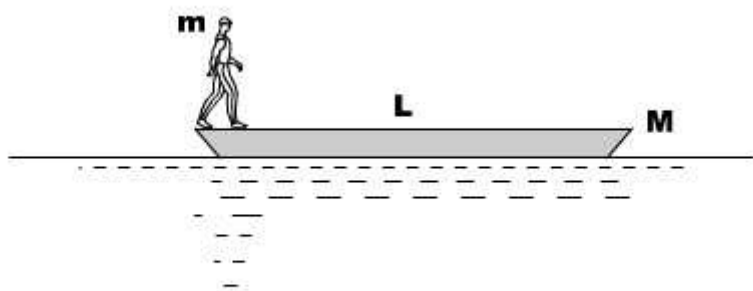


图 4

对人、船系统，针对“开始走动→中间任意时刻”过程，应用动量守恒（设末态人的速率为 v ，船的速率为 V ），令指向船头方向为正向，则矢量关系可以化为代数运算，有：

$$0 = MV + m(-v)$$

$$\text{即：} mv = MV$$

由于过程的末态是任意选取的，此式展示了人和船在任一时刻的瞬时速度大小关系。而且不难推知，对中间的任一过程，两者的平均速度也有这种关系。即：

$$m \bar{v} = M \bar{V} \quad \text{①}$$

$$\text{设全程的时间为 } t, \text{ 乘入①式两边, 得: } m\bar{v}t = M\bar{V}t$$

$$\text{设 } s \text{ 和 } S \text{ 分别为人和船的全程位移大小, 根据平均速度公式, 得: } ms = MS \quad \text{②}$$

$$\text{受船长 } L \text{ 的约束, } s \text{ 和 } S \text{ 具有关系: } s + S = L \quad \text{③}$$

$$\text{解②、③可得: 船的移动距离 } S = \frac{m}{M+m}L$$

（应用动量守恒解题时，也可以全部都用矢量关系，但这时“位移关系”表达起来难度大一些——必须用到运动合成与分解的定式。时间允许的话，可以做一个对比介绍。）

另解：质心运动定律

人、船系统水平方向没有外力，故系统质心无加速度→系统质心无位移。先求出初态系统质心（用它到船的质心的水平距离 x 表达。根据力矩平衡知识，得：

$$x = \frac{mL}{2(m+M)}$$

称的。弄清了这一点后，求解船的质心位移易如反掌。

（学生活动）思考：如图 5 所示，在无风的天空，人抓住气球下面的绳索，和气球恰能静止平衡，人和气球地质量分别为 m 和 M ，此时人离地面高 h 。现在人欲沿悬索下降到地面，试问：要人充分地安全地着地，绳索至少要多长？

解：和模型几乎完全相同，此处的绳长对应模型中的“船的长度”（“充分地安全着地”的含义是不允许人脱离绳索跳跃着地）。

$$\text{答: } \frac{m+M}{M}h$$

（学生活动）思考：如图 6 所示，两个倾角相同的斜面，互相倒扣着

放在光滑的水平地面上，小斜面在大斜面的顶端。将它

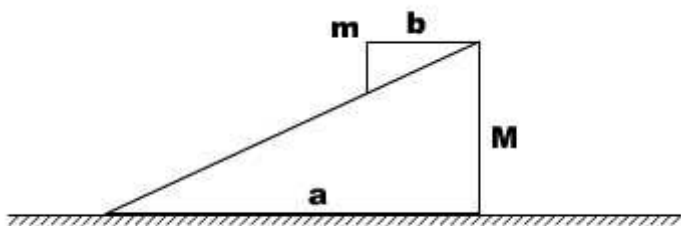


图 6

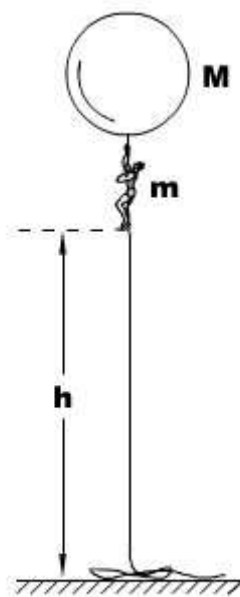


图 5

们无初速释放后，小斜面下滑，大斜面后退。已知大、小斜面的质量分别为 M 和 m ，底边长分别为 a 和 b ，试求：小斜面滑到底端时，大斜面后退的距离。

解：水平方向动量守恒。解题过程从略。

答： $\frac{m}{M+m}(a-b)$ 。

进阶应用：如图 7 所示，一个质量为 M ，半径为 R 的光滑均质半球，静置于光滑水平桌面上，在球顶有一个质量为 m 的质点，由静止开始沿球面下滑。试求：质点离开球面以前的轨迹。

解说：质点下滑，半球后退，这个物理情形和上面的双斜面问题十分相似，仔细分析，由于同样满足水平方向动量守恒，故我们介绍的“定式”是适用的。定式解决了水平位移（位置）的问题，竖直坐标则需要从数学的角度想一些办法。

为寻求轨迹方程，我们需要建立一个坐标：以半球球心 O 为原点，沿质点滑下一侧的水平轴为 x 坐标、竖直轴为 y 坐标。

由于质点相对半球总是做圆周运动的（离开球面前），有必要引入相对运动中半球球心 O' 的方位角 θ 来表达质点的瞬时位置，如图 8 所示。

由“定式”，易得：

$$x = \frac{M}{M+m} R \sin \theta \quad (1)$$

$$\text{而由图知：} y = R \cos \theta \quad (2)$$

不难看出，①、②两式实际上已经是一个轨迹的参数方程。为了明确轨迹的性质，我们可以将参数 θ 消掉，使它们成为：

$$\frac{x^2}{\left(\frac{M}{M+m}R\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

这样，特征就明显了：质点的轨迹是一个长、短半轴分别为 R 和 $\frac{M}{M+m}R$ 的椭圆。

五、功的定义式中 S 怎么取值？

在求解功的问题时，有时遇到力的作用点位移与受力物体的（质心）位移不等， S 是取力的作用点的位移，还是取物体（质心）的位移呢？我们先看下面一些事例。

1、如图 9 所示，人用双手压在台面上推讲台，结果双手前进了一段位移而讲台未移动。试问：人是否做了功？

2、在本“部分”第 3 页图 1 的模型中，求拉力做功时， S 是否可以取绳子质心的位移？

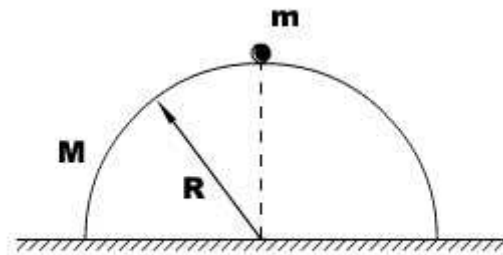


图 7

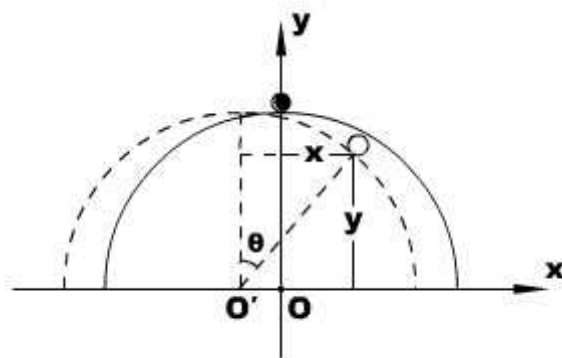


图 8



图 9

3、人登静止的楼梯，从一楼到二楼。楼梯是否做功？

4、如图 10 所示，双手用等大反向的力 F 压固定汽缸两边的活塞，活塞移动相同距离 S ，汽缸中封闭气体被压缩。施力者（人）是否做功？

在以上四个事例中， S 若取作用点位移，只有第 1、2、4 例是做功的（注意第 3 例，楼梯支持力的作用点并未移动，而只是在不停地交换作用点）， S 若取物体（受力者）质心位移，只有第 2、3 例是做功的，而且，尽管第 2 例都做了功，数字并不相同。所以，用不同的判据得出的结论出现了本质的分歧。

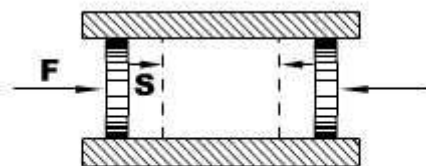


图 10

面对这些似是而非的“疑难杂症”，我们先回到“做功是物体能量转化的量度”这一根本点。

第 1 例，手和讲台面摩擦生了热，内能的生成必然是由人的生物能转化而来，人肯定做了功。 S 宜取作用点的位移；

第 2 例，求拉力的功，在前面已经阐述， S 取作用点位移为佳；

第 3 例，楼梯不需要输出任何能量，不做功， S 取作用点位移；

第 4 例，气体内能的增加必然是由人输出的，压力做功， S 取作用点位移。

但是，如果分别以上四例中的受力者用动能定理，第 1 例，人对讲台不做功， S 取物体质心位移；第 2 例，动能增量对应 S 取 $L/2$ 时的值——物体质心位移；第 4 例，气体宏观动能无增量， S 取质心位移。（第 3 例的分析暂时延后。）

以上分析在援引理论知识方面都没有错，如何使它们统一？原来，功的概念有广义和狭义之分。在力学中，功的狭义概念仅指机械能转换的量度；而在物理学中功的广义概念指除热传递外的一切能量转换的量度。所以功也可定义为能量转换的量度。一个系统总能量的变化，常以系统对外做功的多少来量度。能量可以是机械能、电能、热能、化学能等各种形式，也可以多种形式的能量同时发生转化。由此可见，上面分析中，第一个理论对应的广义的功，第二个理论对应的则是狭义的功，它们都没有错误，只是在现阶段的教材中还没有将它们及时地区分开来而已。

而且，我们不难归纳：求广义的功， S 取作用点的位移；求狭义的功， S 取物体（质心）位移。

那么我们在解题中如何处理呢？这里给大家几点建议：1、抽象地讲“某某力做的功”一般指广义的功；2、讲“力对某物体做的功”常常指狭义的功；3、动能定理中的功肯定是指狭义的功。

当然，求解功地问题时，还要注意具体问题具体分析。如上面的第 3 例，就相对复杂一些。如果认为所求为狭义的功， S 取质心位移，是做了功，但结论仍然是难以令人接受的。下面我们来这样一个处理：将复杂的形变物体（人）看成这样一个相对理想的组合：刚性物体下面连接一压缩的弹簧（如图 11 所示），人每一次蹬梯，腿伸直将躯体重心上举，等效为弹簧将刚性物体举起。这样，我们就不难发现，做功的是人的双腿而非地面，人既是输出能量（生物能）的机构，也是得到能量（机械能）的机构——这里的物理情形更象是一种生物情形。本题所求的功应理解为广义功为宜。

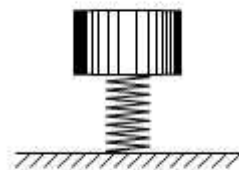


图 11

以上四例有一些共同的特点：要么，受力物体情形比较复杂（形变，不能简单地看成一个质点。如第 2、第 3、第 4 例），要么，施力者和受力者之间的能量转化不是封闭的（涉及到第三方，或机械

能以外的形式。如第 1 例)。以后，当遇到这样的问题时，需要我们慎重对待。

(学生活动) 思考：足够长的水平传送带维持匀速 v 运转。将一袋货物无初速地放上去，在货物达到速度 v 之前，与传送带的摩擦力大小为 f ，对地的位移为 S 。试问：求摩擦力的功时，是否可以用 $W = fS$ ？

解：按一般的理解，这里应指广义的功（对应传送带引擎输出的能量），所以“位移”取作用点的位移。注意，在此处有一个隐含的“交换作用点”的问题，仔细分析，不难发现，每一个（相对皮带不动的）作用点的位移为 $2S$ 。（另解：求货物动能的增加和与皮带摩擦生热的总和。）

答：否。

(学生活动) 思考：

如图 12 所示，人站在船上，通过拉一根固定在铁桩的缆绳使船靠岸。试问：缆绳是否对船和人的系统做功？

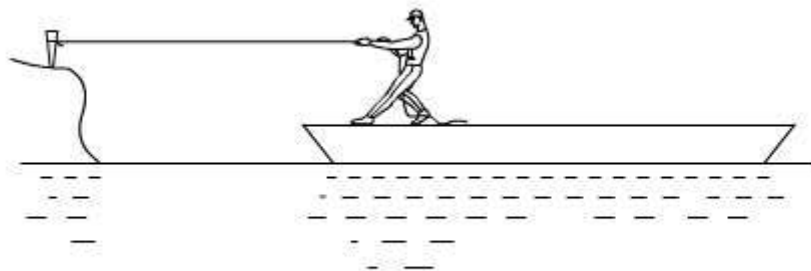


图 12

解：分析同上面的“第 3 例”。

答：否。

六、机械能守恒与运动合成（分解）的综合

物理情形：如图 13 所示，直角形的刚性杆被固定，水平和竖直部分均足够长。质量分别为 m_1 和 m_2 的 A、B 两个有孔小球，串在杆上，且被长为 L 的轻绳相连。忽略两球的大小，初态时，认为它们的位置在同一高度，且绳处于拉直状态。现无初速地将系统释放，忽略一切摩擦，试求 B 球运动 $L/2$ 时的速度 v_2 。

模型分析：A、B 系统机械能守恒。A、B 两球的瞬时速度不等，其关系可据“第三部分”知识介绍的定式（滑轮小船）去寻求。

(学生活动) A 球的机械能是否守恒？B 球的机械能是否守恒？系统机械能守恒的理由是什么（两法分析：a、“微元法”判断两个 W_T 的代数和为零；b、无非弹性碰撞，无摩擦，没有其它形式能的生成）？

由“拓展条件”可以判断，A、B 系统机械能守恒，（设末态 A 球的瞬时速率为 v_1 ）过程的方程为：

$$m_2 g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

①

在末态，绳与水平杆的瞬时夹角为 30° ，设绳子的瞬时迁移速率为 v ，根据“第三部分”知识介绍的定式，有：

$$v_1 = v / \cos 30^\circ, \quad v_2 = v / \sin 30^\circ$$

$$\text{两式合并成：} v_1 = v_2 \operatorname{tg} 30^\circ = v_2 / \sqrt{3} \quad \text{②}$$

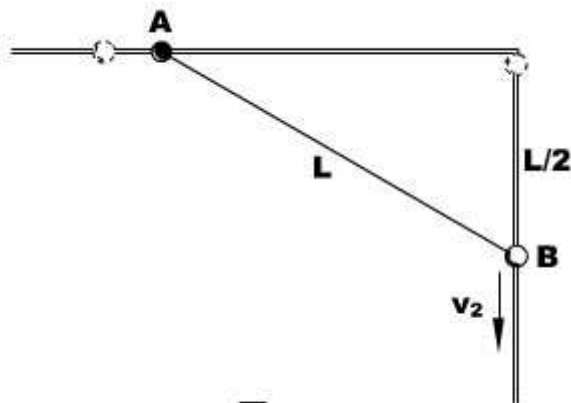


图 13

解①、②两式，得： $v_2 = \sqrt{\frac{3m_2gL}{m_1 + m_2}}$

七、动量和能量的综合（一）

物理情形：如图 14 所示，两根长度均为 L 的刚性轻杆，一端通过质量为 m 的球形铰链连接，另一端分别与质量为 m 和 $2m$ 的小球相连。将此装置的两杆合拢，铰链在上、竖直地放在水平桌面上，然后轻敲一下，使两小球向两边滑动，但两杆始终保持在竖直平面内。忽略一切摩擦，试求：两杆夹角为 90° 时，质量为 $2m$ 的小球的速度 v_2 。

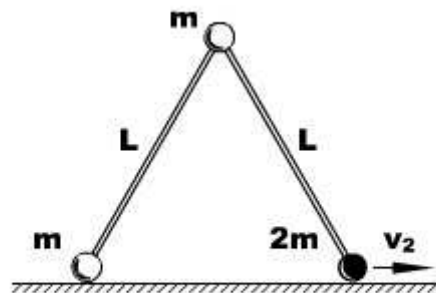


图 14

模型分析：三球系统机械能守恒、水平方向动量守恒，并注意约束关系——两杆不可伸长。

（学生活动）初步判断：左边小球和球形铰链的速度方向会怎样？

设末态（杆夹角 90° ）左边小球的速度为 v_1 （方向：水平向左），球形铰链的速度为 v （方向：和竖直方向夹 θ 角斜向左），

对题设过程，三球系统机械能守恒，有：

$$mg(L - \frac{\sqrt{2}}{2}L) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 \quad ①$$

三球系统水平方向动量守恒，有：

$$mv_1 + mv\sin\theta = 2mv_2 \quad ②$$

左边杆子不形变，有：

$$v_1\cos 45^\circ = v\cos(45^\circ - \theta) \quad ③$$

右边杆子不形变，有：

$$v\cos(45^\circ + \theta) = v_2\cos 45^\circ \quad ④$$

四个方程，解四个未知量（ v_1 、 v_2 、 v 和 θ ），是可行的。推荐解方程的步骤如下——

1、③、④两式用 v_2 替代 v_1 和 v ，代入②式，解 θ 值，得： $\text{tg}\theta = 1/4$

2、在回到③、④两式，得：

$$v_1 = \frac{5}{3}v_2, \quad v = \frac{\sqrt{17}}{3}v_2$$

3、将 v_1 、 v 的替代式代入①式解 v_2 即可。结果： $v_2 = \sqrt{\frac{3gL(2-\sqrt{2})}{20}}$

（学生活动）思考：球形铰链触地前一瞬，左球、铰链和右球的速度分别是多少？

解：由两杆不可形变，知三球的水平速度均为零， θ 为零。一个能量方程足以解题。

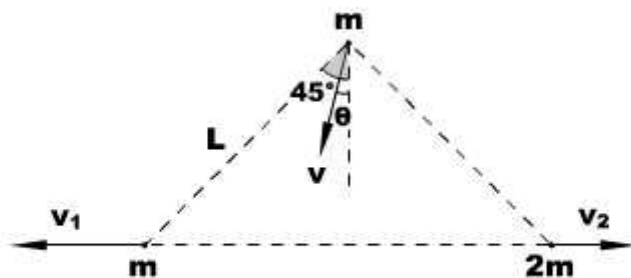


图 15

答：0、 $\sqrt{2gL}$ 、0。

（学生活动）思考：当两杆夹角为 90° 时，右边小球的位移是多少？
解：水平方向用“反冲位移定式”，或水平方向用质心运动定律。

答： $\frac{3\sqrt{2}}{8}L$ 。

进阶应用：在本讲模型“四、反冲……”的“进阶应用”（见图8）中，当质点 m 滑到方位角 θ 时（未脱离半球），质点的速度 v 的大小、方向怎样？

解说：此例综合应用运动合成、动量守恒、机械能守恒知识，数学运算比较繁复，是一道考查学生各种能力和素质的难题。

据运动的合成，有：

$$\bar{v}_{\text{点} \rightarrow \text{半球}} = \bar{v}_{\text{点} \rightarrow \text{地}} + \bar{v}_{\text{地} \rightarrow \text{半球}} = \bar{v}_{\text{点} \rightarrow \text{地}} -$$

$\bar{v}_{\text{半球} \rightarrow \text{地}}$

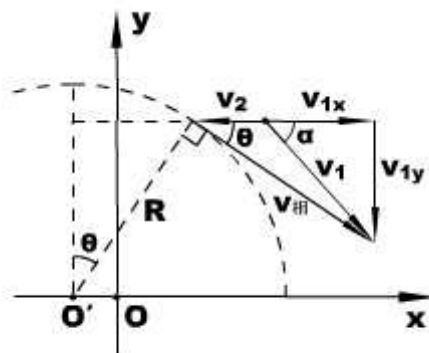


图 16

其中 $\bar{v}_{\text{半球} \rightarrow \text{地}}$ 必然是沿地面向左的，为了书写方

便，我们设其大小为 v_2 ； $\bar{v}_{\text{点} \rightarrow \text{半球}}$ 必然是沿半球瞬时位置切线方向（垂直瞬时半径）的，设大小为 $v_{\text{相}}$ 。根据矢量减法的三角形法则，可以得到 $\bar{v}_{\text{点} \rightarrow \text{地}}$ （设大小为 v_1 ）的示意图，如图 16 所示。同时，我们将 v_1 的 x 、 y 分量 v_{1x} 和 v_{1y} 也描绘在图中。

由图可得： $v_{1y} = (v_2 + v_{1x}) \text{tg} \theta$ ①

质点和半球系统水平方向动量守恒，有： $Mv_2 = mv_{1x}$ ②

对题设过程，质点和半球系统机械能守恒，有： $mgR(1-\cos \theta) = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$ ，即：

$$mgR(1-\cos \theta) = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) \quad \text{③}$$

三个方程，解三个未知量（ v_2 、 v_{1x} 、 v_{1y} ）是可行的，但数学运算繁复，推荐步骤如下——

1、由①、②式得： $v_{1x} = \frac{M}{m}v_2$ ， $v_{1y} = (\frac{m+M}{m}\text{tg} \theta)v_2$

2、代入③式解 v_2 ，得： $v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gR(1-\cos \theta)}{M^2 + Mm + (M+m)^2 \text{tg}^2 \theta}}$

3、由 $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$ 解 v_1 ，得： v_1

$$= \sqrt{\frac{2gR(1-\cos\theta)(M^2 + 2Mm\sin^2\theta + m^2\sin^2\theta)}{M^2 + Mm + m(M+m)\sin^2\theta}}$$

$$v_1 \text{ 的方向: 和水平方向成 } \alpha \text{ 角, } \alpha = \arctg \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \arctg \left(\frac{M+m}{M} \operatorname{tg}\theta \right)$$

这就是最后的解。

$$\left[\text{一个附属结果: 质点相对半球的瞬时角速度 } \omega = \frac{v_{\text{相}}}{R} = \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{2g(m+M)(1-\cos\theta)}{R(M+m\sin^2\theta)}} \right] .$$

八、动量和能量的综合（二）

物理情形：如图 17 所示，在光滑的水平面上，质量为 $M = 1 \text{ kg}$ 的平板车左端放有质量为 $m = 2 \text{ kg}$ 的铁块，铁块与车之间的摩擦因素 $\mu = 0.5$ 。开始时，车和铁块以共同速度 $v = 6 \text{ m/s}$ 向右运动，车与右边的墙壁发生正碰，且碰撞是弹性的。车身足够长，使铁块不能和墙相碰。重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$ ，试求：1、铁块相对车运动的总路程；2、平板车第一次碰墙后所走的总路程。

模型分析：本模型介绍有两对相互作用时的处理常规。能量关系介绍摩擦生热定式的应用。由于过程比较复杂，动量分析还要辅助以动力学分析，综合程度较高。

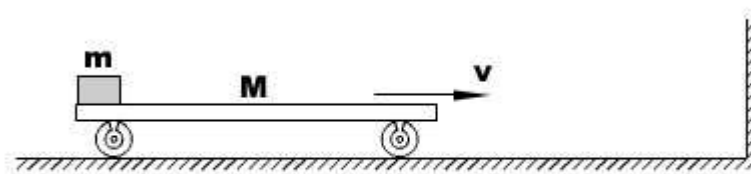


图 17

由于车与墙壁的作用时短促而激烈的，而铁块和车的作用是舒缓而柔和的，当两对作用同时发生时，通常处理成“让短时作用完毕后，长时作用才开始”（这样可以使问题简化）。在此处，车与墙壁碰撞时，可以认为铁块与车的作用尚未发生，而是在车与墙作用完了之后，才开始与铁块作用。

规定向右为正向，将矢量运算化为代数运算。

车第一次碰墙后，车速变为 $-v$ ，然后与速度仍为 v 的铁块作用，动量守恒，作用完毕后，共同速度 $v_1 = \frac{mv + M(-v)}{m + M} = \frac{v}{3}$ ，因方向为正，必朝墙运动。

（学生活动）车会不会达共同速度之前碰墙？动力学分析：车离墙的最大位移 $S = \frac{v^2}{2a}$ ，反向加速的位移 $S' = \frac{v_1^2}{2a_1}$ ，其中 $a = a_1 = \frac{\mu mg}{M}$ ，故 $S' < S$ ，所

以，车碰墙之前，必然已和铁块达到共同速度 v_1 。

车第二次碰墙后，车速变为 $-v_1$ ，然后与速度仍为 v_1 的铁块作用，动量守恒，

作用完毕后，共同速度 $v_2 = \frac{mv_1 + M(-v_1)}{m + M} = \frac{v_1}{3} = \frac{v}{3^2}$ ，因方向为正，必朝墙运动。

车第三次碰墙，……共同速度 $v_3 = \frac{v_2}{3} = \frac{v}{3^3}$ ，朝墙运动。

……

以此类推，我们可以概括铁块和车的运动情况——

铁块：匀减速向右→匀速向右→匀减速向右→匀速向右……

平板车：匀减速向左→匀加速向右→匀速向右→匀减速向左→匀加速向右→匀速向右……

显然，只要车和铁块还有共同速度，它们总是要碰墙，所以最后的稳定状态是：它们一起停在墙角（总的末动能为零）。

1、全程能量关系：对铁块和车系统， $-\Delta E_k = \Delta E_{内}$ ，且， $\Delta E_{内} = f_{滑} S_{相}$ ，

$$\text{即：} \frac{1}{2} (m + M) v^2 = \mu mg \cdot S_{相}$$

代入数字得： $S_{相} = 5.4 \text{ m}$

2、平板车向右运动时比较复杂，只要去每次向左运动的路程的两倍即可。而向左是匀减速的，故

$$\text{第一次：} S_1 = \frac{v^2}{2a}$$

$$\text{第二次：} S_2 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{1}{2a} \frac{v^2}{3^2}$$

$$\text{第三次：} S_3 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{1}{2a} \frac{v^2}{3^4}$$

……

n 次碰墙的总路程是：

$$\begin{aligned} \Sigma S &= 2 (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) = \frac{v^2}{a} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2(n-1)}} \right) \\ &= \frac{v^2}{\frac{\mu mg}{M}} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2(n-1)}} \right) \end{aligned}$$

碰墙次数 $n \rightarrow \infty$ ，代入其它数字，得： $\Sigma S = 4.05 \text{ m}$

（学生活动）质量为 M 、长度为 L 的木板固定在光滑水平面上，另一个质量为 m 的滑块以水平初速 v_0 冲上木板，恰好能从木板的另一端滑下。现解除木板的固定（但无初速），让相同的滑块再次冲上木板，要求它仍能从另一端滑下，其初速度应为多少？

解：由第一过程，得滑动摩擦力 $f = \frac{mv_0^2}{2L}$ 。

第二过程应综合动量和能量关系（“恰滑下”的临界是：滑块达木板的另一端，和木板具有共同速度，设为 v ），设新的初速度为 v'_0

$$mv'_0 = (m + M)v$$

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 - \frac{1}{2}(m + M)v^2 = fL$$

解以上三式即可。

$$\text{答： } v'_0 = \sqrt{\frac{m+M}{M}} v_0。$$

第三讲 典型例题解析

教材范本：龚霞玲主编《奥林匹克物理思维训练教材》，知识出版社，2002年8月第一版。

例题选讲针对“教材”第七、第八章的部分例题和习题。

第六部分 振动和波

第一讲 基本知识介绍

《振动和波》的竞赛考纲和高考要求有很大的不同，必须做一些相对详细的补充。

一、简谐运动

1、简谐运动定义： $\sum \vec{F} = -k\vec{x}$ ①

凡是所受合力和位移满足①式的质点，均可称之为谐振子，如弹簧振子、小角度单摆等。

谐振子的加速度： $\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$

2、简谐运动的方程

回避高等数学工具，我们可以将简谐运动看成匀速圆周运动在某一条直线上的投影运动（以下均看在 x 方向的投影），圆周运动的半径即为简谐运动的振幅

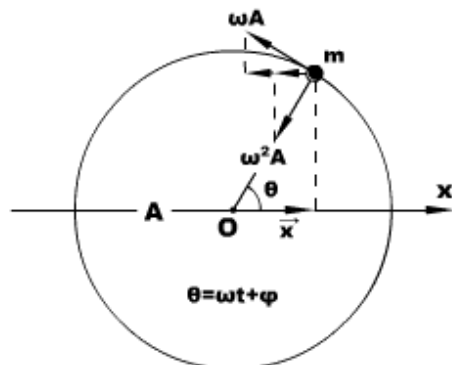


图 1

A。

依据: $\sum \bar{F}_x = -m\omega^2 A \cos \theta = -m\omega^2 \bar{x}$ 对于一个给定的匀速圆周运动, m 、 ω 是恒定不变的, 可以令:

$$m\omega^2 = k$$

这样, 以上两式就符合了简谐运动的定义式①。所以, x 方向的位移、速度、加速度就是简谐运动的相关规律。从图 1 不难得出——

$$\text{② 位移方程: } \bar{x} = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{③ 速度方程: } \bar{v} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{④ 加速度方程: } \bar{a} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

相关名词: $(\omega t + \phi)$ 称相位, ϕ 称初相。运动学参量的相互关系: $\bar{a} = -\omega^2 \bar{x}$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{tg } \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

3、简谐运动的合成

a、同方向、同频率振动合成。两个振动 $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ 和 $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ 合成, 可令合振动 $x = A \cos(\omega t + \phi)$, 由于 $x = x_1 + x_2$, 解得

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \quad \phi = \text{arctg} \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

显然, 当 $\phi_2 - \phi_1 = 2k\pi$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 合振幅 A 最大, 当 $\phi_2 - \phi_1 = (2k + 1)\pi$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 合振幅最小。b、方向垂直、同频率振动合成。当质点同时参与两个垂直的振动 $x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ 和 $y = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ 时, 这两个振动方程事实上已经构成了质点在二维空间运动的轨迹参数方程, 消去参数 t 后, 得一般形式的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)$$

显然, 当 $\phi_2 - \phi_1 = 2k\pi$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 有 $y = \frac{A_2}{A_1} x$, 轨迹

为直线, 合运动仍为简谐运动;

当 $\phi_2 - \phi_1 = (2k + 1)\pi$ 时 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 有 $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$,

轨迹为椭圆, 合运动不再是简谐运动;

当 $\phi_2 - \phi_1$ 取其它值, 轨迹将更为复杂, 称“李萨如图形”, 不是简谐运动。c、同方向、同振幅、频率相近的振动合成。令 $x_1 = A \cos(\omega_1 t + \phi)$ 和 $x_2 = A \cos(\omega_2 t + \phi)$, 由于合运动 $x = x_1 + x_2$, 得: $x = (2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \cos$

$(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \phi)$ 。合运动是振动，但不是简谐运动，称为角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的“拍”现象。

4、简谐运动的周期

由②式得： $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，而圆周运动的角速度和简谐运动的角频率是一致的，所以

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

⑤

5、简谐运动的能量

一个做简谐运动的振子的能量由动能和势能构成，即

$$\sum E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

注意：振子的势能是由（回复力系数） k 和（相对平衡位置位移） x 决定的一个抽象的概念，而不是具体地指重力势能或弹性势能。当我们计量了振子的抽象势能后，其它的具体势能不能再做重复计量。

6、阻尼振动、受迫振动和共振

和高考要求基本相同。

二、机械波

1、波的产生和传播

产生的过程和条件；传播的性质，相关参量（决定参量的物理因素）

2、机械波的描述

a、波动图象。和振动图象的联系

b、波动方程

如果一列简谐波沿 x 方向传播，振源的振动方程为 $y = A\cos(\omega t + \phi)$ ，波的传播速度为 v ，那么在离振源 x 处一个振动质点的振动方程便是

$$y = A\cos\left[\omega t + \phi - \frac{x}{\lambda} \cdot 2\pi\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]$$

这个方程展示的是一个复变函数。对任意一个时刻 t ，都有一个 $y(x)$ 的正弦函数，在 $x-y$ 坐标下可以描绘出一个瞬时波形。所以，称 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right]$ 为波动方程。

3、波的干涉

a、波的叠加。几列波在同一介质传播时，能独立的维持它们的各自形态传播，在相遇的区域则遵从矢量叠加（包括位移、速度和加速度的叠加）。

b、波的干涉。两列波频率相同、相位差恒定时，在同一介质中的叠加将形成一种特殊形态：振动加强的区域和振动削弱的区域稳定分布且彼此隔开。

我们可以用波程差的方法来讨论干涉的定量规律。如图 2 所示，我们用 S_1 和 S_2 表示两个波源， P 表示空间任意一点。

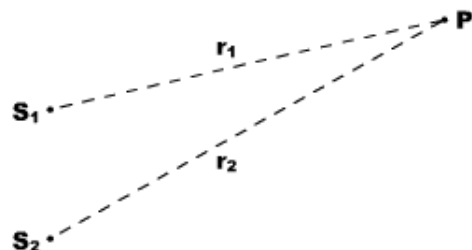


图 2

当振源的振动方向相同时，令振源 S_1 的振动方程为 $y_1 = A_1 \cos \omega t$ ，振源 S_2 的振动方程为 $y_2 = A_2 \cos \omega t$ ，则在空间 P 点（距 S_1 为 r_1 ，距 S_2 为 r_2 ），两振源引起的分振动分别是

$$y_1' = A_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) \right]$$

$$y_2' = A_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right) \right]$$

P 点便出现两个频率相同、初相不同的振动叠加问题（ $\phi_1 = \frac{\omega r_1}{v}$ ， $\phi_2 = \frac{\omega r_2}{v}$ ），且初相差 $\Delta \phi = \frac{\omega}{v} (r_2 - r_1)$ 。根据前面已经做过的讨论，有

$r_2 - r_1 = k\lambda$ 时（ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ），P 点振动加强，振幅为 $A_1 + A_2$ ；

$r_2 - r_1 = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}$ 时（ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ），P 点振动削弱，振幅为 $|A_1 - A_2|$ 。

4、波的反射、折射和衍射

知识点和高考要求相同。

5、多普勒效应

当波源或者接受者相对与波的传播介质运动时，接收者会发现波的频率发生变化。多普勒效应的定量讨论可以分为以下三种情况（在讨论中注意：波源的发波频率 f 和波相对介质的传播速度 v 是恒定不变的）——

a、只有接收者相对介质运动（如图 3 所示）

设接收者以速度 v_1 正对静止的波源运动。

如果接收者静止在 A 点，他单位时间接收的波的个数为 f ，

当他迎着波源运动时，设其在单位时间到达 B 点，

则 $\overline{AB} = v_1$ ，

在从 A 运动到 B 的过程中，接收者事实上“提前”多接收到了 n 个波

$$n = \frac{\overline{AB}}{\lambda} = \frac{v_1}{v/f} = \frac{v_1 f}{v}$$

显然，在单位时间内，接收者接收到的总的波的数目为： $f + n = \frac{v+v_1}{v} f$ ，这就是接收者发现的频率 f_1 。即

$$f_1 = \frac{v+v_1}{v} f$$

显然，如果 v_1 背离波源运动，只要将上式中的 v_1 代入负值即可。如果 v_1 的方向不是正对 S，只要将 v_1 出正对的分量即可。

b、只有波源相对介质运动（如图 4 所示）

设波源以速度 v_2 正对静止的接收者运动。

如果波源 S 不动，在单位时间内，接收者在 A 点应接收 f 个波，故 S 到 A 的距离： $\overline{SA} = f\lambda$

在单位时间内，S 运动至 S' ，即 $\overline{SS'} = v_2$ 。由于波

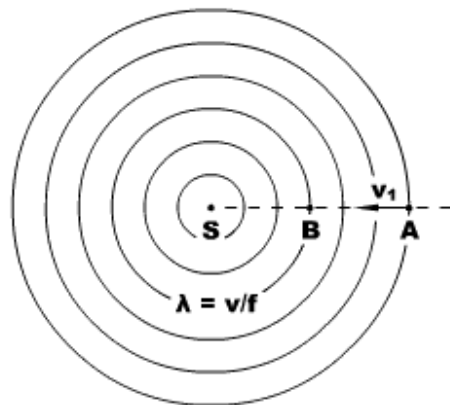


图 3

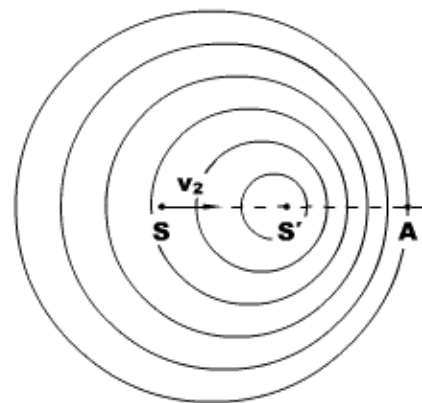


图 4

源的运动，事实造成了 S 到 A 的 f 个波被压缩在了 S' 到 A 的空间里，波长将变短，新的波长

$$\lambda' = \frac{S'A}{f} = \frac{SA - SS'}{f} = \frac{f\lambda - v_2}{f} = \frac{v - v_2}{f}$$

而每个波在介质中的传播速度仍为 v ，故“被压缩”的波（A 接收到的波）的频率变为

$$f_2 = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_2} f$$

当 v_2 背离接收者，或有一定夹角的讨论，类似 a 情形。

c、当接收者和波源均相对传播介质运动

当接收者正对波源以速度 v_1 （相对介质速度）运动，波源也正对接收者以速度 v_2 （相对介质速度）运动，我们的讨论可以在 b 情形的过程上延续…

$$f_3 = \frac{v + v_1}{v} f_2 = \frac{v + v_1}{v - v_2} f$$

关于速度方向改变的问题，讨论类似 a 情形。

6、声波

a、乐音和噪音

b、声音的三要素：音调、响度和音品

c、声音的共鸣

第二讲 重要模型与专题

一、简谐运动的证明与周期计算

物理情形：如图 5 所示，将一粗细均匀、两边开口的 U 型管固定，其中装有一定量的水银，汞柱总长为 L 。当水银受到一个初始的扰动后，开始在管中振动。忽略管壁对汞的阻力，试证明汞柱做简谐运动，并求其周期。

模型分析：对简谐运动的证明，只要以汞柱为对象，看它的回复力与位移关系是否满足定义式①，值得注意的是，回复力 $\Sigma \bar{F}$ 系指振动方向上的合力（而非整体合力）。当简谐运动被证明后，回复力系数 k 就有了，求周期就是顺理成章的事。

本题中，可设汞柱两端偏离平衡位置的瞬时位移为 x 、水银密度为 ρ 、U 型管横截面积为 S ，则次瞬时的回复力

$$\Sigma F = \rho g 2xS = \frac{2mg}{L} x$$

由于 L 、 m 为固定值，可令： $\frac{2mg}{L} = k$ ，而且 ΣF 与 x 的方向相反，故汞柱做简谐运动。

$$\text{周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

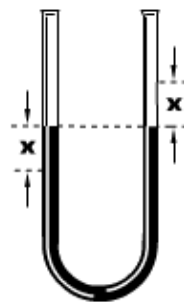


图 5

答：汞柱的周期为 $2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ 。

学生活动：如图 6 所示，两个相同的柱形滚轮平行、等高、水平放置，绕各自的轴线等角速、反方向地转动，在滚轮上覆盖一块均质的木板。已知两滚轮轴线的距离为 L 、滚轮与木板之间的动摩擦因素为 μ 、木板的质量为 m ，且木板放置时，重心不在两滚轮的正中央。试证明木板做简谐运动，并求木板运动的周期。

思路提示：找平衡位置（木板重心在两滚轮中央处）
 → 力矩平衡和 $\Sigma F_0 = 0$ 结合求两处弹力
 → 求摩擦力合力…

答案：木板运动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}$ 。

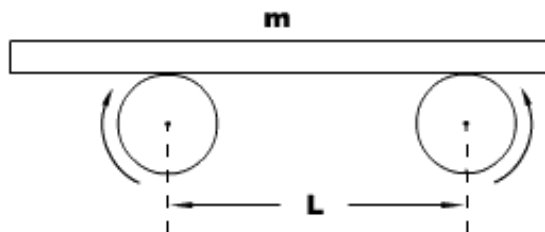


图 6

巩固应用：如图 7 所示，三根长度均为 $L = 2.00\text{m}$ 的质量均匀直杆，构成一正三角形框架 ABC，C 点悬挂在一光滑水平轴上，整个框架可绕转轴转动。杆 AB 是一导轨，一电动松鼠可在导轨上运动。现观察到松鼠正在导轨上运动，而框架却静止不动，试讨论松鼠的运动是一种什么样的运动。

解说：由于框架静止不动，松鼠在竖直方向必平衡，即：松鼠所受框架支持力等于松鼠重力。设松鼠的质量为 m ，即：

$$N = mg \quad (1)$$

再回到框架，其静止平衡必满足框架所受合力矩为零。以 C 点为转轴，形成力矩的只有松鼠的压力 N 和松鼠可能加速的静摩擦力 f ，它们合力矩为零，即：

$$M_N = M_f$$

现考查松鼠在框架上的某个一般位置（如图 7，设它在导轨方向上距 C 点为 x ），上式即成：

$$N \cdot x = f \cdot L \sin 60^\circ \quad (2)$$

解①②两式可得： $f = \frac{2mg}{\sqrt{3}L}x$ ，且 f 的方向水平

向左。

根据牛顿第三定律，这个力就是松鼠在导轨方向上的合力。如果我们以 C 在导轨上的投影点为参考点， x 就是松鼠的瞬时位移。再考虑到合力与位移的方向因素，松鼠的合力与位移满足关系——

$$\Sigma \bar{F} = -k\bar{x}$$

其中 $k = \frac{2mg}{\sqrt{3}L}$ ，对于这个系统而言， k 是固定不变的。

显然这就是简谐运动的定义式。

答案：松鼠做简谐运动。

评说：这是第十三届物理奥赛预赛试题，问法比较模糊。如果理解为定性求

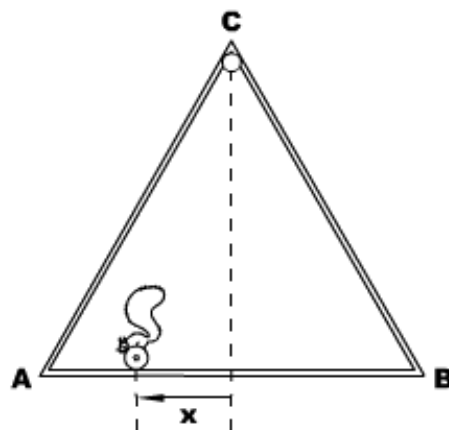


图 7

解，以上答案已经足够。但考虑到原题中还是有定量的条件，所以做进一步的定量运算也是有必要的。譬如，我们可以求出松鼠的运动周期为： $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2$

$$\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}L}{2g}} = 2.64s。$$

二、典型的简谐运动

1、弹簧振子

物理情形：如图 8 所示，用弹性系数为 k 的轻质弹簧连着一个质量为 m 的小球，置于倾角为 θ 的光滑斜面上。证明：小球在弹簧方向的振动为简谐运动，并求其周期 T 。

学生自己证明……。周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

模型分析：这个结论表明，弹簧振子完全可以突破放置的方向而伸展为一个广义的概念，且伸展后不会改变运动的实质。其次，我们还可以这样拓展：把上面的下滑力换成任何一个恒力（如电场力），它的运动性质仍然不会改变。

当然，这里的运动性质不变并不是所有运动参量均不改变。譬如，振子的平衡位置、振动方程还是会改变的。下面我们看另一类型的拓展——

物理情形：如图 9 所示，两根相同的弹性系数分别为 k_1 和 k_2 的轻质弹簧，连接一个质量为 m 的滑块，可以在光滑的水平面上滑动。试求这个系统的振动周期 T 。

解说：这里涉及的是弹簧的串、并联知识综合。根据弹性系数的定义，不难推导出几个弹性系数分别为 k_1 、 k_2 、……、 k_n 的弹簧串、并联后的弹性系数定式（设新弹簧系统的弹性系数为 k ）——

$$\text{串联：} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

$$\text{并联：} k = \sum_{i=1}^n k_i$$

在图 9 所示的情形中，同学们不难得出： $T = 2\pi$

$$\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

当情形变成图 10 时，会不会和图 9 一样呢？详细分析形变量和受力的关系，我们会发现，事实上，这时已经变成了弹簧的并联。

$$\text{答案：} T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}。$$

思考：如果两个弹簧通过一个动滑轮（不计质量）再与质量为 m 的钩码相连，如图 11 所示，钩码在竖直方向上的振动周期又是多少？

解：这是一个极容易出错的变换——因为图形的外表形状很象“并联”。但经过仔细分析后，会发现，动滑轮在这个物理情形中起到了重要的作用

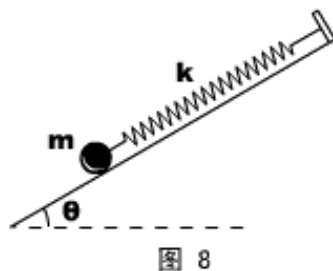


图 8

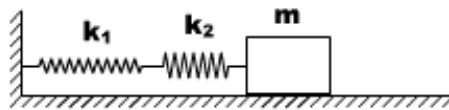


图 9

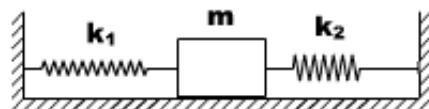


图 10

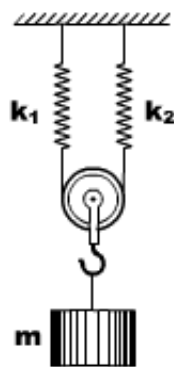


图 11

——致使这个变换的结果既不是串联、也不是并联。

★而且，我们前面已经证明过，重力的存在并不会改变弹簧振子的振动方程，所以为了方便起见，这里（包括后面一个“在思考”题）的受力分析没有考虑重力。

具体分析如下：

设右边弹簧的形变量为 x_2 、滑轮（相对弹簧自由长度时）的位移为 x 、钩子上的拉力为 F ，则

$$k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$F = 2 k_2 x_2$$

解以上三式，得到： $F = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$ ，也就是说，弹簧系统新的弹性系数 $k =$

$$\frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}。$$

$$\text{答：} T = \pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}。$$

再思考：如果两弹簧和钩码通过轻杆和转轴，连成了图 12 所示的系统，已知 k_1 、 k_2 、 m 、 a 、 b ，再求钩码的振动周期 T 。

思路提示：探讨钩码位移和回复力关系，和“思考”题类似。

（过程备考：设右弹簧伸长 x_2 ，则中间弹簧伸长 $x_1 = \frac{bk_2}{ak_1} x_2$

$$\text{钩码的位移量 } x = x_1 + \frac{a}{b} x_2$$

$$\text{而钩码的回复力 } F = k_1 x_1$$

$$\text{结合以上三式解回复力系数 } k = \frac{F}{x} = \frac{b^2 k_1 k_2}{a^2 k_1 + b^2 k_2}，\text{所}$$

以…)

$$\text{答：} T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 k_1 + b^2 k_2}{b^2 k_1 k_2} m}。$$

2、单摆

单摆分析的基本点，在于探讨其回复力随位移的变化规律。相对原始模型的伸展，一是关于摆长的变化，二是关于“视重加速度”的变化，以及在具体情形中的处理。至于复杂的摆动情形研究，往往会超出这种基本的变形，而仅仅是在分析方法上做适当借鉴。

物理情形 1：如图 13 所示，在一辆静止的小车内用长为 L 的轻绳静止悬挂着一个小钢球，当小车突然获得水平方向的大小为 a 的加速度后 ($a < g$)，试描述小球相对小车的运动。

模型分析：小钢球相对车向 a 的反方向摆起，摆至绳

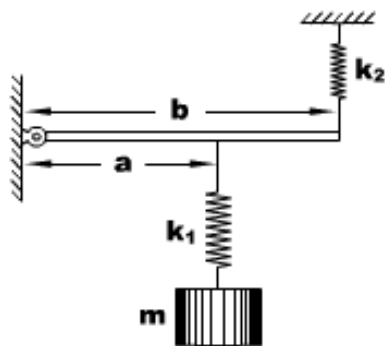


图 12

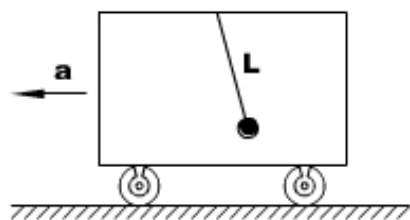


图 13

与竖直方向夹角 $\theta = \arctg \frac{a}{g}$ 时，达到最大速度，此位置即是小球相对车“单摆”的平衡位置。以车为参照，小球受到的场力除了重力 G 外，还有一惯性力 F 。所以，此时小球在车中相当于处在一个方向倾斜 θ 、大小变为 $\sqrt{G^2 + F^2}$ 的新“重力”的作用，属超重情况。这是一种“视重加速度”增加的情形。

解说：由于摆长 L 未变，而 $g_{\text{视}} = \sqrt{g^2 + a^2}$ ，如果 a 很小，致使最大摆角不超过 5° 的话，小角度单摆可以视为简谐运动，周期也可以求出来。

答案：小球以绳偏离竖直方向 $\theta = \arctg \frac{a}{g}$ 的角度为平衡位置做最大摆角为 θ 的单摆运动，如果 $\theta \leq 5^\circ$

，则小球的摆动周期为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$

物理情形 2：某秋千两边绳子不等长，且悬点不等高，相关数据如图 14 所示，且有 $a^2 + b^2 = L_1^2 + L_2^2$ ，

试求它的周期（认为人的体积足够小）。

模型分析：用 C 球替代人，它实际上是在绕 AB 轴摆动，类似将单摆放置在光滑斜面上的情形。故视重加速度 $g_{\text{视}} = g \cos \theta = g \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ，

等效摆长 $l = \overline{CD}$ ，如图 15 所示。

由于 $a^2 + b^2 = L_1^2 + L_2^2$ 可知， $AC \perp CB$ ，因此不难求出

$\overline{CD} = \frac{L_1 L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}$ ，最后应用单摆周期公式即可。

答案： $T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{ag}}$ 。

相关变换 1：如图 16 所示，质量为 M 的车厢中用长为 L 的细绳悬挂着一个质量为 m 的小球，车轮与水平地面间的摩擦不计，试求这个系统做微小振动的周期。

分析：我们知道，证明小角度单摆作简谐运动用到了近似处理。在本题，也必须充分理解“小角度”的含义，大胆地应用近似处理方法。

解法一：以车为参照，小球将相对一个非惯性系作单摆运动，在一般方位角 θ 的受力如图 17 所示，其中惯性力 $F = ma$ ，且 a 为车子的加速度。由于球在垂直 T 方向振动，故回复力

$$F_{\text{回}} = G \sin \theta + F \cos \theta = mg \sin \theta + ma \cos \theta \quad ①$$

*由于球作“微小”摆动，其圆周运动效应可以忽略，故有

$$T + F \sin \theta \approx mg \cos \theta \quad ②$$

$$\text{再隔离车，有 } T \sin \theta = Ma \quad ③$$

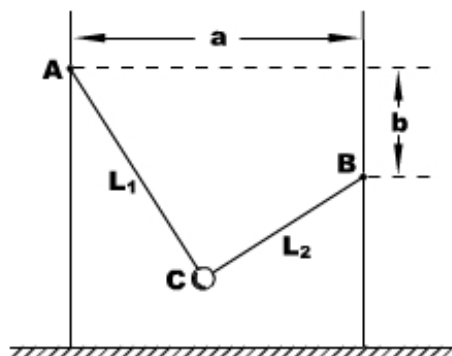


图 14

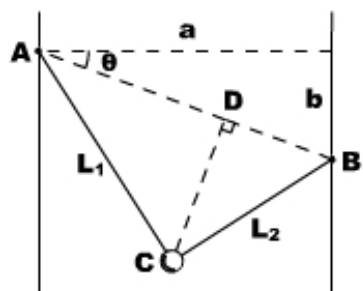


图 15

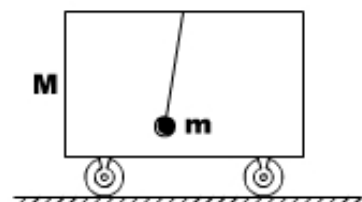


图 16

解①②③式得 $F_{\square} = \frac{m(m+M)g \sin \theta}{M+m \sin^2 \theta}$

*再由于球作“微小”摆动， $\sin^2 \theta \rightarrow 0$ ，所以 $F_{\square} = \frac{m(m+M)g \sin \theta}{M}$ ④

令摆球的振动位移为 x ，常规处理 $\sin \theta \approx \frac{x}{L}$

⑤

解④⑤即得 $F_{\square} = \frac{m(m+M)g}{ML} x$

显然， $\frac{m(m+M)g}{ML} = k$ 是恒定的，所以小球作简谐运动。最后求周期用公式

即可。

解法二：由于车和球的系统不受合外力，故系统质心无加速度。小球可以看成是绕此质心作单摆运动，而新摆长 L' 会小于 L 。由于质心是惯性参照系，故小球的受力、回复力的合成就很常规了。

若绳子在车内的悬挂点在正中央，则质心在水平方向上应与小球相距 $x = \frac{M}{m+M} L \sin \theta$ ，不难理解，“新摆长” $L' = \frac{M}{m+M} L$ 。（从严谨的意义上讲，这个“摆长”并不固定：随着车往“平衡位置”靠近，它会加长。所以，这里的等效摆长得出来和解法一的忽略圆周运动效应事实上都是一种相对“模糊”的处理。如果非要做精准的运算，不启用高等数学工具恐怕不行。）

答： $T = 2\pi \sqrt{\frac{ML}{(M+m)g}}$ 。

相关变换 2：如图 18 所示，有一个均质的细圆环，借助一些质量不计的辐条，将一个与环等质量的小球固定于环心处，然后用三根竖直的、长度均为 L 且不可伸长的轻绳将这个物体悬挂在天花板上，环上三个结点之间的距离相等。试求这个物体在水平方向做微小扭动的周期。

分析：此题的分析角度大变。象分析其它物理问题一样，分析振动也有动力学途径和能量两种途径，此处若援用动力学途径寻求回复力系数 k 有相当的难度，因此启用能量分析。

本题的任务不在简谐运动的证明，而是可以直接应用简谐运动的相关结论。根据前面的介绍，任何简谐运动的总能都可以表达为

$E = \frac{1}{2} kA^2$ ①

而我们对过程进行具体分析时，令最大摆角为 θ （为了便于寻求参量，这里把摆角夸大了）、环和球的质量均为 m ，发现最大的势能（即总能）可以表达为（参见图 19）

$E = 2m \cdot gL(1 - \cos \theta)$ ②

且振幅 A 可以表达为

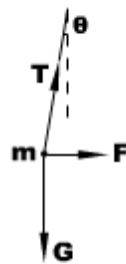


图 17

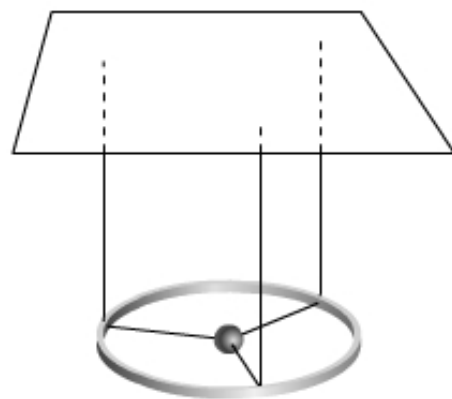


图 18

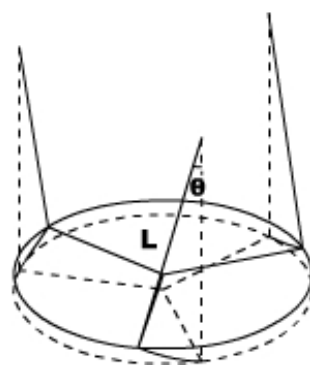


图 19

$$A = 2L \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{③}$$

解①②③式易得： $k = \frac{2mg}{L}$

最后求周期时应注意，中间的球体未参与振动，故不能纳入振子质量（振子质量只有 m ）。

答： $T = \pi \sqrt{\frac{2L}{g}}$ 。

三、振动的合成

物理情形：如图 20 所示，一个手电筒和一个屏幕的质量均为 m ，都被弹性系数为 k 的弹簧悬挂着。平衡时手电筒的光斑恰好照在屏幕的正中央 O 点。现在令手电筒和屏幕都在竖直方向上振动（无水平晃动或扭动），振动方程分别为 $y_1 = A \cos(\omega t + \phi_1)$ ， $y_2 = A \cos(\omega t + \phi_2)$ 。试问：两者初位相满足什么条件时，可以形成这样的效果：（1）光斑相对屏幕静止不动；（2）光斑相对屏幕作振幅为 $2A$ 的振动。

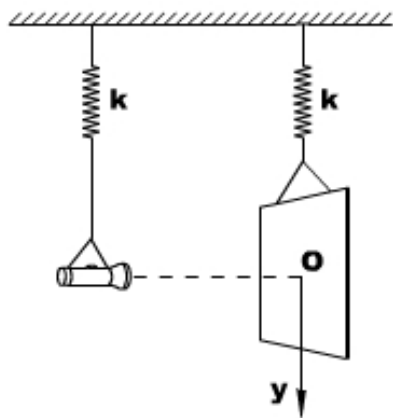


图 20

模型分析：振动的叠加包括振动的相加和相减。这里考查光斑相对屏幕的运动实际上是寻求手电筒相对屏幕的振动，服从振动的减法。设相对振动为 y ，有

$$\begin{aligned} y &= y_1 - y_2 = A \cos(\omega t + \phi_1) - A \cos(\omega t + \phi_2) \\ &= -2A \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \end{aligned}$$

解说：（1）光斑相对屏幕静止不动，即 $y = 0$ ，得 $\phi_1 = \phi_2$

（2）要振幅为 $2A$ ，必须 $\left| \sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right| = 1$ ，得 $\phi_1 - \phi_2 = \pm \pi$

答案：初位相相同；初位相相反。

相关变换：一质点同时参与两个垂直的简谐运动，其表达式分别为 $x = 2 \cos(2\omega t + 2\phi)$ ， $y = \sin \omega t$ 。（1）设 $\phi = \frac{\pi}{2}$ ，求质点的轨迹方程，并在 xOy 平面绘出其曲线；（2）设 $\phi = \pi$ ，轨迹曲线又怎样？

解：两个振动方程事实已经构成了质点轨迹的参数方程，我们所要做的，只不过是消掉参数，并寻求在两个具体 ϕ 值下的特解。在实际操作时，将这两项工作的次序颠倒会方便一些。

（1）当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时， $x = -2(1 - 2 \sin^2 \omega t)$ ，即 $x = 4y^2 - 2$

描图时应注意，振动的物理意义体现在：函数的定义域 $-1 \leq y \leq 1$ （事实上已经决定了值域 $-2 \leq x \leq 2$ ）

（2）当 $\phi = \pi$ 时，同理 $x = 2(1 - 2 \sin^2 \omega t) = 2 - 4y^2$

答：轨迹方程分别为 $x = 4y^2 - 2$ 和 $x = 2 - 4y^2$ ，曲线分别如图 21 的（a）（b）所示——

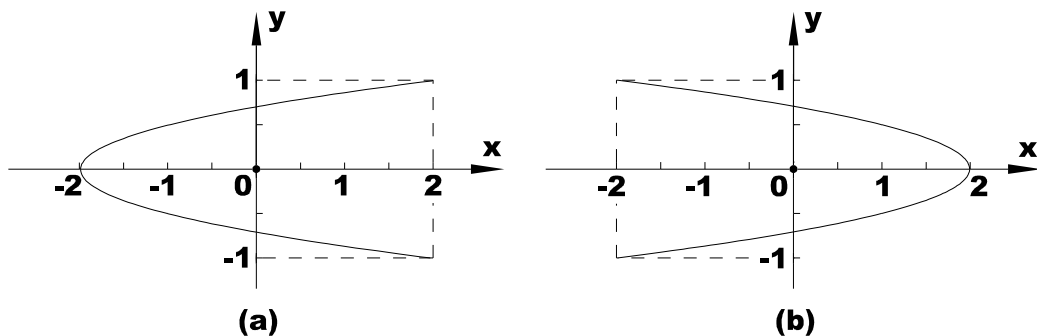


图 21

四、简谐波的基本计算

物理情形：一平面简谐波向 $-x$ 方向传播，振幅 $A = 6\text{cm}$ ，圆频率 $\omega = 6\pi \text{ rad/s}$ ，当 $t = 2.0\text{s}$ 时，距原点 O 为 12cm 处的 P 点的振动状态为 $y_P = 3\text{cm}$ ，且 $v_P > 0$ ，而距原点 22cm 处的 Q 点的振动状态为 $y_Q = 0$ ，且 $v_Q < 0$ 。设波长 $\lambda > 10\text{cm}$ ，求振动方程，并画出 $t = 0$ 时的波形图。

解说：这是一个对波动方程进行了解的基本训练题。简谐波方程的一般形式已经总结得出，在知道 A 、 ω 的前提下，加上本题给出的两个特解，应该足以解出 v 和 ϕ 值。

$$\text{由一般的波动方程 } y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi \right]$$

（★说明：如果我们狭义地理解为波源就在坐标原点的话，题目给出特解是不存在的——因为波向 $-x$ 方向传播——所以，此处的波源不在原点。同学们自己理解：由于初相 ϕ 的任意性，上面的波动方程对波源不在原点的情形也是适用的。）

参照简谐运动的位移方程和速度方程的关系，可以得出上面波动方程所对应质点的速度（复变函数）

$$v = -\omega A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi \right]$$

代 $t = 2.0\text{s}$ 时 P 的特解，有——

$$y_P = 6 \cos \left[6\pi \left(2 - \frac{12}{v} \right) + \phi \right] = 3, \quad v_P = -36\pi \sin \left[6\pi \left(2 - \frac{12}{v} \right) + \phi \right] > 0$$

$$\text{即 } 6\pi \left(2 - \frac{12}{v} \right) + \phi = 2k_1\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{①}$$

代 $t = 2.0\text{s}$ 时 Q 的特解，有——

$$y_Q = 6 \cos \left[6\pi \left(2 - \frac{22}{v} \right) + \phi \right] = 0, \quad v_Q = -36\pi \sin \left[6\pi \left(2 - \frac{22}{v} \right) + \phi \right] < 0$$

$$\text{即 } 6\pi \left(2 - \frac{22}{v} \right) + \phi = 2k_2\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{②}$$

又由于 $\overline{AB} = 22 - 12 = 10 < \lambda$ ，故 $k_1 = k_2$ 。解①②两式易得

$$v = -72\text{cm/s}, \quad \phi = \frac{2\pi}{3} \text{ (或 } -\frac{4\pi}{3} \text{)}$$

所以波动方程为： $y = 6\cos \left[6\pi \left(t + \frac{x}{72} \right) + \frac{2\pi}{3} \right]$ ，且波长 $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = 24\text{cm}$ 。

当 $t = 0$ 时，

$$y = 6\cos \left(\frac{\pi}{12}x + \frac{2\pi}{3} \right)$$
，可

以描出 $y-x$ 图象为——

答案：波动方程为 $y = 6\cos \left[6\pi \left(t + \frac{x}{72} \right) + \frac{2\pi}{3} \right]$ ， $t = 0$

时的波形图如图 22 所示。

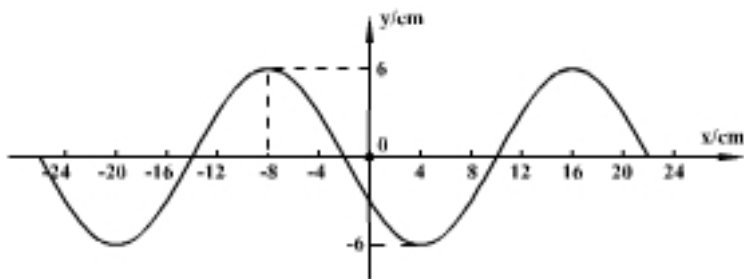


图 22

相关变换：同一媒质中有甲、乙两列平面简谐波，波源作同频率、同方向、同振幅的振动。两波相向传播，波长为 8m ，波传播方向上 A、B 两点相距 20m ，甲波在 A 处为波峰时，乙波在 B 处位相为 $-\frac{\pi}{2}$ ，求 AB 连线上因干涉而静止

的各点的位置。

解：因为不知道甲、乙两波源的位置，设它们分别在 S_1 和 S_2 两点，距 A、B 分别为 a 和 b ，如图 23 所示。

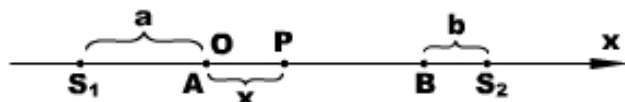


图 23

它们在 A、B 之间 P 点（坐标为 x ）形成的振动分别为——

$$y_{\text{甲}} = A\cos \omega \left(t - \frac{a+x}{v} \right) = A\cos \left[\omega t - \frac{\pi}{4} (a+x) \right]$$

$$y_{\text{乙}} = A\cos \omega \left(t - \frac{20+b-x}{v} \right) = A\cos \left[\omega t - \frac{\pi}{4} (20+b-x) \right]$$

这也就是两波的波动方程（注意：由于两式中 a 、 b 、 x 均是纯数，故乙波的速度矢量性也没有表达）

当甲波在 A 处（ $x = 0$ ）为波峰时，有 $\omega t = \frac{a\pi}{4}$

①

此时，乙波在 B 处（ $x = 20$ ）的位相为 $-\frac{\pi}{2}$ ，有 $\omega t - \frac{b\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

②

结合①②两式，得到 $b - a = 2$

所以，甲波在任意坐标 x 处的位相 $\theta_{\text{甲}} = \omega t - \frac{\pi}{4} (a+x)$

乙波则为 $\theta_{\text{乙}} = \omega t - \frac{\pi}{4} (22+a-x)$

两列波因干涉而静止点，必然满足 $\theta_{\text{甲}} - \theta_{\text{乙}} = (2k-1)\pi$

所以有 $x = 13 - 4k$ ，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

在 $0 \sim 20$ 的范围内， $x = 1, 5, 9, 13, 17\text{m}$

答：距 A 点 1m 、 5m 、 9m 、 13m 、 17m 的五个点因干涉始终处于静止状态。

思考：此题如果不设波源的位置也是可以解的，请同学们自己尝试一下……

（后记：此题直接应用波的干涉的结论——位相差的规律，如若不然，直接

求 $y_{甲}$ 和 $y_{乙}$ 的叠加，解方程将会困难得多。此外如果波源不是“同方向”振动，位相差的规律会不同。)

第三讲 典型例题解析

教材范本：龚霞玲主编《奥林匹克物理思维训练教材》，知识出版社，2002年8月第一版。

例题选讲针对“教材”第九、第十章的部分例题和习题。关于波的知识，现在的很多奥赛教材都基本只涉及高考范畴的内容，《奥林匹克物理思维训练教材》的第十章也是如此。这是不是意味着奥赛的考纲有所更新——要求降低了？

第七部分 热学

热学知识在奥赛中的要求不以深度见长，但知识点却非常地多（考纲中罗列的知识点几乎和整个力学——前五部分——的知识点数目相等）。而且，由于高考要求对热学的要求逐年降低（本届尤其低得“离谱”，连理想气体状态方程都没有了），这就客观上给奥赛培训增加了负担。因此，本部分只能采新授课的培训模式，将知识点和例题讲解及时地结合，争取让学员学一点，就领会一点、巩固一点，然后再层叠式地往前推进。

一、分子动理论

1、物质是由大量分子组成的（注意分子体积和分子所占据空间的区别）

对于分子（单原子分子）间距的计算，气体和液体可直接用 $\sqrt[3]{\text{分子占据的空间}}$ ，对固体，则与分子的空间排列（晶体的点阵）有关。

【例题1】如图6-1所示，食盐（ NaCl ）的晶体是由钠离子（图中的白色圆点表示）和氯离子（图中的黑色圆点表示）组成的，离子键两两垂直且键长相等。已知食盐的摩尔质量为 $58.5 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$ ，密度为 $2.2 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，阿伏加德罗常数为 $6.0 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ ，求食盐晶体中两个距离最近的钠离子中心之间的距

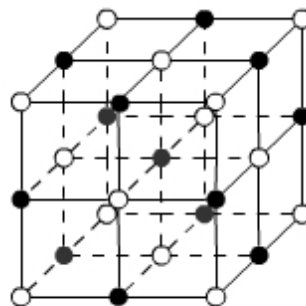


图 6-1

离。

【解说】题意所求即图中任意一个小立方块的变长（设为 a ）的 $\sqrt{2}$ 倍，所以求 a 成为本题的焦点。

由于一摩尔的氯化钠含有 N_A 个氯化钠分子，事实上也含有 $2N_A$ 个钠离子（或氯离子），所以每个钠离子占据空间为 $v = \frac{V_{\text{mol}}}{2N_A}$

而由图不难看出，一个离子占据的空间就是小立方体的体积 a^3 ，

即 $a^3 = \frac{V_{\text{mol}}}{2N_A} = \frac{M_{\text{mol}}/\rho}{2N_A}$ ，最后，邻近钠离子之间的距离 $l = \sqrt{2} a$

【答案】 $3.97 \times 10^{-10} \text{m}$ 。

【思考】本题还有没有其它思路？

【答案】每个离子都被八个小立方体均分，故一个小立方体含有 $\frac{1}{8} \times 8$ 个离子 = $\frac{1}{2}$ 分子，所以…（此法普遍适用于空间点阵比较复杂的晶体结构。）

2、物质内的分子永不停息地作无规则运动

固体分子在平衡位置附近做微小振动（振幅数量级为 0.1\AA ），少数可以脱离平衡位置运动。液体分子的运动则可以用“长时间的定居（振动）和短时间的迁移”来概括，这是由于液体分子间距较固体大的结果。气体分子基本“居无定所”，不停地迁移（常温下，速率数量级为 10^2m/s ）。

无论是振动还是迁移，都具备两个特点：a、偶然无序（杂乱无章）和统计有序（分子数比率和速率对应一定的规律——如麦克斯韦速率分布函数，如图 6-2 所示）；b、剧烈程度和温度相关。

气体分子的三种速率。最可几速率 v_p ： $f(v) = \frac{\Delta N}{N}$ （其中 ΔN 表示 v 到 $v + \Delta v$ 内分子数， N 表示分子总数）极大时的速率， $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ ；平均速率 \bar{v} ：

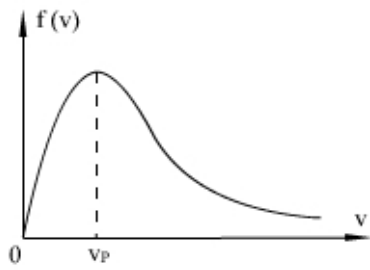


图 6-2

所有分子速率的算术平均值， $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ；方均

根速率 $\sqrt{v^2}$ ：与分子平均动能密切相关的一个速率， $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ [其中 R 为普适气体恒量， $R = 8.31 \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ 。 k 为玻耳兹曼常量， $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$]

【例题 2】证明理想气体的压强 $P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon_k}$ ，其中 n 为分子数密度， $\bar{\epsilon_k}$ 为气体分子平均动能。

【证明】气体的压强即单位面积容器壁所承受的分子的撞击力，这里可以设理想气体被封闭在一个边长为 a 的立方体容器中，如图 6-3 所示。

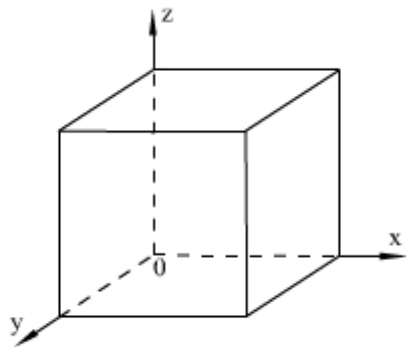


图 6-3

考查 $yo z$ 平面的一个容器壁， $P = \frac{F}{a^2}$ ①

设想在 Δt 时间内，有 N_x 个分子（设质量为 m ）沿 x 方向以恒定的速率 v_x 碰撞该容器壁，且碰后原速率弹回，则根据动量定理，容器壁承受的压力

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N_x \cdot 2mv_x}{\Delta t} \quad ②$$

在气体的实际状况中，如何寻求 N_x 和 v_x 呢？

考查某一个分子的运动，设它的速度为 v ，它沿 x 、 y 、 z 三个方向分解后，满足

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

分子运动虽然是杂乱无章的，但仍具有“偶然无序和统计有序”的规律，即

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} \quad ③$$

这就解决了 v_x 的问题。另外，从速度的分解不难理解，每一个分子都有机会均等的碰撞 3 个容器壁的可能。设 $\Delta t = \frac{a}{v_x}$ ，则

$$N_x = \frac{1}{6} \cdot 3N_{\text{总}} = \frac{1}{2}na^3 \quad ④$$

注意，这里的 $\frac{1}{6}$ 是指有 6 个容器壁需要碰撞，而它们被碰的几率是均等的。

结合①②③④式不难证明题设结论。

【思考】此题有没有更简便的处理方法？

【答案】有。“命令”所有分子以相同的速率 v 沿 $+x$ 、 $-x$ 、 $+y$ 、 $-y$ 、 $+z$ 、 $-z$ 这 6 个方向运动（这样造成的宏观效果和“杂乱无章”地运动时是一样的），则 $N_x = \frac{1}{6}N_{\text{总}} =$

$\frac{1}{6}na^3$ ；而且 $v_x = v$

$$\text{所以, } P = \frac{F}{a^2} = \frac{N_x \cdot 2mv_x}{\Delta t \cdot a^2} = \frac{\frac{1}{6}na^3 \cdot 2mv_x}{\frac{a}{v_x} \cdot a^2} = \frac{1}{3}nmv_x^2 = \frac{2}{3}n\varepsilon_k$$

3、分子间存在相互作用力（注意分子斥力和气体分子碰撞作用力的区别），而且引力和斥力同时存在，宏观上感受到的是其合效果。

分子力是保守力，分子间距改变时，分子力做的功可以用分子势能的变化表示，分子势能 E_p 随分子间距的变化关系如图 6-4 所示。

分子势能和动能的总和称为物体的内能。

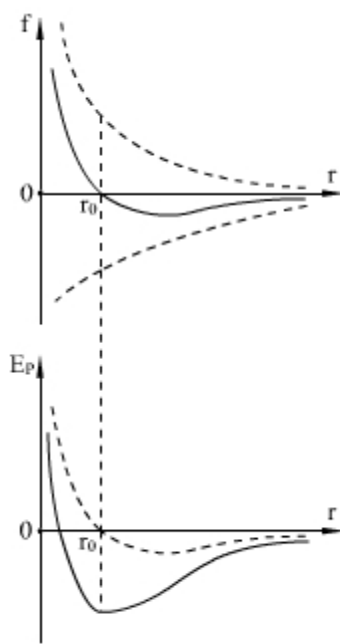


图 6-4

二、热现象和基本热力学定律

1、平衡态、状态参量

a、凡是与温度有关的现象均称为热现象，热学是研究热现象的科学。热学研究的对象都是有大量分子组成的宏观物体，通称为热力学系统（简称系统）。当系统的宏观性质不再随时间变化时，这样的状态称为平衡态。

b、系统处于平衡态时，所有宏观量都具有确定的值，这些确定的值称为状态参量（描述气体的状态参量就是 P、V 和 T）。

c、热力学第零定律（温度存在定律）：若两个热力学系统中的任何一个系统都和第三个热力学系统处于热平衡状态，那么，这两个热力学系统也必定处于热平衡。这个定律反映出：处在同一热平衡状态的所有的热力学系统都具有一个共同的宏观特征，这一特征是由这些互为热平衡系统的状态所决定的一个数值相等的状态函数，这个状态函数被定义为温度。

2、温度

a、温度即物体的冷热程度，温度的数值表示法称为温标。典型的温标有摄氏温标 t、华氏温标 F ($F = \frac{9}{5}t + 32$) 和热力学温标 T ($T = t + 273.15$)。

b、(理想) 气体温度的微观解释： $\bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2}kT$ (i 为分子的自由度 = 平动自由度 t + 转动自由度 r + 振动自由度 s)。对单原子分子 $i = 3$ ，“刚性”〈忽略振动， $s = 0$ ，但 $r = 2$ 〉双原子分子 $i = 5$ 。对于三个或三个以上的多原子分子， $i = 6$ 。能量按自由度是均分的)，所以说温度是物质分子平均动能的标志。

c、热力学第三定律：热力学零度不可能达到。(结合分子动理论的观点 2 和温度的微观解释很好理解。)

3、热力学过程

a、热传递。热传递有三种方式：传导（对长 L、横截面积 S 的柱体， $Q = K \frac{T_1 - T_2}{L} S \Delta t$ ）、对流和辐射（黑体表面辐射功率 $J = \alpha T^4$ ）

b、热膨胀。线膨胀 $\Delta l = \alpha l_0 \Delta t$

【例题 3】如图 6-5 所示，温度为 0°C 时，两根长度均为 L 的、均匀的不同金属棒，密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ，现膨胀系数分别为 α_1 和 α_2 ，它们的一端粘合在一起并从 A 点悬挂在天花板上，恰好能水平静止。若温度升高到 $t^\circ\text{C}$ ，仍需它们水平静止平衡，则悬点应该如何调整？

【解说】设 A 点距离粘合端 x，则

$$\rho_1 \left(\frac{L}{2} - x \right) = \rho_2 \left(\frac{L}{2} + x \right), \text{ 得: } x = \frac{L(\rho_1 - \rho_2)}{2(\rho_1 + \rho_2)}$$

设膨胀后的长度分别为 L_1 和 L_2 ，而且密度近似处理为不变，则同理有

$$\rho_1 \left(\frac{L_1}{2} - x' \right) = \rho_2 \left(\frac{L_2}{2} + x' \right), \text{ 得: } x' = \frac{L_1 \rho_1 - L_2 \rho_2}{2(\rho_1 + \rho_2)}$$

另有线膨胀公式，有 $L_1 = L(1 + \alpha_1 t)$ ， $L_2 = L(1 + \alpha_2 t)$

最后，设调整后的悬点为 B，则 $\overline{AB} = x' - x$

【答案】新悬点和原来的悬点之间相距 $\frac{\alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2}{2(\rho_1 + \rho_2)} Lt$ 。

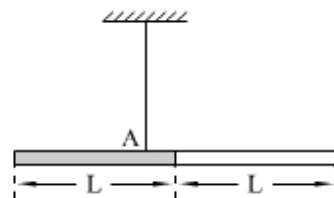


图 6-5

〔说明〕如果考虑到密度变化的实际情况 $\rho_1' = \frac{L}{L_1} \rho_1$ 、 $\rho_2' = \frac{L}{L_2} \rho_2$ ，此题仍然是可解的，但最后的结果却复杂得多…

c、系统由一个平衡态变化到另一个平衡态，即构成一个热力学过程。特殊的热力学过程有等压过程、等温过程、等容过程、绝热过程和自由膨胀等。

准静态过程：如果变化过程相对缓慢，则过程的每一个状态可视为平衡态，这样的过程也称为准静态过程。

循环：如果系统经过一系列的变化后，又回到原来的平衡态，我们称这个过程为循环。

d、热力学第一定律：外界对系统所做的功 W 和系统从外界吸收热量 Q 之和，等于系统内能的增量 ΔE ，即 $\Delta E = Q + W$ 。热力学第一定律是能量守恒定律在热力学过程中的具体体现。

e、热力学第二定律：克劳修斯表述（克劳修斯在 1850 年提出）：热量总是自动地从高温物体传到低温物体，不可能自动地由低温物体向高温物体传递。开尔文表述（开尔文在 1851 年提出）：不存在这样一种循环过程，系统从单一热源吸取热量，使之完全变为有用功而不产生其他影响。

违背热力学第二定律并不违背能量守恒，它所展示的是热力学过程的不可逆性——即自发的热力学过程只会朝着混乱程度（熵）增大的方向发展。

三、理想气体

1、气体实验三定律

在压强不太大，温度不太低的条件下，气体的状态变化遵从以下三个实验定律

a、玻意耳-马略特定律：一定质量气体温度不变时， $P_1V_1 = P_2V_2$ 或 $PV = \text{恒量}$

b、查理定律：一定质量气体体积不变时， $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ 或 $\frac{P}{T} = \text{恒量}$

c、盖·吕萨克定律：一定质量气体压强不变时， $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ 或 $\frac{V}{T} = \text{恒量}$

【例题 4】如图 6-6 所示，一端封闭、内径均匀的玻璃管长 $L = 100\text{cm}$ ，其中有一段长 $L' = 15\text{cm}$ 的水银柱把一部分空气封闭在管中。当管水平放置时，封闭气柱 A 长 $L_A = 40\text{cm}$ 。现把管缓慢旋转至竖直后，在把开口端向下插入水银槽中，直至 A 端气柱长 $L_A'' = 37.5\text{cm}$ 为止，这时系统处于静止平衡。已知大气压强 $P_0 = 75\text{cmHg}$ ，过程温度不变，试求槽内水银进入管内的水银柱的长度 h 。

【解说】在全过程中，只有 A 部分的气体质量是不变的，B 部分气体则只在管子竖直后质量才不变。所以有必要分过程解本题。

过程一：玻管旋转至竖直

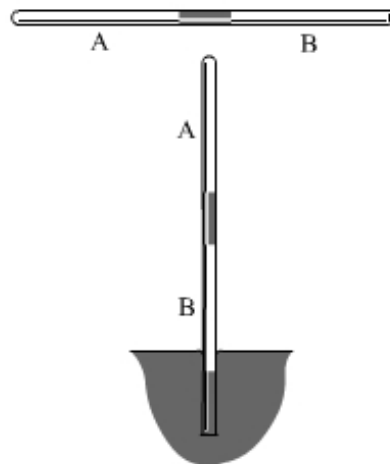


图 6-6

$$A \text{ 部分气体, } L_A' = \frac{P_A}{P_A'} L_A = \frac{75}{75-15} \times 40 = 50\text{cm}$$

$$\text{此时 B 端气柱长 } L_B' = L - L_A' - L' = 100 - 50 - 15 = 35\text{cm}$$

过程二：玻管出入水银槽

$$A \text{ 部分气体 (可针对全程, 也可针对过程二) } P_A'' = \frac{L_A'}{L_A} P_A' = \frac{50}{37.5} \times 60 = 80\text{cmHg}$$

$$B \text{ 部分气体, } L_B'' = \frac{P_B'}{P_B''} L_B' = \frac{P_0}{P_A'' + P_L'} L_B' = \frac{75}{80+15} \times 35 \approx 27.6\text{cm}$$

$$\text{最后, } h = L - L_A'' - L' - L_B''$$

【答案】19.9cm。

2、理想气体

宏观定义：严格遵守气体实验定律的气体。

微观特征：a、分子本身的大小比起它们的间距可以忽略，分子不计重力势能；b、除了短暂的碰撞过程外，分子间的相互作用可以忽略——意味着不计分子势能；c、分子间的碰撞完全是弹性的。

*理想气体是一种理想模型，是实际气体在某些条件约束下的近似，如果这些条件不满足，我们称之为实际气体，如果条件满足不是很好，我们还可以用其它的模型去归纳，如范德瓦尔斯气体、昂尼斯气体等。

理想气体压强的微观解释： $P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k$ ，其中 n 为分子数密度 ($n = \frac{N}{V}$)。

3、理想气体状态方程：一定质量的理想气体， $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ 或 $\frac{PV}{T} = \text{恒量}$

理想气体状态方程可以由三个试验定律推出，也可以由理想气体的压强微观解释和温度微观解释推导得出。

【例题5】如图6-7所示，在标准大气压下，一端封闭的玻璃管长96cm，内有一段长20cm的水银柱，当温度为27°C且管口向上竖直放置时，被封闭的气柱长为60cm。试问：当温度至少升高到多少度，水银柱才会从玻璃管中全部溢出？

【解说】首先应该明确的是，这是一个只有唯一解的问题还是一个存在范围讨论的问题。

$$\text{如果是前一种可能, 似乎应该这样解: } \frac{P_1 L_1}{T_1} = \frac{P_2 L_2}{T_2}, \text{ 即 } \frac{(76+20) \times 60}{300} = \frac{76 \times 96}{T_2}, \text{ 得: } T_2 = 380\text{K}$$

但是，仔细研究一下升温气体膨胀的全过程，就会发现，在某些区域，准静态过程是不可能达成的，因此状态方程的应用失去意义。

为了研究准静态过程是否可能达成，我们可以假定水银柱是受到某种制约而准静态膨胀的，这样，气柱的压强只受玻马定律制约（而与外界大气压、水银柱长没有关系），设为 P 。而对于一般的末状态，水银柱在管中剩下的长度设为 x 。从初态到这个一般的末态



图 6-7

$$\frac{P_1 L_1}{T_1} = \frac{PL}{T}, \text{ 即 } \frac{(76+20) \times 60}{300} = \frac{P(96-x)}{T}, \text{ 得 } P = \frac{19.2T}{96-x}$$

隔离水银柱下面的液面分析，可知 $P \leq 76 + x$ 时准静态过程能够达成（ P 可以随升温而增大，直至不等式取等号），而 $P > 76 + x$ 时准静态过程无法达成（ T 升高时， P 增大而 x 减小），水银自动溢出。

所以，自动溢出的条件是： $T > \frac{1}{19.2} (-x^2 + 20x + 7296)$

考查函数 $y = \frac{1}{19.2} (-x^2 + 20x + 7296)$ 发现，

当 $x = 10\text{cm}$ 时， $y_{\max} = 385.2\text{K}$

而前面求出的 $x=0$ 时， T 只有 380K ，说明后阶段无须升温，即是自动溢出过程（参照图 6-8 理解）。而 $T > y_{\max}$ 即是题意所求。

【答案】 385.2K 。

a、推论 1: $\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$ ，此结论成功地突破了“质量一定”的条件约束，

对解某些特殊问题非常有效。

b、克拉珀龙方程：原方程中，将“恒量”定量表达出来就成为 $PV = \nu RT$ ，其中 ν 为气体的摩尔数，这个结论被成为克拉珀龙方程。它的优点是能使本来针对过程适用的方程可以应用到某个单一的状态。

c、推论 2: 气体混合（或分开）时， $\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} + \dots + \frac{P_n V_n}{T_n} \Leftrightarrow \frac{PV}{T}$ ，这

个推论很容易由克拉珀龙方程导出。

【例题 6】图 6-9 是一种测量低温用的气体温度计，它的下端是测温泡 A，上端是压力计 B，两者通过绝热毛细管相连，毛细管容积不计。操作时先把测温计在室温 T_0 下充气至大气压 P_0 ，然后加以密封，再将 A 浸入待测液体中，当 A 和待测液体达到热平衡后，B 的读数为 P ，已知 A 和 B 的容积分别为 V_A 和 V_B ，试求待测液体的温度。

【解说】本题是“推论 2”的直接应用

$$\frac{P_0(V_A + V_B)}{T_0} = \frac{PV_A}{T_A} + \frac{PV_B}{T_0}$$

$$\text{【答案】 } T_A = \frac{PV_A T_0}{P_0(V_A + V_B) - PV_B}$$

【例题 7】图 6-10 所示是一定质量理想气体状态变化所经历的 P - T 图线，该图线是以 C 点为圆心的圆。P 轴则 C 点的纵坐标 P_0 为单位（T 轴以 T_0 为单位）。若已知在此过程中气体所经历的最低温度为 T_0 ，则在此过程中，气体密度的最大值 ρ_1 和最小值 ρ_2 之比 ρ_1 / ρ_2 应等于多少？

【解说】本题物理知识甚简，应用“推论 1”即可。

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \frac{P_1 / T_1}{P_2 / T_2}$$

此式表明， $\frac{P}{T}$ 越大时， ρ 就越大。故本题归结为求 $\frac{P}{T}$

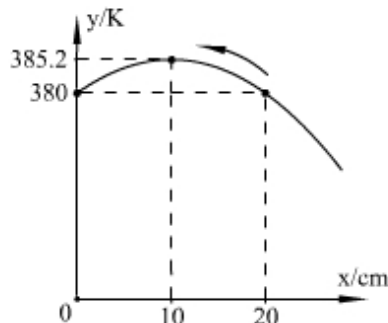


图 6-8

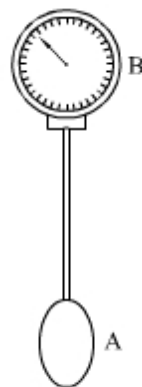


图 6-9

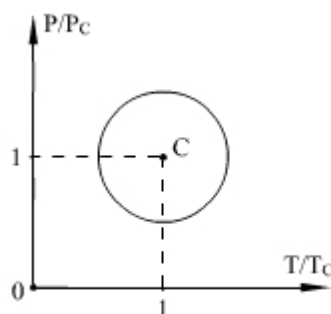


图 6-10

的极大值和极小值。

方法一：P 与 T 的关系服从圆的方程（参数方程为佳）

$$T = T_c + r \cos \theta$$

$$P = P_c + r \sin \theta$$

引入 $y = \frac{P}{T} = \frac{P_c + r \sin \theta}{T_c + r \cos \theta}$ ，然后求这个函数的极值…

方法二：见图 6-11，从 $\frac{P}{T}$ 的几何意义可知， $\frac{P}{T}$ 等于状态点到原点的连线与 T

轴夹角的正切值，求 $\frac{P}{T}$ 的极大和极小归结为求这个正切值

的极大和极小——很显然，当直线与圆周的两处相切时，出现了这样的极大和极小值。

$$\theta_{\max} = \alpha + \beta, \quad \theta_{\min} = \alpha - \beta$$

$$\text{而 } \text{tg} \alpha = \frac{P_c}{T_c}$$

$$\sin \beta = \frac{r}{\sqrt{T_c^2 + P_c^2}} \Rightarrow \text{tg} \beta = \frac{T_c - T_0}{\sqrt{2T_c T_0}}$$

（注意：依题意， $r = T_c - T_0$ ）

$$\text{所以 } \text{tg} \theta_{\max} = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} = \frac{P_c \sqrt{2T_c T_0} + T_c(T_c - T_0)}{T_c \sqrt{2T_c T_0} - P_c(T_c - T_0)}$$

$$\text{tg} \theta_{\min} = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} = \frac{P_c \sqrt{2T_c T_0} - T_c(T_c - T_0)}{T_c \sqrt{2T_c T_0} + P_c(T_c - T_0)}$$

$$\text{【答案】} \left\{ \frac{P_c \sqrt{2T_c T_0} + T_c(T_c - T_0)}{T_c \sqrt{2T_c T_0} - P_c(T_c - T_0)} \right\} / \left\{ \frac{P_c \sqrt{2T_c T_0} - T_c(T_c - T_0)}{T_c \sqrt{2T_c T_0} + P_c(T_c - T_0)} \right\}.$$

d、道尔顿分压定律：当有 n 种混合气体混合在一个容器中时，它们产生的压强等于每一种气体单独充在这个容器中时所产生的压强之和。即 $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$

4、理想气体的内能、做功与吸放热计算

a、理想气体的内能计算

由于不计分子势能，故 $E = N \cdot \overline{\varepsilon_k} = N \frac{i}{2} kT = N \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \nu \frac{i}{2} RT$ ，其中 N

为分子总数， ν 为气体的摩尔数。由于（对一定量的气体）内能是温度的单值函数，故内能的变化与过程完全没有关系。

b、理想气体的做功计算

气体在状态变化时，其压强完全可以是变化的，所以气体压力的功从定义角度寻求比较困难。但我们可以从等压过程的功外推到变压过程的功（☆无限分割→代数累计…），并最终得出这样一个非常实用的结论：准静态过程理想气体的功 W 总是对应 P-V 图象中的“面积”。这个面积的理解分三层意思——

①如果体积是缩小的，外界对气体做功，面积计为正；②如果体积是增大的，气体对外界做功，面积计为负；③如果体积参量变化不是单调的（例如循环过程），则面积应计相应的差值。如图 6-3 所示。

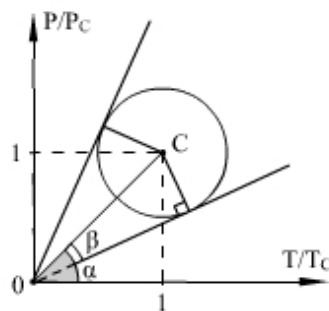


图 6-11

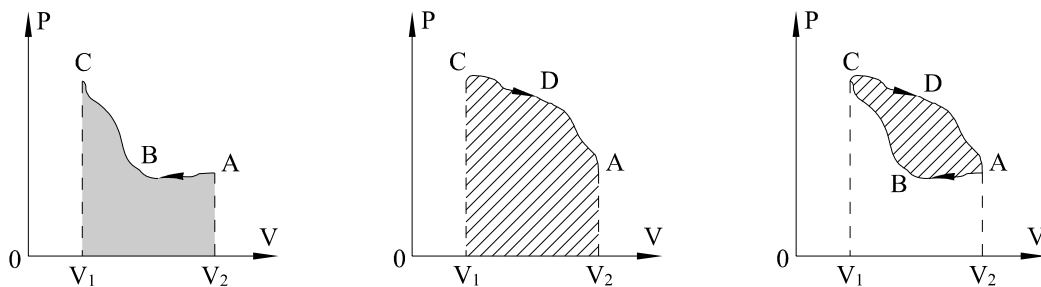


图 6-12

(☆学员思考：气体膨胀是不是一定对外做功？…)

c、吸放热的计算

初中所学的通式 $Q = cm\Delta T$ 仍适用，但值得注意的是，对固体和液体而言，比热容 c 基本恒定（和材料相关），但对气体而言， c 会随着过程的不同而不同。

对理想气体，我们一般引进“摩尔热容” C （从克拉珀龙方程知，我们关心气体的摩尔数更甚于关心气体的质量），物理意义：1 摩尔物质温度每升高 1K 所吸收的热量。摩尔热容和比热容的关系 $C = \frac{cm}{\nu}$ 。

① 等容过程的摩尔热容称为“定容摩尔热容”，用 C_V 表示，所以 $Q = \nu C_V \Delta T$

② 等压过程的摩尔热容称为“定压摩尔热容”，用 C_p 表示，所以 $Q = \nu C_p \Delta T$

对于其它的复杂过程而言，摩尔热容的表达比较困难，因此，用直接的途径求热量不可取，这时，我们改用间接途径：即求得 ΔE 和 W 后，再用热力学第一定律求 Q 。（☆从这个途径不难推导出：① $C_V = \frac{i}{2}R$ ， $C_p = \frac{i}{2}R + R$ ，即 $C_p = C_V + R \dots$ ；② $E = \nu C_V T$ ）

【例题 8】0.1mol 的单原子分子理想气体，经历如图 6-13 所示的 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 循环，已知的状态途中已经标示。试问：

(1) 此循环过程中，气体所能达到的最高温度状态在何处，最高温度是多少？

(2) $C \rightarrow A$ 过程中，气体的内能增量、做功情况、吸放热情况怎样？

【解说】(1) 介绍玻马定律的 $P-V$ 图象，定性预计 T_{max} 的大概位置（直线 BC 上的某一点）。定量计算 PV 的极大值步骤如下——

$$BC \text{ 的直线方程为 } P = -\frac{1}{2}V + 2$$

$$y = PV = -\frac{1}{2}V^2 + 2V$$

显然，当 $V = 2$ 时， y 极大，此时， $P = 1$

代入克拉珀龙方程： $1 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 0.1 \times 8.31 T_{max}$ ，解得 $T_{max} = 240.7K$

(2) 由克拉珀龙方程可以求得 $T_c = 180.5K = T_B$ ， $T_A = 60.2K$

$$\Delta E = \nu \frac{i}{2} R \Delta T = 0.1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (60.2 - 180.5) = -150.0J$$

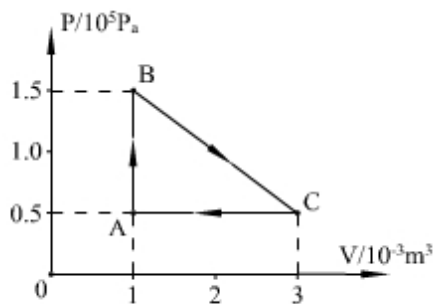


图 6-13

根据“面积”定式, $W = 0.5 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 100\text{J}$

计算 Q 有两种选择: a、 $Q = \nu C_p \Delta T = 0.1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (60.2 - 180.5) = -250.0\text{J}$

$$\text{b、} Q = \Delta E - W = -250.0\text{J}$$

【答案】(1) $V = 2 \times 10^{-3}$ 时, T_{\max} 为 240.7K ; (2) 内能减少 150.0J , 外界对气体做功 100J , 气体向外界放热 250J 。

【思考一】 $B \rightarrow C$ 过程气体吸放热的情况又怎样?

【解】由于 $B \rightarrow C$ 过程一直是气体对外界做功, 但内能却是先增后减, 所以过程的吸放热情况会复杂一些。

由 $\Delta E = Q + W$ 不难看出, T_B 到 T_{\max} 阶段肯定是吸热, 但在 T_{\max} 到 T_C 阶段则无法定性判断。所以这里启用定量方法——

在 T_{\max} 到 T_C 阶段取一个极短过程 $V \rightarrow (V + \Delta V)$, 在此过程中

$$\Delta E = \nu \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} \Delta(PV) \approx \frac{3}{2} (P \Delta V + V \Delta P)$$

$$\text{由于 } P = -\frac{1}{2}V + 2, \text{ 有 } \Delta P = -\frac{1}{2} \Delta V$$

$$\text{故 } \Delta E = \frac{3}{2} (2 - V) \Delta V$$

$$\text{又 } W = -\frac{1}{2} \Delta V (P + \langle P - \Delta P \rangle) = -P \Delta V + \frac{1}{2} \Delta P \Delta V \approx -P \Delta V = \left(\frac{1}{2}V - 2\right) \Delta V$$

2) ΔV (“过程极短”的缘故…)

所以 $Q = \Delta E - W = (5 - 2V) \Delta V$

$Q < 0$ 时, 气体开始放热, 即 $V > 2.5$ 时开始吸热 (转变体积 $V' = 2.5 \times 10^{-3} \text{m}^3$, 对应转变压强 $P' = 0.75 \times 10^5 \text{Pa}$, 转变温度 $T' = 225.6\text{K}$)。

$$\text{a、吸热阶段: } \Delta E = 0.1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (225.6 - 180.5) = 56.2\text{J}$$

$$W = -\frac{1}{2} (1.5 + 0.75) \times 10^5 \times (2.5 - 1) \times 10^{-3} = -168.8\text{J}$$

$$Q = \Delta E - W = 225.0\text{J}$$

$$\text{b、放热阶段: } \Delta E = 0.1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (180.5 - 225.6) = -56.2\text{J}$$

$$W = -\frac{1}{2} (0.5 + 0.75) \times 10^5 \times (3 - 2.5) \times 10^{-3} = -31.3\text{J}$$

$$Q = \Delta E - W = -24.9\text{J}$$

(说明: 如果针对 $B \rightarrow C$ 全程计算, 不难得出 $Q = 200.0\text{J}$ 。那么, 分出吸热、放热的细节是不是没有必要呢? 不能这样认为。因为热传递的过程具有不可逆性, 所以这里的热量“总帐”对气体可能是与“细帐”没有区别, 但对外界而言, 吸热必然是来自高温热源, 而放热却是针对低温热源, 它们就象同一个公司的两个不同贸易伙伴, 算清具体往来显然是必要的。)

【答】从高温热源吸收 225.0J 的热量, 向低温热源放出 24.9J 的热量。

【思考二】 $B \rightarrow C$ 过程吸热过程和放热过程的摩尔热容分别是多少?

【解答】解略。吸热过程 $C_1 = 49.9\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, 放热过程 $C_2 = 5.54\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ 。

〔思考三〕整个循环的效率是多少？

〔解答〕A→B 过程吸热 $Q = \nu C_V \Delta T = 0.1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (180.5 - 60.2) = 150.0\text{J}$ ，B→C 过程吸热 225J，C→A 过程只放热，所以全过程（从高温热源）的吸热总量为 375J。

整个循环对外做的功就是 $\triangle ABC$ 的面积，绝对值为 $\frac{1}{2} \times 1.0 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 100\text{J}$

所以，效率 $\eta = \frac{W}{Q_{\text{吸}}} = \frac{100}{375} = 26.7\%$ 。（从这个计算我们可以进一步领会区

分吸热和放热的重要性。）

【例题 9】如图 6-14 所示，A 和 B 是两个圆筒形绝热容器，中间用细而短的管子连接，管中有导热性能良好的阀门 K，而管子和阀门对外界却是绝热的。F 是带柄的绝热活塞，与容器 A 的内表面紧密接触，不漏气，且不计摩擦。

开始时，K 关闭，F 处于 A 的左端。A 中有 ν 摩尔、温度为 T_0 的理想气体，B 中则为真空。现向右推动 F，直到 A 中气体的体积与 B 的容积相等。在这个过程中，已知 F 对气体做功为 W，气体温度升为 T_1 ，然后将 K 稍稍打开一点，使 A 中的气体缓慢向 B 扩散，同时让活塞 F 缓慢前进，并保持 A 中活塞 F 附近气体的压强近似不变。不计活塞、阀门、容器的热容量，试问：在此过程中，气体最后的温度 T_2 是多少？

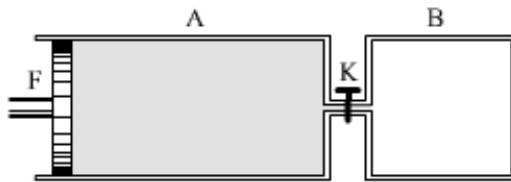


图 6-14

【解说】为求温度，可以依据能量关系或状态方程。但事实证明，仅用状态方程还不够，而要用能量关系，摩尔热容、做功的寻求是必不可少的。

过程一：K 打开前，过程绝热，据热力学第一定律， $\Delta E = W$

又由 $E = \nu C_V T$ 知 $\Delta E = \nu C_V (T_1 - T_0)$

$$\text{因此，} C_V = \frac{W}{\nu(T_1 - T_0)} \quad (1)$$

$$\text{而且在末态，} P_1 = \frac{\nu R T_1}{V_1} \quad (2)$$

过程二：K 打开后，过程仍然绝热，而且等压。所以，

$W' = P_1 (V_1 - V_1')$ ，其中 V_1' 为 A 容器最终的稳定容积。

〔学员思考〕此处求功时 ΔV 只取 A 容器中气体体积改变而不取整个气体的体积改变，为什么？——因为 B 容器中气体为自由膨胀的缘故…

$$\text{为求 } V_1' \text{，引进盖·吕萨克定律 } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1' + V_1}{T_2}$$

$$\text{从这两式可得 } W' = P_1 V_1 \frac{2T_1 - T_2}{T_1} \quad (3)$$

$$\text{而此过程的 } \Delta E' = \nu C_V \Delta T = \nu C_V (T_2 - T_1) \quad (4)$$

（注意：这里是寻求内能增量而非热量，所以，虽然是等压过程，却仍然用 C_V 而非 C_p ）

最后，结合①②③④式对后过程用热力学第一定律即可。

$$\text{【答案】 } T_2 = \frac{2\nu R(T_1 - T_0) + W}{\nu R(T_1 - T_0) + W} T_1 \text{。}$$

四、相变

相：热学系统中物理性质均匀的部分。系统按化学成分多少和相的种类多少可以成为一元二相系（如冰水混合物）和二元单相系（如水和酒精的混合液体）。相变分气液相变、固液相变和固气相变三大类，每一类中又有一些具体的分支。相变的共同热学特征是：相变伴随相变潜热。

1、气液相变，分气化和液化。气化又有两种方式：蒸发和沸腾，涉及的知识点有饱和气压、沸点、汽化热、临界温度等。

a、蒸发。蒸发是液体表面进行的缓慢平和的气化现象（任何温度下都能进行）。影响蒸发的因素主要有①液体的表面积、②液体的温度、③通风条件。从分子动理论的角度不难理解，蒸发和液化必然总是同时进行着，当两者形成动态平衡时，液体上方的气体称为——

饱和气，饱和气的压强称为饱和气压 P_w 。①同一温度下，不同液体的 P_w 不同（挥发性大的液体 P_w 大），但同种液体的 P_w 有唯一值（与气、液的体积比无关，与液体上方是否存在其它气体无关）；②同一种液体，在不同的温度下 P_w 不同（温度升高， P_w 增大，函数 $P_w = P_0 e^{-\frac{L}{RT}}$ ，式中 L 为汽化热， P_0 为常量）。

汽化热 L ：单位质量的液体变为同温度的饱和气时所吸收的热量，它是相变潜热的一种。汽化热与内能改变的关系 $L = \Delta E + P_w (V_{\text{气}} - V_{\text{液}}) \approx \Delta E + P_w V_{\text{气}}$

b、沸腾。一种剧烈的汽化，指液体温度升高到一定程度时，液体的汽化将不仅仅出现在表面，它的现象是液体内部或容器壁出现大量气泡，这些气泡又升到液体表面并破裂。液体沸腾时，液体种类不变和外界压强不变时，温度不再改变。

（从气泡的动力学分析可知）液体沸腾的条件是液体的饱和气压等于外界压强。（如在 1 标准大气压下，水在 100°C 沸腾，就是因为在此温度时水的饱和气压时 760cmHg。）

沸点，液体沸腾时的温度。①同一外界气压下，不同液体的沸点不同；②同一种液体，在不同的外界气压下，沸点不同（压强升高，沸点增大）。

c、液化。气体凝结成液体的现象。对饱和气，体积减小或温度降低时可实现液化；对非饱和气，则须先使它变成饱和气，然后液化。

常用的液化方法：①保持温度不变，通过增大压强来减小气体的体积；②保持体积不变，降低温度。

【例题 10】有一体积为 22.4L 的密闭容器，充有温度 T_1 、压强 3atm 的空气和饱和水汽，并有少量的水。今保持温度 T_1 不变，将体积加倍、压强变为 2atm，这时容器底部的水恰好消失。将空气、饱和水汽都看成理想气体，试问：（1） T_1 的值是多少？（2）若保持温度 T_1 不变，体积增为原来的 4 倍，容器内的压强又是多少？（3）容器中水和空气的摩尔数各为多少？

【解说】容器中的气体分水汽和空气两部分。容器中压强与空气压强、水汽压强的关系服从道尔顿分压定律。对水汽而言，第二过程已不再饱和。

(1) 在 T_1 、 3atm 状态, $3 = P_1 + P_w$ (P_1 为空气压强)

在 T_1 、 2atm 状态, $2 = P_2 + P_w$ (P_2 为空气压强)

而对空气, $P_1V = P_2V$

解以上三式得 $P_1 = 2\text{atm}$, $P_2 = 1\text{atm}$, $P_w = 1\text{atm}$, 可得 $T_1 = 100^\circ\text{C} = 373\text{K}$

(2) 此过程的空气和水汽质量都不再改变, 故可整体用玻-马定律: $2 \times 2V = P' \cdot 4V$

(这里忽略了“少量的”水所占据的体积...)

(3) 在一过程的末态用克拉珀龙方程即可。

【答案】(1) 373K ; (2) 1atm ; (3) 均为 1.46mol 。

【例题 11】如图 6-15 所示, 在一个横截面积为 S 的封闭容器中, 有一质量 M 的活塞把容器隔成 I、II 两室, I 室中为饱和水蒸气, II 室中有质量为 m 的氮气, 活塞可以在容器中无摩擦地滑动。开始时, 容器被水平地放置在地面上, 活塞处于平衡, I、II 两室的温度均为 $T_0 = 373\text{K}$, 压强为 P_0 。现将整个容器缓慢地转到竖直位置, 两室的温度仍为 T_0 , 但 I 室中有少量水蒸气液化成水。已知水的汽化热为 L , 水蒸气和氮气的摩尔质量分别为 μ_1 和 μ_2 , 试求在整个过程中, I 室内系统与外界交换的热量。

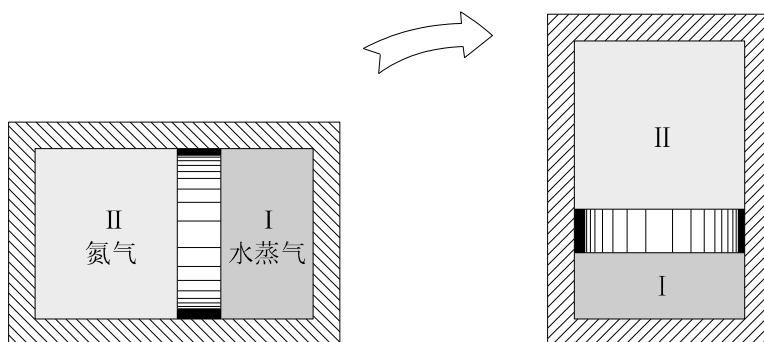


图 6-15

【解说】容器水平放置时, 设水蒸气的体积为 V_1 , 氮气的体积为 V_2 ; 直立时, 设有体积为 ΔV 的水蒸气液化成水。

直立后水的饱和气在同温度下压强不变, 故氮气的压强 $P = P_0 - \frac{Mg}{S}$

在直立过程, 对氮气用玻-马定律 $P_0V_2 = P(V_2 + \Delta V)$

结合以上两式可得 $\Delta V = \frac{Mg}{P_0S - Mg} V_2$

为解决 V_2 , 对初态的氮气用克拉珀龙方程 $P_0V_2 = \frac{m}{\mu_2} RT_0$

这样, $\Delta V = \frac{Mg}{P_0S - Mg} \cdot \frac{mRT_0}{P_0\mu_2}$

所以, 水蒸汽液化的质量 (用克拉珀龙方程) 为 $\Delta m = \frac{\mu_1 P_0}{RT_0} \Delta V = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{mMg}{P_0S - Mg}$

这部分水蒸气液化应放出热量 $Q = \Delta m \cdot L = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{mMgL}{P_0S - Mg}$

【答案】向外界放热 $\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{mMgL}{P_0S - Mg}$ 。

【思考】解本题时，为什么没有考虑活塞对 I 室做的功？

【答】注意汽化热 L 的物理意义——它其中已经包含了气体膨胀（汽化）或收缩（液化）所引起的做功因素，若再算做功，就属于重复计量了。

【*再思考】II 中氮气与“外界”交换的热量是多少？

【*答】氮气没有相变，就可直接用热力学第一定律。 $\Delta E = 0$ ， $W = -\frac{m}{\mu_2} RT_0 \ln \frac{V_2 + \Delta V}{V_2} = -\frac{m}{\mu_2} RT_0 \ln \left(1 + \frac{Mg}{P_0S - Mg} \right)$ ，所以 $Q = \Delta E - W = \frac{m}{\mu_2} RT_0 \ln \left(1 + \frac{Mg}{P_0S - Mg} \right)$ ，吸热。

2、湿度与露点

a、空气的湿度。表示空气干湿程度的物理量，有两种定义方式。①绝对湿度：空气中含有水蒸气的压强；②相对湿度 B：空气中含有水蒸气的压强跟该温度下水的饱和蒸气压的比值，即 $B = \frac{P}{P_w} \times 100\%$ （相对湿度反映了空气中水蒸

气离开饱和的程度，人体感知的正是相对湿度而非绝对湿度，以 B 值为 60~70% 比较适宜。在绝对湿度一定的情况下，气温升高，B 值减小——因此，夏天尽管绝对湿度较大，但白天仍感到空气比晚上干燥）。

b、露点：使空气中的水蒸气刚好达到饱和的温度。露点的高低与空气中含有水蒸气的压强（即绝对湿度）密切相关，根据克拉珀龙方程，也就是与空气中水蒸气的量有关：夏天，空气中水蒸气的量大，绝对湿度大（水蒸气的压强大），对应露点高；反之，冬天的露点低。

3、固液相变，分溶解和凝固。

a、溶解。物质从固态变成液态。晶体有一定的溶解温度——熔点（严格地说，只有晶体才称得上是固体），非晶体则没有。大多数物质溶解时体积会膨胀，熔点会随压强的增大而升高，但也有少数物质例外（如水、灰铸铁、锑、铋等，规律正好相反）。（压强对熔点的影响比较微弱，如冰的熔点是每增加一个大气压熔点降低 0.0075°C 。）

溶解热 λ ：单位质量的晶体在溶解时所吸收的热量。从微观角度看，溶解热用于破坏晶体的空间点阵，并最终转化为分子势能的增加，也就是内能的增加，至于体积改变所引起的做功，一般可以忽略不计。

b、凝固。溶解的逆过程，溶解的规律反过来都适用与凝固。

4、固气相变，分升华和凝华。

a、升华。物质从固态直接变为气态的过程。在常温常压下，碘化钾、樟脑、硫磷、干冰等都有显著的升华现象。

升华热：单位质量的物质在升华时所吸收的热量。（从微观角度不难解释）升华热等于同种物质的汽化热和溶解热之和。

b、凝华。升华的逆过程。如打霜就是地面附近的水蒸气遇冷（ 0°C 以下）凝华的结果。凝华热等于升华热。

5、三相点和三相图

亦称“三态点”。一般指各种稳定的纯物质处于固态、液态、气态三个相（态）平衡共存时的状态，叫做该物质的“三相点”。该点具有确定的温度和压强（清注意：两相点，如冰点和汽点并不具备这样的特征）。所以三相点这个固定温度

适于作为温标的基点，现在都以水的三相点的温度作为确定温标的固定点。

附：几种物质的三相点数据

	温度 (K)	压强 (P _a)
氢	13.84	7038.2
氘	18.63	17062.4
氚	24.57	43189.2
氮	63.18	12530.2
二氧化碳	216.55	517204
水	273.16	610.5

怎样理解三相点的存在呢？将相变的气化曲线 OK（即饱和气压随温度变化的曲线——

一对应函数 $P_w = P_0 e^{-\frac{L}{RT}}$ ）、溶解曲线 OL（压强随熔点变化的曲线）、升华曲线 OS（压强随升华点变化的曲线）描绘在同一个 P-t 坐标中，就构成“三相图”。三条曲线的交点就是三相点，如图 6-16 所示。

在图中，为了表示三相点的精确位置，坐标的标度并不是均匀的，所以坐标轴用虚线表示。OK、OL 和 OS 事实上分别是水汽两相点、冰水两相点和冰汽两相点“运动”的结果——也就是相应两相的分界线。

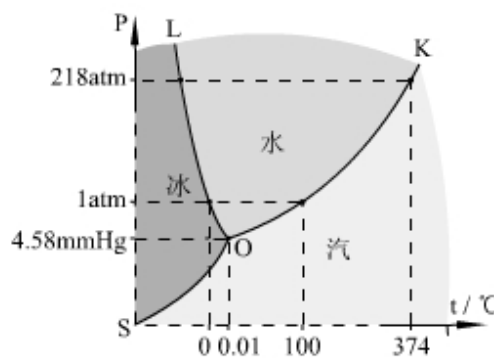


图 6-16

五、固体和液体

1、固体——晶体和非晶体

a、晶体和非晶体的根本区别是：是否具有固定的熔点。晶体又分为单晶体和多晶体，单晶体（如石英、云母、明矾、冰等）还具有规则的几何形状、物理性质上表现为各向异性；多晶体（如岩石、金属等）则和非晶体一样，无规则几何形状、各向同性。

b、空间点阵：组成晶体的微观粒子所形成的规则排列（非晶体没有空间点阵）。晶体之所以具有固定的熔点，是因为发生相变时，吸收的热量全部用来破坏空间点阵结构——分子间距的改变导致分子势能增大，而分子的平均动能则不变。

2、液体的表面张力

a、表面张力：存在于液体表面的使表面收缩的力。表面张力的微观解释是：蒸发使表面分子间距大于 r_0 ，因此分子力体现为引力。

表面张力系数 α ：设想在液面作长为 L 的线段，则线段两边表面张力必垂直于这条线段，且于液面相切，各自的大小均为 $f = \alpha L$ ，其中 α 称表面张力系数。

b、浸润现象：液体与固体接触时，若接触角 θ

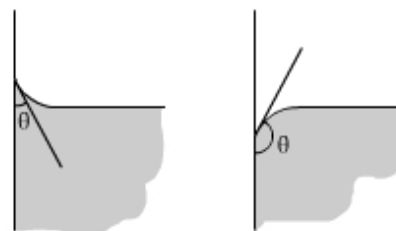


图 6-17

（见图 6-17）为锐角，称为浸润现象；反之，接触角为钝角，称为不浸润。液体相对固体是否浸润取决于液体和固体的组合关系，如水能浸润玻璃却不能浸润石蜡，水银能浸润锌版却不能浸润玻璃。

当 $\theta = 0$ 时，称为“完全浸润”；当 $\theta = \pi$ 时，称为“完全不浸润”。

从微观角度看，液体能否浸润固体取决于液体与固体接触的“附着层”分子受液体分子力（内聚力）更大还是受固体分子力（附着力）更大。

c、毛细现象：浸润管壁的液体在毛细管中液面升高，不浸润管壁的液体在毛细管中液面降低的现象。毛细现象的形成事实上是液体表面张力的合效果。

☆如果毛细管的为 r ，液体的表面张力系数为 α ，对管壁的浸润角为 θ ，不难求出毛细现象导致的液面上升（或下降）量 $h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho gr}$ 。

【例题 12】如图 6-18 所示，在一个两端开口的、半径为 1mm 的长毛细管中装满水，然后把它竖直地放在空间，认为水完全浸润毛细管，且水的表面张力系数为 $7.3 \times 10^{-2} \text{N/m}$ ，则留在管中的水柱应有多长？

【解说】由于有两个曲面，故曲面边缘的表面张力合力为

$$F = 2 \cdot \alpha 2\pi r \cos\theta$$

$$\text{液柱的重力 } G = \rho \pi r^2 h g$$

解它们的平衡方程即可（ $\theta = 0$ ）

【答案】 $h = 2.94 \times 10^{-2} \text{m}$ 。

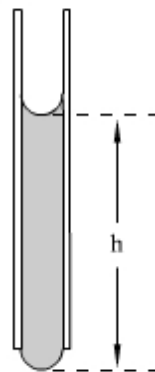


图 6-18

第八部分 静电场

第一讲 基本知识介绍

在奥赛考纲中，静电学知识点数目不算多，总数和高考考纲基本相同，但在个别知识点上，奥赛的要求显然更加深化了：如非匀强电场中电势的计算、电容器的连接和静电能计算、电介质的极化等。在处理物理问题的方法上，对无限分割和叠加原理提出了更高的要求。

如果把静电场的问题分为两部分，那就是电场本身的问题、和对场中带电体的研究，高考考纲比较注重第二部分中带电粒子的运动问题，而奥赛考纲更注重第一部分和第二部分中的静态问题。也就是说，奥赛关注的是电场中更本质的内容，关注的是纵向的深化和而非横向的综合。

一、电场强度

1、实验定律

a、库仑定律

内容：

条件：(1)点电荷，(2)真空，(3)点电荷静止或相对静止。事实上，条件(1)和(2)均不能视为对库仑定律的限制，因为叠加原理可以将点电荷之间的静电力应用到一般带电体，非真空介质可以通过介电常数将 k 进行修正（如果介质分布是均匀和“充分宽广”的，一般认为 $k' = k / \epsilon_r$ ）。只有条件(3)，它才是静电学的基本前提和出发点（但这一点又是常常被忽视和被不恰当地“综合应用”的）。

b、电荷守恒定律

c、叠加原理

2、电场强度

a、电场强度的定义

电场的概念；试探电荷（检验电荷）；定义意味着一种适用于任何电场的对电场的检测手段；电场线是抽象而直观地描述电场有效工具（电场线的基本属性）。

b、不同电场中场强的计算

决定电场强弱的因素有两个：场源（带电量和带电体的形状）和空间位置。这可以从不同电场的场强决定式看出——

$$(1) \text{点电荷: } E = k \frac{Q}{r^2}$$

结合点电荷的场强和叠加原理，我们可以求出任何电场的场强，如——

$$(2) \text{均匀带电环, 垂直环面轴线上的某点 P: } E = \frac{kQr}{(r^2 + R^2)^{3/2}}, \text{ 其中 } r \text{ 和 } R \text{ 的意义见图 7-1。}$$

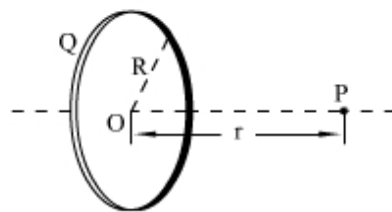


图 7-1

(3)均匀带电球壳

$$\text{内部: } E_{\text{内}} = 0$$

$$\text{外部: } E_{\text{外}} = k \frac{Q}{r^2}, \text{ 其中 } r \text{ 指考察点到球心的距离}$$

如果球壳是有厚度的（内径 R_1 、外径 R_2 ），在壳体中（ $R_1 < r < R_2$ ）：

$E = \frac{4}{3} \pi \rho k \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$ ，其中 ρ 为电荷体密度。这个式子的物理意义可以参照万有引力定律当中（条件部分）的“剥皮法则”理解（ $\rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$ 即为图 7-2 中虚线以内部分的总电量...）。

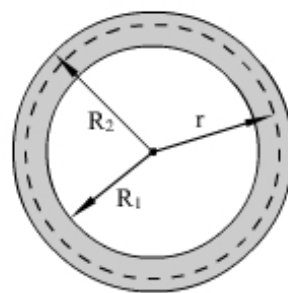


图 7-2

$$(4) \text{无限长均匀带电直线 (电荷线密度为 } \lambda \text{): } E = \frac{2k\lambda}{r}$$

$$(5) \text{无限大均匀带电平面 (电荷面密度为 } \sigma \text{): } E = 2\pi k \sigma$$

二、电势

1、电势：把一电荷从 P 点移到参考点 P_0 时电场力所做的功 W 与该电荷电量 q 的比值，即

$$U = \frac{W}{q}$$

参考点即电势为零的点，通常取无穷远或大地为参考点。

和场强一样，电势是属于场本身的物理量。 W 则为电荷的电势能。

2、典型电场的电势

a、点电荷

以无穷远为参考点， $U = k \frac{Q}{r}$

b、均匀带电球壳

以无穷远为参考点， $U_{外} = k \frac{Q}{r}$ ， $U_{内} = k \frac{Q}{R}$

3、电势的叠加

由于电势的是标量，所以电势的叠加服从代数加法。很显然，有了点电荷电势的表达式和叠加原理，我们可以求出任何电场的电势分布。

4、电场力对电荷做功

$$W_{AB} = q (U_A - U_B) = qU_{AB}$$

三、静电场中的导体

静电感应 \rightarrow 静电平衡（狭义和广义） \rightarrow 静电屏蔽

1、静电平衡的特征可以总结为以下三层含义——

a、导体内部的合场强为零；表面的合场强不为零且一般各处不等，表面的合场强方向总是垂直导体表面。

b、导体是等势体，表面是等势面。

c、导体内部没有净电荷；孤立导体的净电荷在表面的分布情况取决于导体表面的曲率。

2、静电屏蔽

导体壳（网罩）不接地时，可以实现外部对内部的屏蔽，但不能实现内部对外部的屏蔽；导体壳（网罩）接地后，既可实现外部对内部的屏蔽，也可实现内部对外部的屏蔽。

四、电容

1、电容器

孤立导体电容器 \rightarrow 一般电容器

2、电容

a、定义式 $C = \frac{Q}{U}$

b、决定式。决定电容器电容的因素是：导体的形状和位置关系、绝缘介质的种类，所以不同电容器有不同的电容

(1) 平行板电容器 $C = \frac{\epsilon_r S}{4\pi k d} = \frac{\epsilon S}{d}$ ，其中 ϵ 为绝对介电常数（真空中 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ ，其它介质中 $\epsilon = \frac{1}{4\pi k'}$ ）， ϵ_r 则为相对介电常数， $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 。

(2) 柱形电容器： $C = \frac{\epsilon_r L}{2k \ln \frac{R_2}{R_1}}$

(3) 球形电容器： $C = \frac{\epsilon_r R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$

3、电容器的连接

a、串联 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$

b、并联 $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$

4、电容器的能量

用图 7-3 表征电容器的充电过程，“搬运”电荷做功 W 就是图中阴影的面积，这也就是电容器的储能 E ，所以

$$E = \frac{1}{2} q_0 U_0 = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

电场的能量。电容器储存的能量究竟是属于电荷还是属于电场？正确答案是后者，因此，我们可以将电容器的能量用场强 E 表示。

对平行板电容器 $E_{\text{总}} = \frac{Sd}{8\pi k} E^2$

认为电场能均匀分布在电场中，则单位体积的电场储能 $w = \frac{1}{8\pi k} E^2$ 。而且，这以结论适用于非匀强电场。

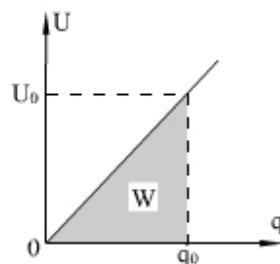


图 7-3

五、电介质的极化

1、电介质的极化

a、电介质分为两类：无极分子和有极分子，前者是指在没有外电场时每个分子的正、负电荷“重心”彼此重合（如气态的 H_2 、 O_2 、 N_2 和 CO_2 ），后者则反之（如气态的 H_2O 、 SO_2 和液态的水硝基苯）

b、电介质的极化：当介质中存在外电场时，无极分子会变为有极分子，有极分子会由原来的杂乱排列变成规则排列，如图 7-4 所示。

2、束缚电荷、自由电荷、极化电荷与宏观过剩电荷

a、束缚电荷与自由电荷：在图 7-4 中，电介质左右两端分别显现负电和正电，但这些电荷并不能自由移动，因此称为束缚电荷，除了电介质，导体中的原子核和内层电子也是束缚电荷；反之，能够自由移动的电荷称为自由电荷。事实上，导体中存在束缚电荷与自由电荷，绝缘体中也存在束缚电荷和自由电荷，只是它们的比例差异较大而已。

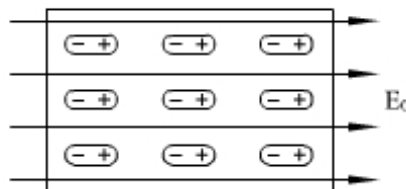
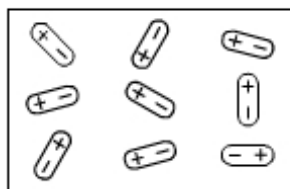


图 7-4

b、极化电荷是更严格意义上的束缚电荷，就是指图 7-4 中电介质两端显现的电荷。而宏观过剩电荷是相对极化电荷来说的，它是指可以自由移动的净电荷。宏观过剩电荷与极化电荷的重要区别是：前者能够用来冲放电，也能用仪表测量，但后者却不能。

第二讲 重要模型与专题

一、场强和电场力

【物理情形 1】试证明：均匀带电球壳内部任意一点的场强均为零。

【模型分析】这是一个叠加原理应用的基本事例。

如图 7-5 所示，在球壳内取一点 P，以 P 为顶点做两个对顶的、顶角很小的锥体，锥体与球面相交得到球面上的两个面元 ΔS_1 和 ΔS_2 ，设球面的电荷面密度为 σ ，则这两个面元在 P 点激发的场强分别为

$$\Delta E_1 = k \frac{\sigma \Delta S_1}{r_1^2}$$

$$\Delta E_2 = k \frac{\sigma \Delta S_2}{r_2^2}$$

为了弄清 ΔE_1 和 ΔE_2 的大小关系，引进锥体顶部的立体角 $\Delta \Omega$ ，显然

$$\frac{\Delta S_1 \cos \alpha}{r_1^2} = \Delta \Omega = \frac{\Delta S_2 \cos \alpha}{r_2^2}$$

所以 $\Delta E_1 = k \frac{\sigma \Delta \Omega}{\cos \alpha}$ ， $\Delta E_2 = k \frac{\sigma \Delta \Omega}{\cos \alpha}$ ，即： $\Delta E_1 = \Delta E_2$ ，而它们的方向是相反的，故在 P 点激发的合场强为零。

同理，其它各个相对的面元 ΔS_3 和 ΔS_4 、 ΔS_5 和 ΔS_6 … 激发的合场强均为零。原命题得证。

【模型变换】半径为 R 的均匀带电球面，电荷的面密度为 σ ，试求球心处的电场强度。

【解析】如图 7-6 所示，在球面上的 P 处取一极小的面元 ΔS ，它在球心 O 点激发的场强大小为

$$\Delta E = k \frac{\sigma \Delta S}{R^2}，\text{方向由 P 指向 O 点。}$$

无穷多个这样的面元激发的场强大小和 ΔS 激发的完全相同，但方向各不相同，它们矢量合成的效果怎样呢？这里我们要大胆地预见——由于在 x 方向、y 方向上的对称性， $\sum \bar{E}_x = \sum \bar{E}_y = 0$ ，最后的 $\sum \bar{E} = \sum E_z$ ，所以先求

$$\Delta E_z = \Delta E \cos \theta = k \frac{\sigma \Delta S \cos \theta}{R^2}，\text{而且 } \Delta S \cos \theta \text{ 为面元在 } xoy \text{ 平面的投影，设为 } \Delta S'$$

$$\text{所以 } \sum E_z = \frac{k\sigma}{R^2} \sum \Delta S'$$

$$\text{而 } \sum \Delta S' = \pi R^2$$

【答案】 $E = k\pi\sigma$ ，方向垂直边界线所在的平面。

【学员思考】如果这个半球面在 yoz 平面的两边均匀带有异种电荷，面密度仍为 σ ，那么，球心处的场强又是多少？

【推荐解法】将半球面看成 4 个 $\frac{1}{8}$ 球面，每个 $\frac{1}{8}$ 球面在 x、y、z 三个方向上分量均为 $\frac{1}{4} k\pi\sigma$ ，能够对称抵消的将是 y、z 两个方向上的分量，因此 $\sum \bar{E} = \sum E_x \dots$

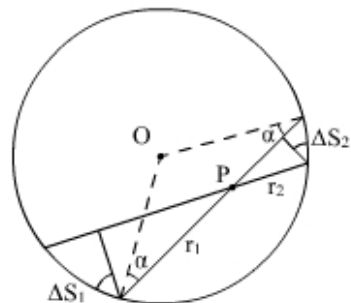


图 7-5

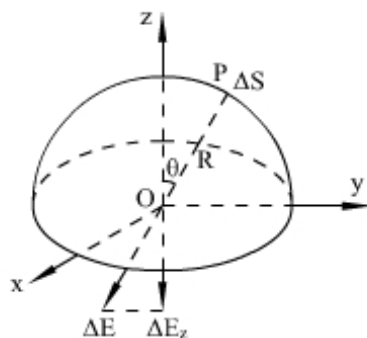


图 7-6

【答案】大小为 $k\pi\sigma$ ，方向沿 x 轴方向（由带正电的一方指向带负电的一方）。

【物理情形 2】有一个均匀的带电球体，球心在 O 点，半径为 R ，电荷体密度为 ρ ，球体内有一个球形空腔，空腔球心在 O' 点，半径为 R' ， $\overline{OO'} = a$ ，如图 7-7 所示，试求空腔中各点的场强。

【模型分析】这里涉及两个知识的应用：一是均匀带电球体的场强定式（它也是来自叠加原理，这里具体用到的是球体内部的结论，即“剥皮法则”），二是填补法。

将球体和空腔看成完整的带正电的大球和带负电（电荷体密度相等）的小球的集合，对于空腔中任意一点 P ，设 $\overline{OP} = r_1$ ， $\overline{O'P} = r_2$ ，则大球激发的场强为

$$E_1 = k \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r_1^3}{r_1^2} = \frac{4}{3} k \rho \pi r_1, \text{ 方向由 } O \text{ 指向 } P$$

“小球”激发的场强为

$$E_2 = k \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r_2^3}{r_2^2} = \frac{4}{3} k \rho \pi r_2, \text{ 方向由 } P \text{ 指向 } O'$$

E_1 和 E_2 的矢量合成遵从平行四边形法则， ΣE 的方向如图。又由于矢量三角形 $PE_1\Sigma E$ 和空间位置三角形 $OP O'$ 是相似的， ΣE 的大小和方向就不难确定了。

【答案】恒为 $\frac{4}{3} k \rho \pi a$ ，方向均沿 $O \rightarrow O'$ ，空腔里的电场是匀强电场。

【学员思考】如果在模型 2 中的 OO' 连线上 O' 一侧距离 O 为 b ($b > R$) 的地方放一个电量为 q 的点电荷，它受到的电场力将为多大？

【解说】上面解法的按部就班应用…

$$\text{【答】 } \frac{4}{3} \pi k \rho q \left[\frac{R^3}{b^2} - \frac{R'^3}{(b-a)^2} \right].$$

二、电势、电量与电场力的功

【物理情形 1】如图 7-8 所示，半径为 R 的圆环均匀带电，电荷线密度为 λ ，圆心在 O 点，过圆心跟环面垂直的轴线上有 P 点， $\overline{PO} = r$ ，以无穷远为参考点，试求 P 点的电势 U_p 。

【模型分析】这是一个电势标量叠加的简单模型。先在圆环上取一个元段 ΔL ，它在 P 点形成的电势

$$\Delta U = k \frac{\lambda \Delta L}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

环共有 $\frac{2\pi R}{\Delta L}$ 段，各段在 P 点形成的电势相同，而且它们是标量叠加。

$$\text{【答案】 } U_p = \frac{2\pi k \lambda R}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

【思考】如果上题中知道的是环的总电量 Q ，则 U_p 的结论为多少？如果这个总电量的分布不是均匀的，结论会改变吗？

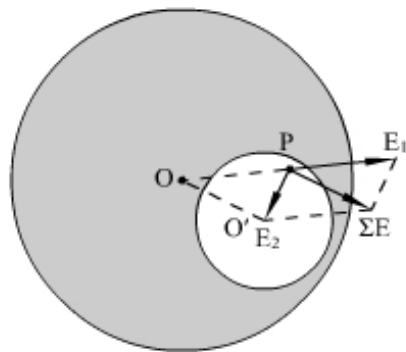


图 7-7

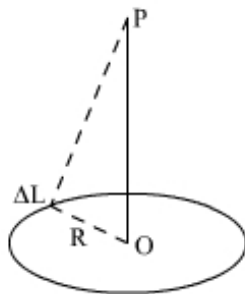


图 7-8

【答】 $U_p = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + r^2}}$ ；结论不会改变。

【再思考】将环换成半径为 R 的薄球壳，总电量仍为 Q ，试问：(1) 当电量均匀分布时，球心电势为多少？球内（包括表面）各点电势为多少？(2) 当电量不均匀分布时，球心电势为多少？球内（包括表面）各点电势为多少？

【解说】(1) 球心电势的求解从略；

球内任一点的求解参看图 7-5

$$\Delta U_1 = k \frac{\sigma \Delta S_1}{r_1} = k \frac{\sigma}{r_1} \cdot \frac{\Delta \Omega \cdot r_1^2}{\cos \alpha} = k \sigma \Delta \Omega \frac{r_1}{\cos \alpha}$$

$$\Delta U_2 = k \sigma \Delta \Omega \frac{r_2}{\cos \alpha}$$

$$\text{它们代数叠加成 } \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = k \sigma \Delta \Omega \frac{r_1 + r_2}{\cos \alpha}$$

$$\text{而 } r_1 + r_2 = 2R \cos \alpha$$

$$\text{所以 } \Delta U = 2Rk \sigma \Delta \Omega$$

$$\text{所有面元形成电势的叠加 } \Sigma U = 2Rk \sigma \Sigma \Delta \Omega$$

注意：一个完整球面的 $\Sigma \Delta \Omega = 4\pi$ （单位：球面度 sr），但作为对顶的锥角， $\Sigma \Delta \Omega$ 只能是 2π ，所以——

$$\Sigma U = 4\pi Rk \sigma = k \frac{Q}{R}$$

(2) 球心电势的求解和【思考】相同；

球内任一点的电势求解可以从(1)问的求解过程得到结论的反证。

【答】(1) 球心、球内任一点的电势均为 $k \frac{Q}{R}$ ；(2) 球心电势仍为 $k \frac{Q}{R}$ ，

但其它各点的电势将随电量的分布情况的不同而不同（内部不再是等势体，球面不再是等势面）。

【相关应用】如图 7-9 所示，球形导体空腔内、外壁的半径分别为 R_1 和 R_2 ，带有净电量 $+q$ ，现在其内部距球心为 r 的地方放一个电量为 $+Q$ 的点电荷，试求球心处的电势。

【解析】由于静电感应，球壳的内、外壁形成两个带电球壳。球心电势是两个球壳形成电势、点电荷形成电势的合效果。

根据静电感应的尝试，内壁的电荷量为 $-Q$ ，外壁的电荷量为 $+Q+q$ ，虽然内壁的带电是不均匀的，根据上面的结论，其在球心形成的电势仍可以应用定式，所以…

【答案】 $U_o = k \frac{Q}{r} - k \frac{Q}{R_1} + k \frac{Q+q}{R_2}$ 。

【反馈练习】如图 7-10 所示，两个极薄的同心导体球壳 A 和 B，半径分别为 R_A 和 R_B ，现让 A 壳接地，而在 B 壳的外部距球心 d 的地方放一个电量为 $+q$ 的点电荷。试求：(1) A 球壳的感应电荷量；(2) 外球壳的电势。

【解说】这是一个更为复杂的静电感应情形，B 壳将形成图示的感应电荷分布（但没有净电量），A 壳的情形未画出（有净电量），它们的感应电荷分布都是不均匀的。

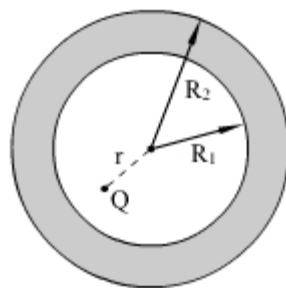


图 7-9

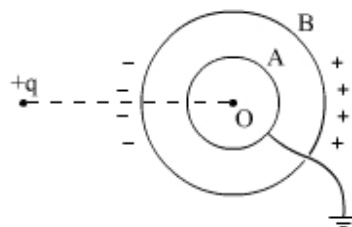


图 7-10

此外，我们还要用到一个重要的常识：接地导体（A壳）的电势为零。但值得注意的是，这里的“为零”是一个合效果，它是点电荷 q 、A壳、B壳（带同样电荷时）单独存在时在A中形成的电势的代数和，所以，当我们以球心O点为对象，有

$$U_0 = k \frac{q}{d} + k \frac{Q_A}{R_A} + k \frac{Q_B}{R_B} = 0$$

Q_B 应指B球壳上的净电荷量，故 $Q_B = 0$

$$\text{所以 } Q_A = -\frac{R_A}{d} q$$

☆学员讨论：A壳的各处电势均为零，我们的方程能不能针对A壳表面上的某点去列？（答：不能，非均匀带电球壳的球心以外的点不能应用定式！）

基于刚才的讨论，求B的电势时也只能求B的球心的电势（独立的B壳是等势体，球心电势即为所求）——

$$U_B = k \frac{q}{d} + k \frac{Q_A}{R_B}$$

$$\text{〔答〕 (1) } Q_A = -\frac{R_A}{d} q ; (2) U_B = k \frac{q}{d} \left(1 - \frac{R_A}{R_B}\right)。$$

【物理情形2】图7-11中，三根实线表示三根首尾相连的等长绝缘细棒，每根棒上的电荷分布情况与绝缘棒都换成导体棒时完全相同。点A是 $\triangle abc$ 的中心，点B则与A相对bc棒对称，且已测得它们的电势分别为 U_A 和 U_B 。试问：若将ab棒取走，A、B两点的电势将变为多少？

【模型分析】由于细棒上的电荷分布既不均匀、三根细棒也没有构成环形，故前面的定式不能直接应用。若用元段分割→叠加，也具有相当的困难。所以这里介绍另一种求电势的方法。

每根细棒的电荷分布虽然复杂，但相对各自的中点必然是对称的，而且三根棒的总电量、分布情况彼此必然相同。这就意味着：①三棒对A点的电势贡献都相同（可设为 U_1 ）；②ab棒、ac棒对B点的电势贡献相同（可设为 U_2 ）；③bc棒对A、B两点的贡献相同（为 U_1 ）。

$$\text{所以，取走 ab 前 } \begin{aligned} 3U_1 &= U_A \\ 2U_2 + U_1 &= U_B \end{aligned}$$

取走ab后，因三棒是绝缘体，电荷分布不变，故电势贡献不变，所以

$$\begin{aligned} U_A' &= 2U_1 \\ U_B' &= U_1 + U_2 \end{aligned}$$

$$\text{【答案】 } U_A' = \frac{2}{3} U_A ; U_B' = \frac{1}{6} U_A + \frac{1}{2} U_B。$$

【模型变换】正四面体盒子由彼此绝缘的四块导体板构成，各导体板带电且电势分别为 U_1 、 U_2 、 U_3 和 U_4 ，则盒子中心点O的电势U等于多少？

【解说】此处的四块板子虽然位置相对O点具有对称性，但电量各不相同，因此对O点的电势贡献也不相同，所以应该想一点办法——

我们用“填补法”将电量不对称的情形加以改观：先将每一块导体板复制三

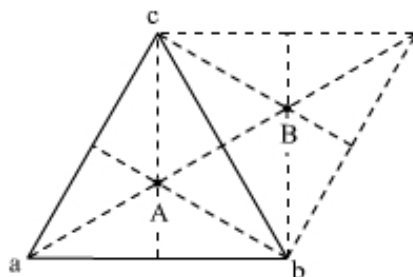


图 7-11

块，作成是一个正四面体盒子，然后将这四个盒子位置重合地放置——构成一个有四层壁的新盒子。在这个新盒子中，每个壁的电量将是完全相同的（为原来四块板的电量之和）、电势也完全相同（为 $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ ），新盒子表面就构成了一个等势面、整个盒子也是一个等势体，故新盒子的中心电势为

$$U' = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

最后回到原来的单层盒子，中心电势必为 $U = \frac{1}{4} U'$

$$\text{【答】 } U = \frac{1}{4} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)。$$

☆学员讨论：刚才的这种解题思想是否适用于“物理情形2”？（答：不行，因为三角形各边上电势虽然相等，但中点的电势和边上的并不相等。）

【反馈练习】电荷 q 均匀分布在半球面 ACB 上，球面半径为 R ， CD 为通过半球顶点 C 和球心 O 的轴线，如图 7-12 所示。 P 、 Q 为 CD 轴线上相对 O 点对称的两点，已知 P 点的电势为 U_p ，试求 Q 点的电势 U_0 。

【解说】这又是一个填补法的应用。将半球面补成完整球面，并令右边内、外层均匀地带上电量为 q 的电荷，如图 7-12 所示。

从电量的角度看，右半球面可以看作不存在，故这时 P 、 Q 的电势不会有任何改变。

而换一个角度看， P 、 Q 的电势可以看成是两者的叠加：①带电量为 $2q$ 的完整球面；②带电量为 $-q$ 的半球面。

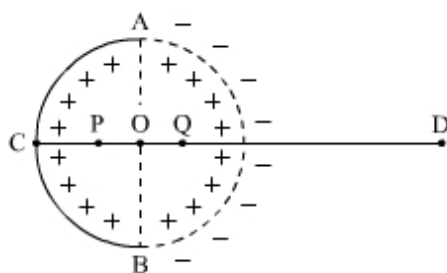


图 7-12

$$\text{考查 } P \text{ 点, } U_p = k \frac{2q}{R} + U_{\text{半球面}}$$

其中 $U_{\text{半球面}}$ 显然和为填补时 Q 点的电势大小相等、符号相反，即 $U_{\text{半球面}} = -U_0$

以上的两个关系已经足以解题了。

$$\text{【答】 } U_0 = k \frac{2q}{R} - U_p。$$

【物理情形3】如图 7-13 所示， A 、 B 两点相距 $2L$ ，圆弧 $o\hat{C}D$ 是以 B 为圆心、 L 为半径的半圆。 A 处放有电量为 q 的电荷， B 处放有电量为 $-q$ 的点电荷。试问：

(1) 将单位正电荷从 O 点沿 $o\hat{C}D$ 移到 D 点，电场力对它做了多少功？(2) 将单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处去，电场力对它做多少功？

【模型分析】电势叠加和关系 $W_{AB} = q(U_A - U_B) = qU_{AB}$ 的基本应用。

$$U_0 = k \frac{q}{L} + k \frac{-q}{L} = 0$$

$$U_D = k \frac{q}{3L} + k \frac{-q}{L} = -\frac{2kq}{3L}$$

$$U_\infty = 0$$

再用功与电势的关系即可。

$$\text{【答案】 (1) } \frac{2kq}{3L}; \text{ (2) } \frac{2kq}{3L}。$$

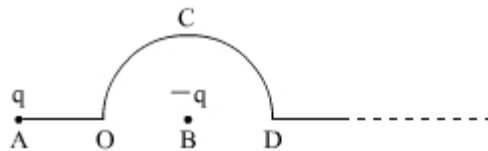


图 7-13

【相关应用】在不计重力空间，有 A、B 两个带电小球，电量分别为 q_1 和 q_2 ，质量分别为 m_1 和 m_2 ，被固定在相距 L 的两点。试问：(1) 若解除 A 球的固定，它能获得的最大动能是多少？(2) 若同时解除两球的固定，它们各自的获得的最大动能是多少？(3) 未解除固定时，这个系统的静电势能是多少？

【解说】第(1)问甚间；第(2)问在能量方面类比反冲装置的能量计算，另启用动量守恒关系；第(3)问是在前两问基础上得出的必然结论…（这里就回到了一个基本的观念斧正：势能是属于场和场中物体的系统，而非单纯属于场中物体——这在过去一直是被忽视的。在两个点电荷的环境中，我们通常说“两个点电荷的势能”是多少。）

【答】(1) $k \frac{q_1 q_2}{r}$ ；(2) $E_{k1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \frac{q_1 q_2}{r}$ ， $E_{k2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} k \frac{q_1 q_2}{r}$ ；(3) $k \frac{q_1 q_2}{r}$ 。

【思考】设三个点电荷的电量分别为 q_1 、 q_2 和 q_3 ，两两相距为 r_{12} 、 r_{23} 和 r_{31} ，则这个点电荷系统的静电势能是多少？

【解】略。

【答】 $k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} \right)$ 。

【反馈应用】如图 7-14 所示，三个带同种电荷的相同金属小球，每个球的质量均为 m 、电量均为 q ，用长度为 L 的三根绝缘轻绳连接着，系统放在光滑、绝缘的水平面上。现将其中的一根绳子剪断，三个球将开始运动起来，试求中间这个小球的最大速度。

【解】设剪断的是 1、3 之间的绳子，动力学分析易知，2 球获得最大动能时，1、2 之间的绳子与 2、3 之间的绳子刚好应该在一条直线上。而且由动量守恒知，三球不可能有沿绳子方向的速度。设 2 球的速度为 v ，1 球和 3 球的速度为 v' ，则

$$\text{动量关系 } mv + 2m v' = 0$$

$$\text{能量关系 } 3k \frac{q^2}{L} = 2k \frac{q^2}{L} + k \frac{q^2}{2L} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv'^2$$

解以上两式即可的 v 值。

【答】 $v = q \sqrt{\frac{2k}{3mL}}$ 。

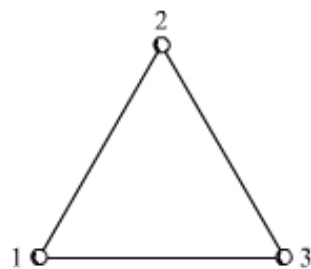


图 7-14

三、电场中的导体和电介质

【物理情形】两块平行放置的很大的金属薄板 A 和 B，面积都是 S ，间距为 d (d 远小于金属板的线度)，已知 A 板带净电量 $+Q_1$ ，B 板带净电量 $+Q_2$ ，且 $Q_2 < Q_1$ ，试求：(1) 两板内外表面的电量分别是多少；(2) 空间各处的场强；(3) 两板间的电势差。

【模型分析】由于静电感应，A、B 两板的四个平面的电量将呈现一定规律的分布（金属板虽然很薄，但内部合场强为零的结论还是存在的）；这里应注意金属板“很大”的前提条件，它事实上是指物理无穷大，因此，可以应用无限大平板的场强定式。

为方便解题，做图 7-15，忽略边缘效应，四个面的电荷分布应是均匀的，设四个面的电荷面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和 σ_4 ，显然

$$(\sigma_1 + \sigma_2) S = Q_1$$

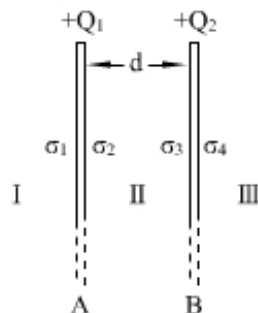


图 7-15

$$(\sigma_3 + \sigma_4) S = Q_2$$

A 板内部空间场强为零, 有 $2\pi k(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) = 0$

A 板内部空间场强为零, 有 $2\pi k(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) = 0$

$$\text{解以上四式易得 } \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}$$

有了四个面的电荷密度, I、II、III 空间的场强就好求了 [如 $E_{II} = 2\pi k(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) = 2\pi k \frac{Q_1 - Q_2}{S}$]。

最后, $U_{AB} = E_{II}d$

【答案】(1) A 板外侧电量 $\frac{Q_1 + Q_2}{2}$ 、A 板内侧电量 $\frac{Q_1 - Q_2}{2}$, B 板内侧电量 $-\frac{Q_1 - Q_2}{2}$ 、B 板外侧电量 $\frac{Q_1 + Q_2}{2}$; (2) A 板外侧空间场强 $2\pi k \frac{Q_1 + Q_2}{S}$, 方向垂直 A 板向外, A、B 板之间空间场强 $2\pi k \frac{Q_1 - Q_2}{S}$, 方向由 A 垂直指向 B, B 板外侧空间场强 $2\pi k \frac{Q_1 + Q_2}{S}$, 方向垂直 B 板向外; (3) A、B 两板的电势差为 $2\pi kd \frac{Q_1 - Q_2}{S}$, A 板电势高。

【学员思考】如果两板带等量异号的净电荷, 两板的外侧空间场强等于多少? (答: 为零。)

【学员讨论】(原模型中) 作为一个电容器, 它的“电量”是多少 (答: $\frac{Q_1 - Q_2}{2}$)?

如果在板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质, 是否会影响四个面的电荷分布 (答: 不会)? 是否会影响三个空间的场强 (答: 只会影响 II 空间的场强)?

【学员讨论】(原模型中) 我们是否可以求出 A、B 两板之间的静电力? [答: 可以; 以 A 为对象, 外侧受力 $\frac{Q_1 + Q_2}{2} \cdot \frac{E_1}{2}$ (方向相左), 内侧受力 $\frac{Q_1 - Q_2}{2} \cdot \frac{E_2}{2}$ (方向向右), 它们合成即可, 结论为 $F = \frac{2k\pi}{S} Q_1 Q_2$, 排斥力。]

【模型变换】如图 7-16 所示, 一平行板电容器, 极板面积为 S , 其上半部为真空, 而下半部充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质, 当两极板分别带上 $+Q$ 和 $-Q$ 的电量后, 试求: (1) 板上自由电荷的分布; (2) 两板之间的场强; (3) 介质表面的极化电荷。

【解说】电介质的充入虽然不能改变内表面的电量总数, 但由于改变了场强, 故对电荷的分布情况肯定有影响。设真空部分电量为 Q_1 , 介质部分电量为 Q_2 , 显然有

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

两板分别为等势体, 将电容器看成上下两个电容器的并联, 必有

$$U_1 = U_2 \text{ 即 } \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}, \text{ 即 } \frac{Q_1}{S/2} = \frac{Q_2}{\epsilon_r \cdot S/2}$$

$$\frac{Q_1}{4\pi kd} = \frac{Q_2}{4\pi kd}$$

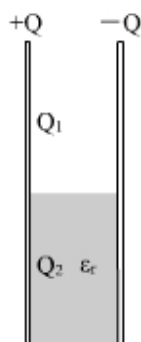


图 7-16

解以上两式即可得 Q_1 和 Q_2 。

场强可以根据 $E = \frac{U}{d}$ 关系求解，比较常规（上下部分的场强相等）。

上下部分的电量是不等的，但场强居然相等，这怎么解释？从公式的角度看， $E = 2\pi k\sigma$ （单面平板），当 k 、 σ 同时改变，可以保持 E 不变，但这是一种结论所展示的表象。从内在的角度看， k 的改变正是由于极化电荷的出现所致，也就是说，极化电荷的存在相当于在真空中形成了一个新的电场，正是这个电场与自由电荷（在真空中）形成的电场叠加成为 E_2 ，所以

$$E_2 = 4\pi k(\sigma - \sigma') = 4\pi k\left(\frac{Q_2}{S/2} - \frac{Q'}{S/2}\right)$$

请注意：①这里的 σ' 和 Q' 是指极化电荷的面密度和总量；② $E = 4\pi k\sigma$ 的关系是由两个带电面叠加的合效果。

【答案】(1) 真空部分的电量为 $\frac{1}{1+\epsilon_r}Q$ ，介质部分的电量为 $\frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r}Q$ ；(2) 整个空间的场强均为 $\frac{8\pi kQ}{(1+\epsilon_r)S}$ ；(3) $\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}Q$ 。

【思考应用】一个带电量为 Q 的金属小球，周围充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质，试求与导体表面接触的介质表面的极化电荷量。

【解】略。

【答】 $Q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q$ 。

四、电容器的相关计算

【物理情形 1】由许多个电容为 C 的电容器组成一个如图 7-17 所示的多级网络，试问：(1) 在最后一级的右边并联一个多大电容 C' ，可使整个网络的 A、B 两端电容也为 C' ？(2) 不接 C' ，但无限地增加网络的级数，整个网络 A、B 两端的总电容是多少？

【模型分析】这是一个练习电容电路简化基本事例。

第(1)问中，未给出具体级数，一般结论应适用特殊情形：令级数为 1，于是

$$\frac{1}{C+C'} + \frac{1}{C} = \frac{1}{C'} \text{ 解 } C' \text{ 即可。}$$

第(2)问中，因为“无限”，所以“无限加一级后仍为无限”，不难得出方程

$$\frac{1}{C+C_{\text{总}}} + \frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\text{总}}}$$

【答案】(1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}C$ ；(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}C$ 。

【相关模型】在图 7-18 所示的电路中，已知 $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1\mu\text{F}$ ， $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2\mu\text{F}$ ， $C_8 = C_{10} = 3\mu\text{F}$ ，试求 A、B 之间的等效电容。

【解说】对于既非串联也非并联的电路，需

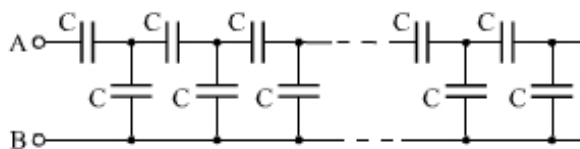


图 7-17

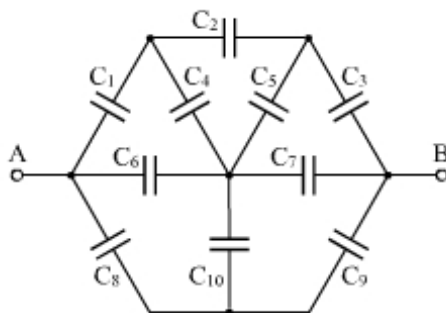


图 7-18

要用到一种“ $\Delta \rightarrow Y$ 型变换”，参见图 7-19，根据三个端点之间的电容等效，容易得出定式——

$$\Delta \rightarrow Y \text{ 型: } C_a = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_3}$$

$$C_b = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_1}$$

$$C_c = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2}$$

$$Y \rightarrow \Delta \text{ 型: } C_1 = \frac{C_a C_c}{C_a + C_b + C_c}$$

$$C_2 = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b + C_c}$$

$$C_3 = \frac{C_b C_c}{C_a + C_b + C_c}$$

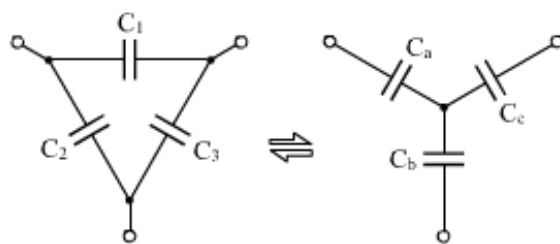


图 7-19

有了这样的定式后，我们便可以进行如图 7-20 所示的四步电路简化（为了方便，电容不宜引进新的符号表达，而是直接将变换后的量值标示在图中）——

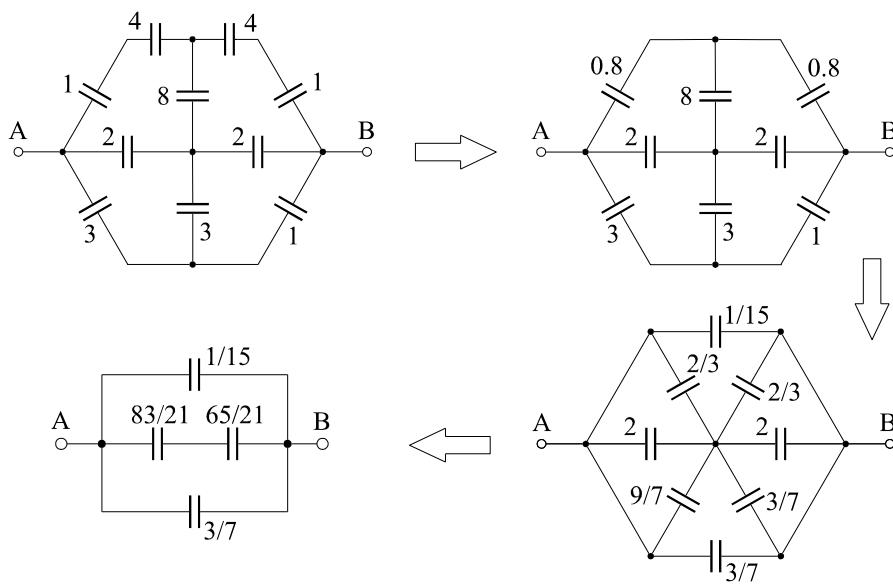


图 7-20

【答】约 $2.23 \mu\text{F}$ 。

【物理情形 2】如图 7-21 所示的电路中，三个电容器完全相同，电源电动势 $\varepsilon_1 = 3.0\text{V}$ ， $\varepsilon_2 = 4.5\text{V}$ ，开关 K_1 和 K_2 接通前电容器均未带电，试求 K_1 和 K_2 接通后三个电容器的电压 U_{ao} 、 U_{bo} 和 U_{co} 各为多少。

【解说】这是一个考查电容器电路的基本习题，解题的关键是要抓与 o 相连的三块极板（俗称“孤岛”）的总电量为零。

$$\text{电量关系: } \frac{U_{ao}}{C} + \frac{U_{bo}}{C} + \frac{U_{co}}{C} = 0$$

$$\text{电势关系: } \varepsilon_1 = U_{ao} + U_{ob} = U_{ao} - U_{bo}$$

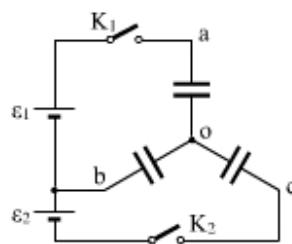


图 7-21

$$\varepsilon_2 = U_{b_0} + U_{o_c} = U_{b_0} - U_{c_0}$$

解以上三式即可。

【答】 $U_{a_0} = 3.5V$, $U_{b_0} = 0.5V$, $U_{c_0} = -4.0V$ 。

【伸展应用】如图 7-22 所示，由 n 个单元组成的电容器网络，每一个单元由三个电容器连接而成，其中有两个的电容为 $3C$ ，另一个的电容为 $2C$ 。以 a 、 b 为网络的输入端， a' 、 b' 为输出端，今在 a 、 b 间加一个恒定电压 U ，而在 a' 、 b' 间接一个电容为 C 的电容器，试求：(1) 从第 k 单元输入端算起，后面所有电容器储存的总电能；(2) 若把第一单元输出端与后面断开，再除去电源，并把它的输入端短路，则这个单元的三个电容器储存的总电能是多少？

【解说】这是一个结合网络计算和“孤岛现象”的典型事例。

(1) 类似“物理情形 1”的计算，可得 $C_{\text{总}} = C_k = C$ 所以，从输入端算起，第 k 单元后的电压的经验公式为

$$U_k = \frac{U}{3^{k-1}}$$

再算能量储存就不难了。

(2) 断开前，可以算出第一单元的三个电容器、以及后面“系统”的电量分配如图 7-23 中的左图所示。这时， C_1 的右板和 C_2 的左板（或 C_2 的下板和 C_3 的右板）形成“孤岛”。此后，电容器的相互充电过程 (C_3 类比为“电源”) 满足——

$$\text{电量关系: } Q_1' = Q_3'$$

$$Q_2' + Q_3' = \frac{Q}{3}$$

$$\text{电势关系: } \frac{Q_3'}{3C} + \frac{Q_1'}{3C} = \frac{Q_2'}{2C}$$

从以上三式解得 $Q_1' = Q_3' = \frac{Q}{7}$, $Q_2' = \frac{4Q}{21}$, 这样系统的储能就可以用

$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 得出了。

【答】(1) $E_k = \frac{CU^2}{2 \cdot 3^{2k-1}}$; (2) $\frac{CU^2}{63}$ 。

【学员思考】图 7-23 展示的过程中，始末状态的电容器储能是否一样？（答：不一样；在相互充电的过程中，导线消耗的焦耳热已不可忽略。）

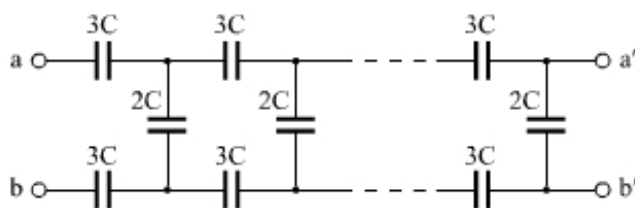


图 7-22

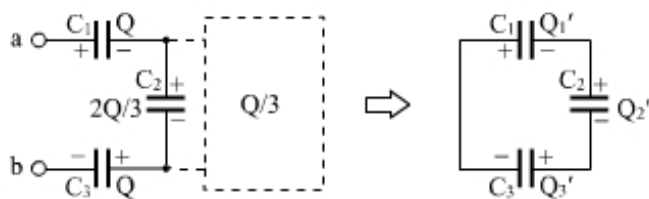


图 7-23

第九部分 稳恒电流

第一讲 基本知识介绍

第八部分《稳恒电流》包括两大块：一是“恒定电流”，二是“物质的导电性”。前者是对于电路的外部计算，后者则是深入微观空间，去解释电流的成因和比较不同种类的物质导电的情形有什么区别。

应该说，第一块的知识 and 高考考纲对应得比较好，深化的部分是对复杂电路的计算（引入了一些新的处理手段）。第二块虽是全新的内容，但近几年的考试已经很少涉及，以至于很多奥赛培训资料都把它删掉了。鉴于在奥赛考纲中这部分内容还保留着，我们还是想粗略地介绍一下。

一、欧姆定律

1、电阻定律

a、电阻定律 $R = \rho \frac{l}{S}$

b、金属的电阻率 $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$

2、欧姆定律

a、外电路欧姆定律 $U = IR$ ，顺着电流方向电势降落

b、含源电路欧姆定律

在如图 8-1 所示的含源电路中，从 A 点到 B 点，遵照原则：①遇电阻，顺电流方向电势降落（逆电流方向电势升高）②遇电源，正极到负极电势降落，负极到正极电势升高（与电流方向无关），可以得到以下关系

$$U_A - IR - \varepsilon - Ir = U_B$$

这就是含源电路欧姆定律。

c、闭合电路欧姆定律

在图 8-1 中，若将 A、B 两点短接，则电流方向只可能向左，含源电路欧姆定律成为

$$U_A + IR - \varepsilon + Ir = U_B = U_A$$

$$\text{即 } \varepsilon = IR + Ir, \text{ 或 } I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

这就是闭合电路欧姆定律。值得注意的的是：①对于复杂电路，“干路电流 I”不能做绝对的理解（任何要考察的一条路均可视为干路）；②电源的概念也是相对的，它可以是多个电源的串、并联，也可以是电源和电阻组成的系统；③外电阻 R 可以是多个电阻的串、并联或混联，但不能包含电源。

二、复杂电路的计算

1、戴维南定理：一个由独立源、线性电阻、线性受控源组成的二端网络，可以用一个电压源和电阻串联的二端网络来等效。（事实上，也可等效为“电流

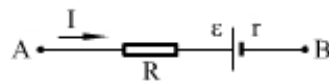


图 8-1

源和电阻并联的二端网络”——这就成了诺顿定理。)

应用方法：其等效电路的电压源的电动势等于网络的开路电压，其串联电阻等于从端钮看进去该网络中所有独立源为零值时的等效电阻。

2、基尔霍夫（克希科夫）定律

a、基尔霍夫第一定律：在任一时刻流入电路中某一分节点的电流强度的总和，等于从该点流出的电流强度的总和。

例如，在图 8-2 中，针对节点 P，有

$$I_2 + I_3 = I_1$$

基尔霍夫第一定律也被称为“节点电流定律”，它是电荷守恒定律在电路中的具体体现。

对于基尔霍夫第一定律的理解，近来已经拓展为：流入电路中某一“包容块”的电流强度的总和，等于从该“包容块”流出的电流强度的总和。

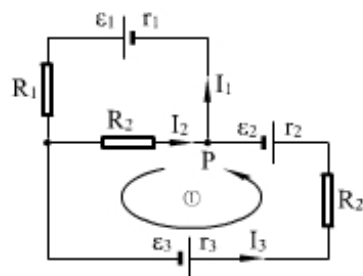


图 8-2

b、基尔霍夫第二定律：在电路中任取一闭合回路，并规定正的绕行方向，其中电动势的代数和，等于各部分电阻（在交流电路中为阻抗）与电流强度乘积的代数和。

例如，在图 8-2 中，针对闭合回路①，有

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = I_3 (r_3 + R_2 + r_2) - I_2 R_2$$

基尔霍夫第二定律事实上是含源部分电路欧姆定律的变体（☆同学们可以列方程 $U_p = \dots = U_p$ 得到和上面完全相同的式子）。

3、Y-Δ 变换

在难以看清串、并联关系的电路中，进行“Y 型-Δ 型”的相互转换常常是必要的。在图 8-3 所示的电路中

☆同学们可以证明 $\Delta \rightarrow Y$ 的结论...

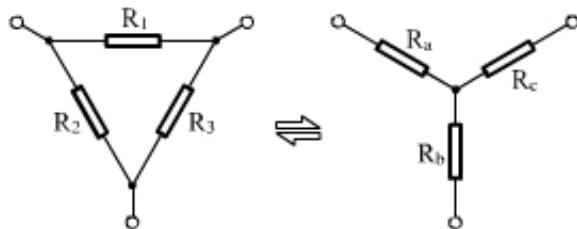


图 8-3

$$R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$Y \rightarrow \Delta$ 的变换稍稍复杂一些，但我们仍然可以得到

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a}$$

三、电功和电功率

1、电源

使其他形式的能量转变为电能的装置。如发电机、电池等。发电机是将机械能转变为电能；干电池、蓄电池是将化学能转变为电能；光电池是将光能转变为电能；原子电池是将原子核放射能转变为电能；在电子设备中，有时也把变换电能形式的装置，如整流器等，作为电源看待。

电源电动势定义为电源的开路电压，内阻则定义为没有电动势时电路通过电源所遇到的电阻。据此不难推出相同电源串联、并联，甚至不同电源串联、并联的时的电动势和内阻的值。

例如，电动势、内阻分别为 ε_1 、 r_1 和 ε_2 、 r_2 的电源并联，构成的新电源的电动势 ε 和内阻 r 分别为（☆师生共同推导…）

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

2、电功、电功率

电流通过电路时，电场力对电荷作的功叫做电功 W 。单位时间内电场力所作的功叫做电功率 P 。

计算时，只有 $W = UIt$ 和 $P = UI$ 是完全没有条件的，对于不含源的纯电阻，电功和焦耳热重合，电功率则和热功率重合，有 $W = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$ 和 $P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ 。

对非纯电阻电路，电功和电热的关系依据能量守恒定律求解。

四、物质的导电性

在不同的物质中，电荷定向移动形成电流的规律并不是完全相同的。

1、金属中的电流

即通常所谓的不含源纯电阻中的电流，规律遵从“外电路欧姆定律”。

2、液体导电

能够导电的液体叫电解液（不包括液态金属）。电解液中离解出的正负离子导电是液体导电的特点（如：硫酸铜分子在通常情况下是电中性的，但它在溶液里受水分子的作用就会离解成铜离子 Cu^{2+} 和硫酸根离子 SO_4^{2-} ，它们在电场力的作用下定向移动形成电流）。

在电解液中加电场时，在两个电极上（或电极旁）同时产生化学反应的过程叫作“电解”。电解的结果是在两个极板上（或电极旁）生成新的物质。

液体导电遵从法拉第电解定律——

法拉第电解第一定律：电解时在电极上析出或溶解的物质的质量和电流强度、跟通电时间成正比。表达式： $m = kIt = KQ$ （式中 Q 为析出质量为 m 的物质所需要的电量； K 为电化当量，电化当量的数值随着被析出的物质种类而不同，某种物质的电化当量在数值上等于通过 1C 电量时析出的该种物质的质量，其单位为 kg/C 。）

法拉第电解第二定律：物质的电化当量 K 和它的化学当量成正比。某种物质的化学当量是该物质的摩尔质量 M （克原子量）和它的化合价 n 的比值，即 $K = \frac{M}{Fn}$ ，而 F 为法拉第常数，对任何物质都相同， $F = 9.65 \times 10^4 \text{C/mol}$ 。

将两个定律联立可得： $m = \frac{M}{Fn} Q$ 。

3、气体导电

气体导电是很不容易的，它的前提是气体中必须出现可以定向移动的离子或电子。按照“载流子”出现方式的不同，可以把气体放电分为两大类——

a、被激放电

在地面放射性元素的辐照以及紫外线和宇宙射线等的作用下，会有少量气体分子或原子被电离，或在有些灯管内，通电的灯丝也会发射电子，这些“载流子”均会在电场力作用下产生定向移动形成电流。这种情况下的电流一般比较微弱，且遵从欧姆定律。典型的被激放电情形有

b、自激放电

但是，当电场足够强，电子动能足够大，它们和中性气体相碰撞时，可以使中性分子电离，即所谓碰撞电离。同时，在正离子向阴极运动时，由于以很大的速度撞到阴极上，还可能从阴极表面上打出电子来，这种现象称为二次电子发射。碰撞电离和二次电子发射使气体中在很短的时间内出现了大量的电子和正离子，电流亦迅速增大。这种现象被称为自激放电。自激放电不遵从欧姆定律。

常见的自激放电有四大类：辉光放电、弧光放电、火花放电、电晕放电。

4、超导现象

据金属电阻率和温度的关系，电阻率会随着温度的降低而降低。当电阻率降为零时，称为超导现象。电阻率为零时对应的温度称为临界温度。超导现象首先是荷兰物理学家昂尼斯发现的。

超导的应用前景是显而易见且相当广阔的。但由于一般金属的临界温度一般都非常低，故产业化的价值不大，为了解决这个矛盾，科学家们致力于寻找或合成临界温度比较切合实际的材料就成了当今前沿科技的一个热门领域。当前人们的研究主要是集中在合成材料方面，临界温度已经超过 100K，当然，这个温度距产业化的期望值还很远。

5、半导体

半导体的电阻率介于导体和绝缘体之间，且 ρ 值随温度的变化呈现“反常”规律。

组成半导体的纯净物质这些物质的化学键一般都是共价键，其稳固程度介于离子键和金属键之间，这样，价电子从外界获得能量后，比较容易克服共价键的束缚而成为自由电子。当有外电场存在时，价电子移动，同时造成“空穴”（正电）的反向移动，我们通常说，半导体导电时，存在两种载流子。只是在常态下，半导体中的载流子浓度非常低。

半导体一般是四价的，如果在半导体掺入三价元素，共价键中将形成电子缺乏的局面，使“空穴”载流子显著增多，形成 P 型半导体。典型的 P 型半导体是硅中掺入微量的硼。如果掺入五价元素，共价键中将形成电子多余的局面，使电子载流子显著增多，形成 N 型半导体。典型的 N 型半导体是硅中掺入微量的磷。

如果将 P 型半导体和 N 型半导体烧结，由于它们导电的载流子类型不同，将会随着组合形式的不同而出现一些非常独特的物理性质，如二极管的单向导电性和三极管的放大性。

第二讲 重要模型和专题

一、纯电阻电路的简化和等效

1、等势缩点法

将电路中电势相等的点缩为一点，是电路简化的途径之一。至于哪些点的电势相等，则需要具体问题具体分析——

【物理情形 1】在图 8-4 甲所示的电路中， $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$ ，试

求 A、B 两端的等效电阻 R_{AB} 。

【模型分析】这是一个基本的等势缩点的事例，用到的是物理常识是：导线是等势体，用导线相连的点可以缩为一点。将图 8-4 甲图中的 A、D 缩为一点 A 后，成为图 8-4 乙图

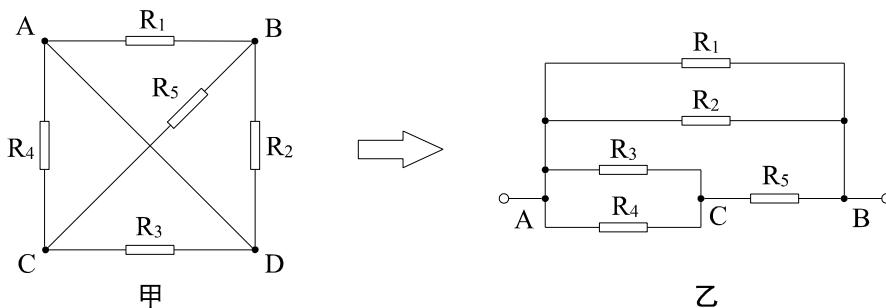


图 8-4

对于图 8-4 的乙图，求 R_{AB} 就容易了。

【答案】 $R_{AB} = \frac{3}{8} R$ 。

【物理情形 2】在图 8-5 甲所示的电路中， $R_1 = 1\Omega$ ， $R_2 = 4\Omega$ ， $R_3 = 3\Omega$ ， $R_4 = 12\Omega$ ， $R_5 = 10\Omega$ ，试求 A、B 两端的等效电阻 R_{AB} 。

【模型分析】这就是所谓的桥式电路，这里先介绍简单的情形：将 A、B 两端接入电源，并假设 R_5 不存在，C、D 两点的电势有什么关系？

☆学员判断...→结论：相等。

因此，将 C、D 缩为一点 C 后，电路等效为图 8-5 乙

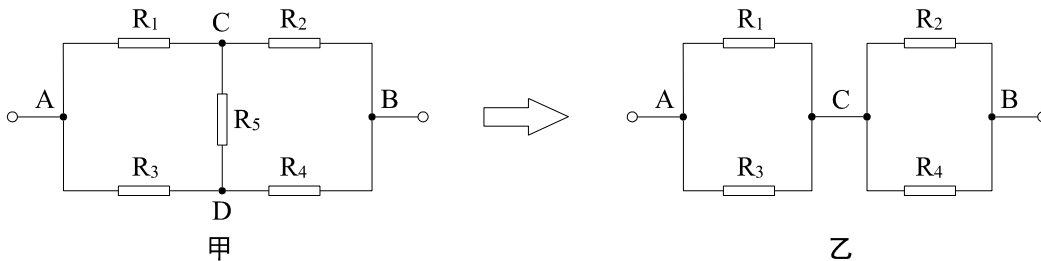


图 8-5

对于图 8-5 的乙图，求 R_{AB} 是非常容易的。事实上，只要满足 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ 的关系，我们把桥式电路称为“平衡电桥”。

【答案】 $R_{AB} = \frac{15}{4} \Omega$ 。

〔相关介绍〕英国物理学家惠斯登曾将图 8-5 中的 R_5 换成灵敏电流计 G ，将 R_1 、 R_2 中的某一个电阻换成待测电阻、将 R_3 、 R_4 换成带触头的电阻丝，通过调节触头 P 的位置，观察电流计示数为零来测量带测电阻 R_x 的值，这种测量电阻的方案几乎没有系统误差，历史上称之为“惠斯登电桥”。

请学员们参照图 8-6 思考惠斯登电桥测量电

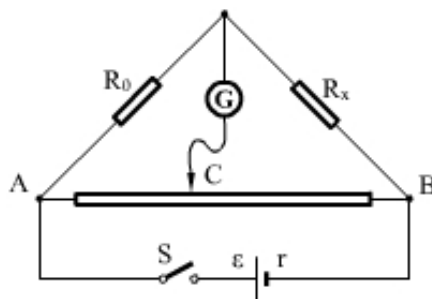


图 8-6

阻的原理，并写出 R_x 的表达式（触头两端的电阻丝长度 L_{AC} 和 L_{CB} 是通过设置好的标尺读出的）。

☆学员思考、计算…

【答案】 $R_x = \frac{L_{CB}}{L_{AC}} R_0$ 。

【物理情形 3】在图 8-7 甲所示的有限网络中，每一小段导体的电阻均为 R ，试求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} 。

【模型分析】在本模型中，我们介绍“对称等势”的思想。当我们将 A、B 两端接入电源，电流从 A 流向 B 时，相对 A、B 连线对称的点电流流动的情形必然是完全相同的，即：在图 8-7 乙图中标号为 1 的点电势彼此相等，标号为 2 的点电势彼此相等…。将它们缩点后，1 点和 B 点之间的等效电路如图 8-7 丙所示。

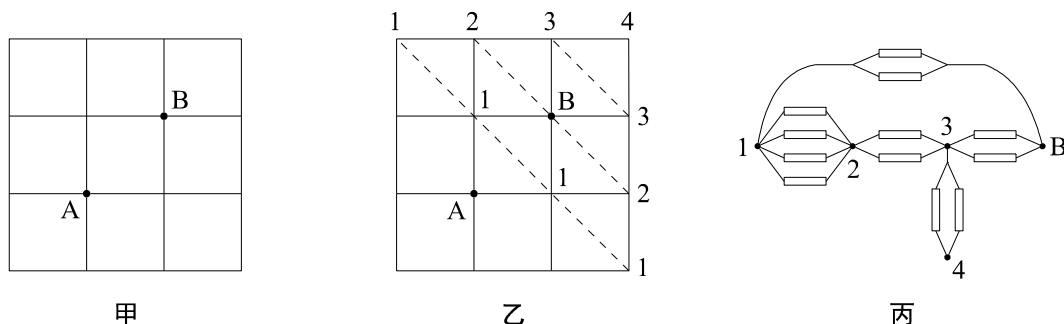


图 8-7

不难求出， $R_{1B} = \frac{5}{14} R$ ，而 $R_{AB} = 2R_{1B}$ 。

【答案】 $R_{AB} = \frac{5}{7} R$ 。

2、 $\Delta \rightarrow Y$ 型变换

【物理情形】在图 8-5 甲所示的电路中，将 R_1 换成 2Ω 的电阻，其它条件不变，再求 A、B 两端的等效电阻 R_{AB} 。

【模型分析】此时的电桥已经不再“平衡”，故不能采取等势缩点法简化电路。这里可以将电路的左边或右边看成 Δ 型电路，然后进行 $\Delta \rightarrow Y$ 型变换，具体操作如图 8-8 所示。

根据前面介绍的定式，有

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{2 \times 3}{2 + 3 + 10} = \frac{2}{5} \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{2 \times 10}{2 + 3 + 10} = \frac{4}{3} \Omega$$

$$R_c = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{3 \times 10}{2 + 3 + 10} = 2 \Omega$$

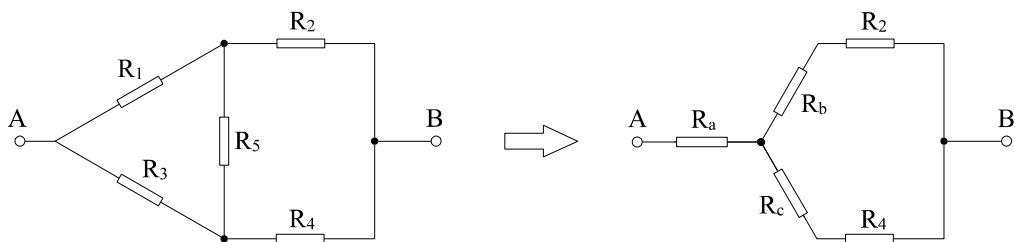


图 8-8

再求 R_{AB} 就容易了。

【答案】 $R_{AB} = \frac{618}{145} \Omega$ 。

3、电流注入法

【物理情形】对图 8-9 所示无限网络，求 A、B 两点间的电阻 R_{AB} 。

【模型分析】显然，等势缩点和 $\Delta \rightarrow Y$ 型变换均不适用这种网络的计算。这里介绍“电流注入法”的应用。

应用电流注入法的依据是：对于任何一个等效电阻 R ，欧姆定律都是适用的，而且，对于每一段导体，欧姆定律也是适用的。

现在，当我们将无穷远接地，A 点接电源正极，从 A 点注入电流 I 时，AB 小段导体的电流必为 $I/3$ ；

当我们将无穷远接地，B 点接电源负极，从 B 点抽出电流 I 时，AB 小段导体的电流必为 $I/3$ ；

那么，当上面“注入”和“抽出”的过程同时进行，AB 小段导体的电流必为 $2I/3$ 。

最后，分别对导体和整个网络应用欧姆定律，即不难求出 R_{AB} 。

【答案】 $R_{AB} = \frac{2}{3}R$ 。

【相关介绍】事实上，电流注入法是一个解复杂电路的基本工具，而不是仅仅可以适用于无限网络。下面介绍用电流注入法解图 8-8 中桥式电路（不平衡）的 R_{AB} 。

从 A 端注入电流 I ，并设流过 R_1 和 R_2 的电流分别为 I_1 和 I_2 ，则根据基尔霍夫第一定律，其它三个电阻的电流可以表示为如图 8-10 所示。

然后对左边回路用基尔霍夫第二定律，有

$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_5 - (I - I_1) R_3 = 0$$

$$\text{即 } 2I_1 + 10(I_1 - I_2) - 3(I - I_1) = 0$$

$$\text{整理后得 } 15I_1 - 10I_2 = 3I \quad \text{①}$$

对右边回路用基尔霍夫第二定律，有

$$I_2 R_2 - (I - I_2) R_4 - (I_1 - I_2) R_5 = 0$$

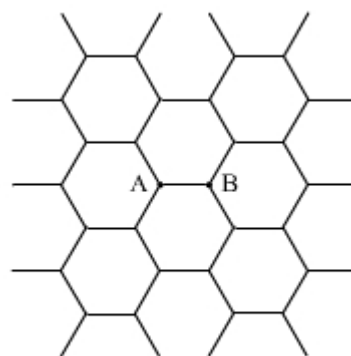


图 8-9

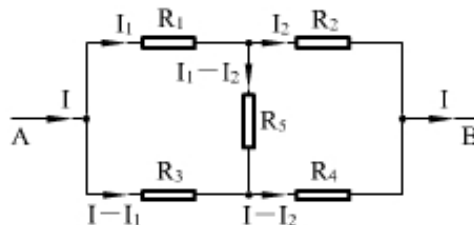


图 8-10

$$\text{即 } 4I_2 - 12(I - I_2) - 10(I_1 - I_2) = 0$$

$$\text{整理后得 } -5I_1 + 13I_2 = 6I \quad \text{②}$$

$$\text{解①②两式, 得 } I_1 = \frac{99}{145}I, \quad I_2 = \frac{21}{29}I$$

$$\text{很显然 } U_A - I_1R_1 - I_2R_2 = U_B$$

$$\text{即 } U_{AB} = 2 \times \frac{99}{145}I + 4 \times \frac{21}{29}I = \frac{618}{145}I$$

$$\text{最后对整块电路用欧姆定律, 有 } R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{618}{145} \Omega。$$

4、添加等效法

【物理情形】在图 8-11 甲所示无限网络中，每个电阻的阻值均为 R ，试求 A、B 两点间的电阻 R_{AB} 。

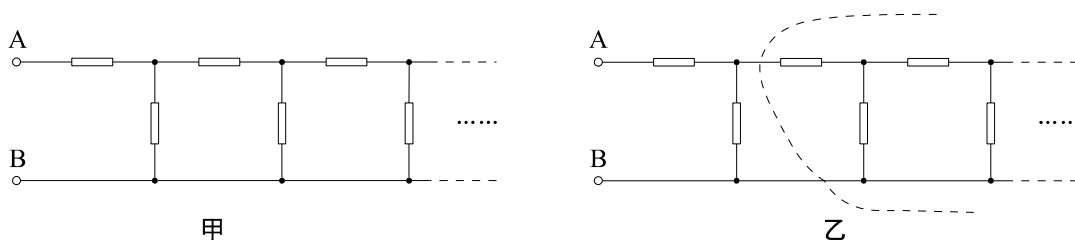


图 8-11

【模型分析】解这类问题，我们要用到一种数学思想，那就是：无穷大和有限数的和仍为无穷大。在此模型中，我们可以将“并联一个 R 再串联一个 R ”作为电路的一级，总电路是这样无穷级的叠加。在图 8-11 乙图中，虚线部分右边可以看成原有无限网络，当它添加一级后，仍为无限网络，即

$$R_{AB} // R + R = R_{AB}$$

解这个方程就得出了 R_{AB} 的值。

$$\text{【答案】 } R_{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R。$$

【学员思考】本题是否可以用“电流注入法”求解？

【解说】可以，在 A 端注入电流 I 后，设第一级的并联电阻分流为 I_1 ，则结合基尔霍夫第一定律和应有的比例关系，可以得出相应的电流值如图 8-12 所示

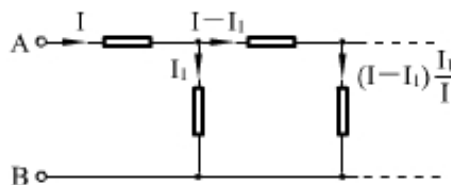


图 8-12

对图中的中间回路，应用基尔霍夫第二定律，有

$$(I - I_1)R + (I - I_1) \frac{1}{I}R - I_1R = 0$$

$$\text{解得 } I_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}I$$

$$\text{很显然 } U_A - IR - I_1R = U_B$$

$$\text{即 } U_{AB} = IR + \frac{\sqrt{5}-1}{2}IR = \frac{1+\sqrt{5}}{2}IR$$

最后， $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R$ 。

【综合应用】在图 8-13 甲所示的三维无限网络中，每两个节点之间的导体电阻均为 R ，试求 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} 。

【解说】当 A、B 两端接入电源时，根据“对称等势”的思想可知，C、D、E…各点的电势是彼此相等的，电势相等的点可以缩为一点，它们之间的电阻也可以看成不存在。这里取后一中思想，将 CD 间的导体、DE 间的导体…取走后，电路可以等效为图 8-13 乙所示的二维无限网络。

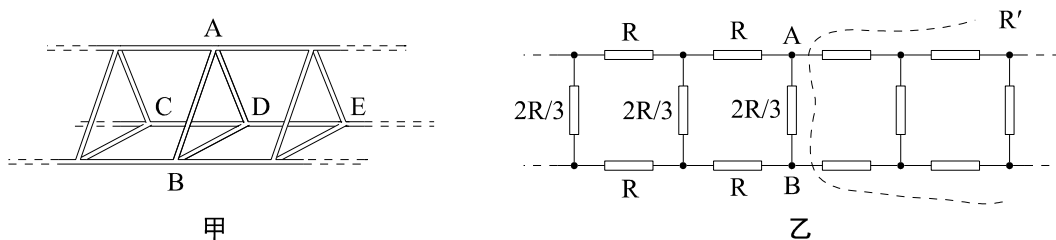


图 8-13

对于这个二维无限网络，不难求出 $R' = \frac{3+\sqrt{21}}{3} R$

显然， $R_{AB} = R' \parallel \frac{2R}{3} \parallel R'$

【答案】 $R_{AB} = \frac{2}{\sqrt{21}} R$ 。

二、含源电路的简化和计算

1、戴维南定理的应用

【物理情形】在如图 8-14 甲所示电路中，电源 $\varepsilon = 1.4V$ ，内阻不计， $R_1 = R_4 = 2\Omega$ ， $R_2 = R_3 = R_5 = 1\Omega$ ，试用戴维南定理求流过电阻 R_5 的电流。

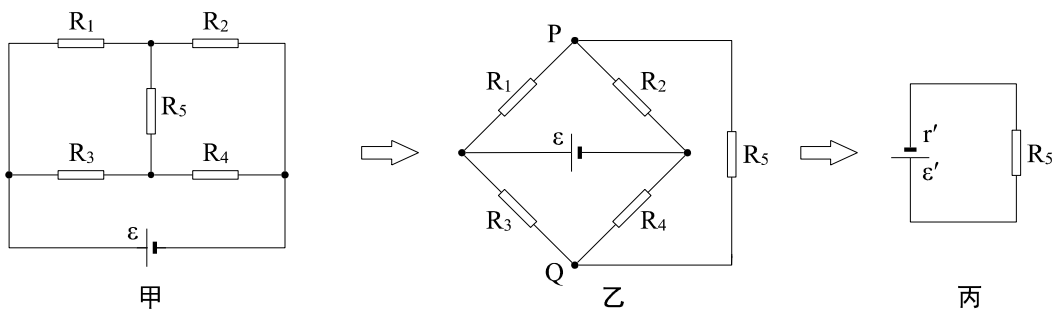


图 8-14

【模型分析】用戴维南定理的目的是将电源系统或与电源相关联的部分电路等效为一个电源，然后方便直接应用闭合电路欧姆定律。此电路中的电源只有一个，我们可以援用后一种思路，将除 R_5 之外的电阻均看成“与电源相关联”部分，于是——

将电路做“拓扑”变换，成图 8-14 乙图。这时候，P、Q 两点可看成“新电源”的两极，设新电源的电动势为 ε' ，内阻为 r' ，则

$$r' = R_1 // R_2 + R_3 // R_4 = \frac{4}{3} \Omega$$

ε' 为 P、Q 开路时的电压。开路时， R_1 的电流 I_1 和 R_3 的电流 I_3 相等， $I_1 = I_3$
 $= \frac{\varepsilon}{(R_1+R_2) \parallel (R_3+R_4)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \text{ A}$ ，令“老电源”的负极接地，则 $U_p = I_1 R_2 = \frac{7}{15} \text{ V}$ ，

$U_q = I_3 R_4 = \frac{14}{15} \text{ V}$ ，所以 $\varepsilon' = U_{qp} = \frac{7}{15} \text{ V}$

最后电路演化成图 8-14 丙时， R_5 的电流就好求了。

【答案】 R_5 上电流大小为 0.20A，方向（在甲图中）向上。

2、基尔霍夫定律的应用

基尔霍夫定律的内容已经介绍，而且在（不含源）部分电路中已经做过了应用。但是在比较复杂的电路中，基尔霍夫第一定律和第二定律的独立方程究竟有几个？这里需要补充一个法则，那就是——

基尔霍夫第一定律的独立方程个数为节点总数减一；

基尔霍夫第二定律的独立方程个数则为独立回路的个数。而且，独立回路的个数 m 应该这样计算

$$m = p - n + 1$$

其中 p 为支路数目（不同电流值的数目）， n 为节点个数。譬如，在图 8-15 所示的三个电路中， m 应该这样计算

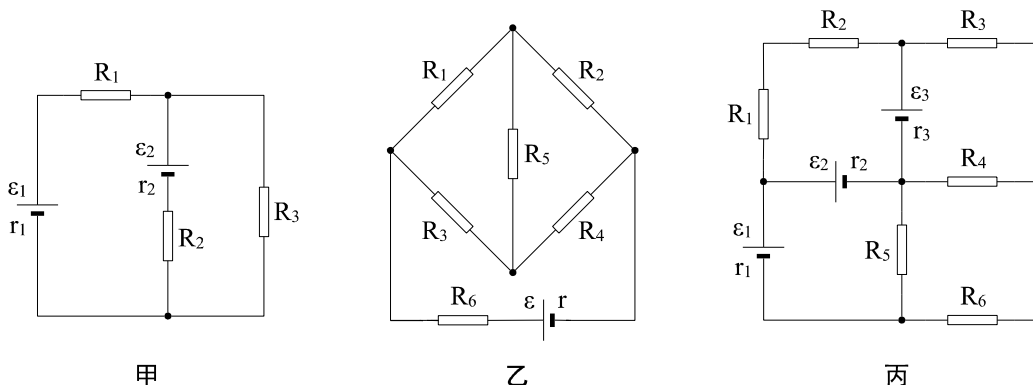


图 8-15

甲图， $p = 3$ ， $n = 2$ ， $m = 3 - 2 + 1 = 2$

乙图， $p = 6$ ， $n = 4$ ， $m = 6 - 4 + 1 = 3$

丙图， $p = 8$ ， $n = 5$ ， $m = 8 - 5 + 1 = 4$

以上的数目也就是三个电路中基尔霍夫第二定律的独立方程个数。

思考启发：学员观察上面三个电路中 m 的结论和电路的外部特征，能得到什么结果？

☆学员： m 事实上就是“不重叠”的回路个数！（可在丙图的基础上添加一支路验证…）

【物理情形 1】在图 8-16 所示的电路中， $\varepsilon_1 = 32\text{V}$ ， $\varepsilon_2 = 24\text{V}$ ，两电源的内阻均不计， $R_1 = 5\Omega$ ， $R_2 = 6\Omega$ ， $R_3 = 54\Omega$ ，求各支路的电流。

【模型分析】这是一个基尔霍夫定律的基本应用，第一定律的方程个数为 $n - 1 = 2$ ，第二方程的个数为 $p - n + 1 = 2$

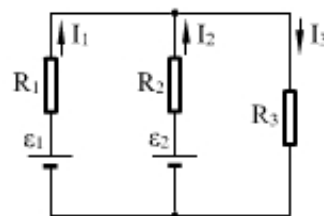


图 8-16

由第一定律，有 $I_3 = I_1 + I_2$

由第二定律，左回路有 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$

左回路有 $\varepsilon_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3$

代入数字后，从这三个方程不难解出

$I_1 = 1.0\text{A}$ ， $I_2 = -0.5\text{A}$ ， $I_3 = 0.5\text{A}$

这里 I_2 的负号表明实际电流方向和假定方向相反。

【答案】 R_1 的电流大小为 1.0A ，方向向上， R_2 的电流大小为 0.5A ，方向向下， R_3 的电流大小为 0.5A ，方向向下。

【物理情形 2】用基尔霍夫定律解图 8-14 甲所示电路中 R_5 的电流（所有已知条件不变）。

【模型分析】此电路 $p = 6$ ， $n = 4$ ，故基尔霍夫第一定律方程个数为 3，第二定律方程个数为 3。

为了方便，将独立回路编号为 I、II 和 III，电流只设了三个未知量 I_1 、 I_2 和 I_3 ，其它三个电流则直接用三个第一定律方程表达出来，见图 8-17。这样，我们只要解三个基尔霍夫第二定律方程就可以了。

对 I 回路，有 $I_2 R_1 + I_1 R_5 - I_3 R_3 = 0$

即 $2I_2 + 1I_1 - 1I_3 = 0$

①

对 II 回路，有 $(I_2 - I_1)R_2 - (I_1 + I_3)R_4 - I_1 R_5 = 0$

即 $1(I_2 - I_1) - 2(I_1 + I_3) - 1I_1 = 0$

②

对 III 回路，有 $\varepsilon = I_3 R_3 + (I_1 + I_3)R_4$

即 $1.4 = 1I_3 + 2(I_1 + I_3)$

③

解①②③式不难得出 $I_1 = -0.2\text{A}$ 。（ $I_2 = 0.4\text{A}$ ， $I_3 = 0.6\text{A}$ ）

【答案】略。

【物理情形 3】求解图 8-18 所示电路中流过 30Ω 电阻的电流。

【模型分析】基尔霍夫第一定律方程 2 个，已在图中体现
基尔霍夫第二定律方程 3 个，分别为——

对 I 回路，有 $100 = (I_2 - I_1) + I_2 \cdot 10$

①

对 II 回路，有 $40 = I_2 \cdot 10 + I_1 \cdot 30 - I_3 \cdot 10$

②

对 III 回路，有 $100 = I_3 \cdot 10 + (I_1 + I_3) \cdot 10$

③

解①②③式不难得出 $I_1 = 1.0\text{A}$ 。（ $I_2 = 5.5\text{A}$ ， $I_3 = 4.5\text{A}$ ）

【答案】大小为 1.0A ，方向向左。

【小结】解含源电路我们引进了戴维南定理和基尔霍夫定律两个工具。原则上，对任何一个问题，两种方法都可以用。但是，当我们面临的只是求某一条支路的电流，则用戴维南定理较好，如果要求求出多个（或所有）支路的电流，则用基尔霍夫定律较好。而且我们还必须看到，随着独立回路个数的增多，基尔霍夫第二定律的方程随之增多，解题的麻烦程度随之增大。

三、液体导电及其它

【物理情形】已知法拉第恒量 $F = 9.65 \times 10^4 \text{C/mol}$ ，金的摩尔

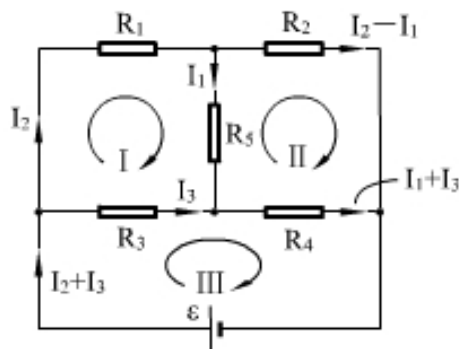


图 8-17

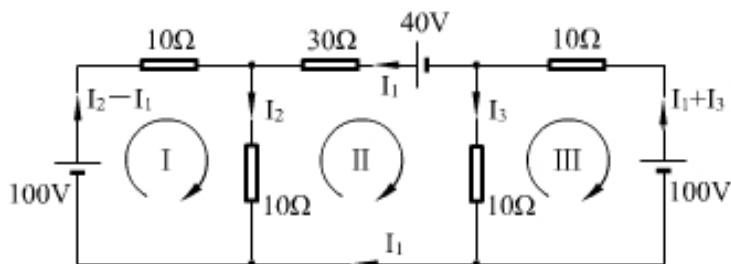


图 8-18

质量为 0.1972kg/mol ，金的化合价为 3，要想在电解池中析出 1g 金，需要通过多少电量？金是在电解池的正极板还是在负极板析出？

【解说】法拉第电解定律（综合形式）的按部就班应用，即 $Q = \frac{mFn}{M}$ ，代入相关数据（其中 $m = 1.0 \times 10^{-3}\text{kg}$ ， $n = 3$ ）即可。

【答案】需要 $1.47 \times 10^3\text{C}$ 电量，金在负极板析出。

【相关应用】在图 8-19 所示的装置中，如果在 120 分钟内淀积 3.0×10^{22} 个银原子，银的化合价为 1。在电流表中显示的示数是多少？若将阿弗伽德罗常数视为已知量，试求法拉第恒量。

【解说】第一问根据电流定义即可求得；

$$\text{第二问 } F = \frac{QM}{mn} = \frac{3.0 \times 10^{22} \times 1.6 \times 10^{-19}\text{M}}{6.02 \times 10^{23}} \text{M}$$

【答案】 0.667A ； $9.63 \times 10^4\text{C/mol}$ 。

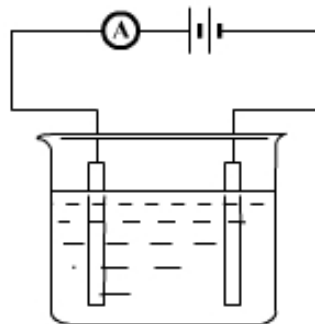


图 8-19

四、问题补遗——欧姆表

图 8-20 展示了欧姆表的基本原理图（未包括换档电路），虚线方框内是欧姆表的内部结构，它包含表头 G 、直流电源 ε （常用干电池）及电阻 R_0 。

当被测电阻 R_x 接入电路时，表头 G 电流

$$I = \frac{\varepsilon}{R_g + r + R_0 + R_x}$$

可以看出，对给定的欧姆表， I 与 R_x 有一一对应的关系，所以由表头指针的位置可以知道 R_x 的大小。为了读数方便，事先在刻度盘上直接标出欧姆值。

考查 $I(R_x)$ 函数，不难得出欧姆表的刻度特点有三：①大值在左边、小值在右边；②不均匀，小值区域稀疏、大值区域密集；③没有明确的量程，最右边为零，最左边为 ∞ 。

欧姆表虽然没有明确的量程，并不以为着测量任何电阻都是准确的，因为大值区域的刻度线太密，难以读出准确读数。这里就有一个档位选择问题。欧姆表上备有“ $\times 1$ ”、“ $\times 10$ ”、“ $\times 100$ ”、“ $\times 1\text{k}$ ”不同档位，它们的意义是：表盘的读数乘以这个倍数就是最后的测量结果。比如，一个待测电阻阻值越 $20\text{k}\Omega$ ，选择“ $\times 10$ ”档，指针将指在 2k 附近（密集区），不准，选择“ $\times 1\text{k}$ ”档，指针将指在 20 附近（稀疏区），读数就准确了。

不同的档位是因为欧姆表的中值电阻可以选择造成的。当 $R_x = (R_g + r + R_0)$ 时，表头电流 $I = \frac{1}{2} I_g$ ，指针指在表盘的几何中心，故称此时的 R_x ——即 $(R_g + r + R_0)$ ——为中值电阻，它就是表盘正中刻度的那个数字乘以档位倍数。很显然，对于一个给定的欧姆档，中值电阻（简称 $R_{\text{中}}$ ）应该是固定不变的。

由于欧姆表必须保证 $R_x = 0$ 时，指针指到最右边（ 0Ω 刻度），即

$$\frac{\varepsilon}{R_g + r + R_0} = I_g$$

这个式子当中，只有 R_g 和 I_g 是一成不变的， ε 、 r 均会随着电池的用旧而

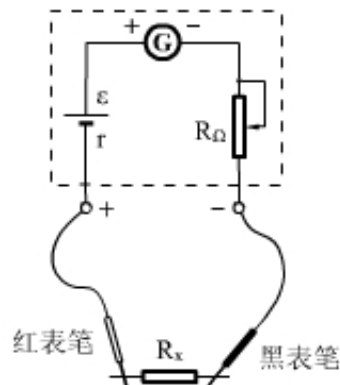


图 8-20

改变 ($\varepsilon \downarrow$ 、 $r \uparrow$)，为了保证方程继续成立，有必要调整 R_0 的值，这就是欧姆表在使用时的一个必不可少的步骤：欧姆调零，即将两表笔短接，观察指针指到最右边 (0Ω 刻度) 即可。

所以，在使用欧姆表时，选档和调零是必不可少的步骤，而且换档后，必须重新调零。

【相关问题 1】当欧姆表的电池用旧了之后，在操作规范的前提下，它的测值会_____ (填“偏大”、“偏小”或“继续准确”)。

【解说】这里的操作规范是指档位选择合适、已正确调零。电池用旧后， $\varepsilon \downarrow$ 、 $r \uparrow$ ，但调零时，务必要使 $R_0 \downarrow$ ，但 $R_g + r + R_0 = R_{\phi} = \frac{\varepsilon \downarrow}{I_g}$ ，故 $R_{\phi} \downarrow$ ，形成系统误差是必然的。

设新电池状态下电源电动势为 ε 、中值电阻为 R_{ϕ} ，用旧状态下电源电动势为 ε' 、中值电阻为 R_{ϕ}' ，则针对同一个 R_x ，有

$$\text{新电池状态 } I = \frac{\varepsilon}{R_{\phi} + R_x} = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{I_g} + R_x} = \frac{I_g}{1 + \frac{I_g R_x}{\varepsilon}}$$

$$\text{旧电池状态 } I' = \frac{\varepsilon'}{R_{\phi}' + R_x} = \frac{\varepsilon'}{\frac{\varepsilon'}{I_g} + R_x} = \frac{I_g}{1 + \frac{I_g R_x}{\varepsilon'}}$$

两式比较后，不难得出 $I' < I$ ，而表盘的刻度没有改变，故欧姆示数增大。

【答案】偏大。

【相关问题 2】用万用表之欧姆档测某二极管极性时，发现指针偏转极小，则与红表笔相连接的应为二极管的_____极。

【解说】欧姆档指针偏转极小，表明电阻示数很大；欧姆表的红表笔是和内部电源的负极相连的。

【答案】正。

第十部分 磁场

第一讲 基本知识介绍

《磁场》部分在奥赛考纲中的考点很少，和高考要求的区别不是很大，只是在两处有深化：a、电流的磁场引进定量计算；b、对带电粒子在复合场中的运动进行了更深入的分析。

一、磁场与安培力

1、磁场

a、永磁体、电流磁场→磁现象的电本质

b、磁感强度、磁通量

c、稳恒电流的磁场

*毕奥-萨伐尔定律 (Biot-Savart law): 对于电流强度为 I 、长度为 $d\vec{l}$ 的导体元段, 在距离为 r 的点激发的“元磁感强度”为 $d\vec{B}$ 。矢量式 $d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$, ($d\vec{l}$ 表示导体元段的方向沿电流的方向、 \vec{r} 为导体元段到考查点的方向矢量); 或用大小关系式 $dB = k \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$ 结合安培定则寻求方向亦可。其中 $k = 1.0 \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ 。应用毕萨定律再结合矢量叠加原理, 可以求解任何形状导线在任何位置激发的磁感强度。

毕萨定律应用在“无限长”直导线的结论: $B = 2k \frac{I}{r}$;

*毕萨定律应用在环形电流垂直中心轴线上的结论: $B = 2\pi k I \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$;

*毕萨定律应用在“无限长”螺线管内部的结论: $B = 2\pi k n I$ 。其中 n 为单位长度螺线管的匝数。

2、安培力

a、对直导体, 矢量式为 $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$; 或表达为大小关系式 $F = BIL \sin\theta$ 再结合“左手定则”解决方向问题 (θ 为 B 与 L 的夹角)。

b、弯曲导体的安培力

(1)整体合力

折线导体所受安培力的合力等于连接始末端连线导体 (电流不变) 的的安培力。

证明: 参照图 9-1, 令 MN 段导体的安培力 F_1 与 NO 段导体的安培力 F_2 的合力为 F , 则 F 的大小为

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\pi - \theta)} \\ &= BI \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos(\pi - \theta)} \\ &= BI \overline{MO} \end{aligned}$$

关于 F 的方向, 由于 $\triangle FF_2P \sim \triangle MNO$, 可以证明图 9-1 中的两个灰色三角形相似, 这也就证明了 F 是垂直 MO 的, 再由于 $\triangle PMO$ 是等腰三角形 (这个证明很容易), 故 F 在 MO 上的垂足就是 MO 的中点了。

证毕。

由于连续弯曲的导体可以看成是无穷多元段直线导体的折合, 所以, 关于折线导体整体合力的结论也适用于弯曲导体。(说明: 这个结论只适用于匀强磁场。)

(2)导体的内张力

弯曲导体在平衡或加速的情形下, 均会出现内张力, 具体分析时, 可将导体在被考查点切断, 再将被切断的某一部分隔离, 列平衡方程或动力学方程求解。

c、匀强磁场对线圈的转矩

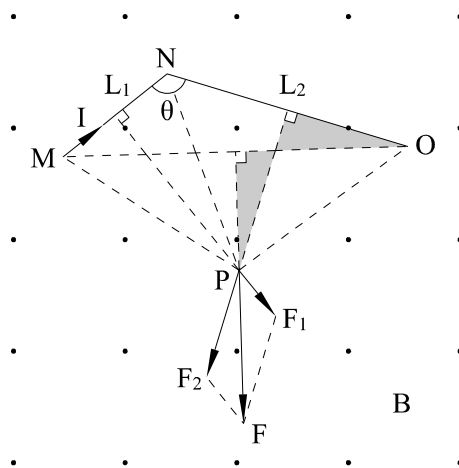


图 9-1

如图 9-2 所示，当一个矩形线圈（线圈面积为 S 、通以恒定电流 I ）放入匀强磁场中，且磁场 B 的方向平行线圈平面时，线圈受安培力将转动（并自动选择垂直 B 的中心轴 OO' ，因为质心无加速度），此瞬时的力矩为

$$M = BIS$$

几种情形的讨论——

- (1) 增加匝数至 N ，则 $M = NBIS$ ；
- (2) 转轴平移，结论不变（证明从略）；
- (3) 线圈形状改变，结论不变（证明从略）；

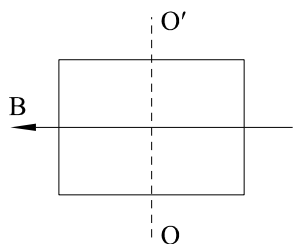


图 9-2

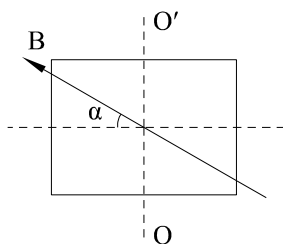


图 9-3

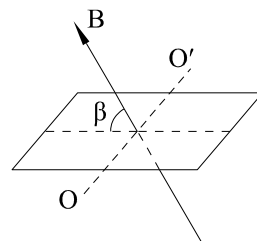


图 9-4

* (4) 磁场平行线圈平面相对原磁场方向旋转 α 角，则 $M = BIS \cos \alpha$ ，如图 9-3；

证明：当 $\alpha = 90^\circ$ 时，显然 $M = 0$ ，而磁场是可以分解的，只有垂直转轴的的分量 $B \cos \alpha$ 才能产生力矩…

(5) 磁场 B 垂直 OO' 轴相对线圈平面旋转 β 角，则 $M = BIS \cos \beta$ ，如图 9-4。

证明：当 $\beta = 90^\circ$ 时，显然 $M = 0$ ，而磁场是可以分解的，只有平行线圈平面的分量 $B \cos \beta$ 才能产生力矩…

说明：在默认的情况下，讨论线圈的转矩时，认为线圈的转轴垂直磁场。如果没有人为设定，而是让安培力自行选定转轴，这时的力矩称为力偶矩。

二、洛仑兹力

1、概念与规律

a、 $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，或展开为 $f = qvB \sin \theta$ 再结合左、右手定则确定方向（其中 θ 为 \vec{B} 与 \vec{v} 的夹角）。安培力是大量带电粒子所受洛仑兹力的宏观体现。

b、能量性质

由于 \vec{f} 总垂直 \vec{B} 与 \vec{v} 确定的平面，故 \vec{f} 总垂直 \vec{v} ，只能起到改变速度方向的作用。结论：洛仑兹力可对带电粒子形成冲量，却不可能做功。或：洛仑兹力可使带电粒子的动量发生改变却不能使其动能发生改变。

问题：安培力可以做功，为什么洛仑兹力不能做功？

解说：应该注意“安培力是大量带电粒子所受洛仑兹力的宏观体现”这句话的确切含义——“宏观体现”和“完全相等”是有区别的。我们可以分两种情形看这个问题：(1) 导体静止时，所有粒子的洛仑兹力的合力等于安培力（这个证明从略）；(2) 导体运动时，粒子参与的是沿导体棒的运动 v_1 和导体运动 v_2 的合运动，其合速度为 v ，这时的洛仑兹力 f 垂直 v 而安培力垂直导体棒，它们是不可能相等的，只能说安培力是洛仑兹力的分力 $f_1 = qv_1B$ 的合力（见图 9-5）。

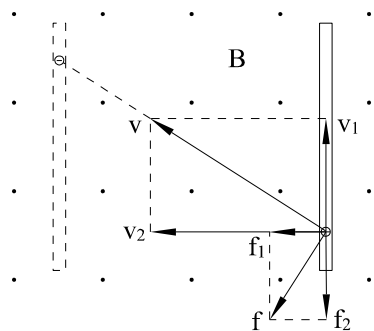


图 9-5

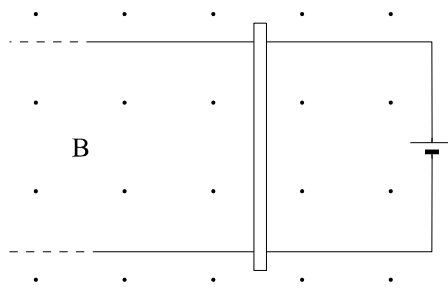


图 9-6

很显然， f_1 的合力（安培力）做正功，而 f 不做功（或者说 f_1 的正功和 f_2 的负功的代数和为零）。（事实上，由于电子定向移动速率 v_1 在 10^{-5} m/s 数量级，而 v_2 一般都在 10^{-2} m/s 数量级以上，致使 f_1 只是 f 的一个极小分量。）

☆如果从能量的角度看这个问题，当导体棒放在光滑的导轨上时（参看图 9-6），导体棒必获得动能，这个动能是怎么转化来的呢？

若先将导体棒卡住，回路中形成稳恒的电流，电流的功转化为回路的焦耳热。而将导体棒释放后，导体棒受安培力加速，将形成感应电动势（反电动势）。动力学分析可知，导体棒的最后稳定状态是匀速运动（感应电动势等于电源电动势，回路电流为零）。由于达到稳定速度前的回路电流是逐渐减小的，故在相同时间内发的焦耳热将比导体棒被卡住时少。所以，导体棒动能的增加是以回路焦耳热的减少为代价的。

2、仅受洛仑兹力的带电粒子运动

a、 $\vec{v} \perp \vec{B}$ 时，匀速圆周运动，半径 $r = \frac{mv}{qB}$ ，周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$

b、 \vec{v} 与 \vec{B} 成一般夹角 θ 时，做等螺距螺旋运动，半径 $r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$ ，螺距

$$d = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$

这个结论的证明一般是将 \vec{v} 分解...（过程从略）。

☆但也有一个问题，如果将 \vec{B} 分解（成垂直速度分量 B_2 和平行速度分量 B_1 ，如图 9-7 所示），粒子的运动情形似乎就不一样了——在垂直 B_2 的平面内做圆周运动？

其实，在图 9-7 中， B_1 平行 v 只是一种暂时的现象，一旦受 B_2 的洛仑兹力作用， v 改变方向后就不再平行 B_1 了。当 B_1 施加了洛仑兹力后，粒子的“圆周运动”就无法达成了。（而在分解 v 的处理中，这种局面是不会出现的。）

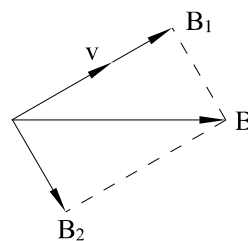


图 9-7

3、磁聚焦

a、结构：见图 9-8，K 和 G 分别为阴极和控制极，A 为阳极加共轴限制膜片，螺线管提供匀强磁场。

b、原理：由于控制极和共轴膜片的存在，电子进磁场的发散角极小，即速度和磁场的夹角 θ 极小，

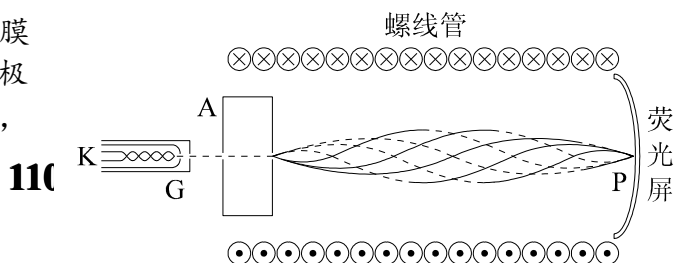


图 9-8

各粒子做螺旋运动时可以认为螺距彼此相等（半径可以不等），故所有粒子会“聚焦”在荧光屏上的P点。

4、回旋加速器

a、结构&原理（注意加速时间应忽略）

b、磁场与交变电场频率的关系

因回旋周期 T 和交变电场周期 T' 必相等，故 $\frac{2\pi m}{qB} = \frac{1}{f}$

c、最大速度 $v_{\max} = \frac{qBR}{m} = 2\pi Rf$

5、质谱仪

速度选择器&粒子圆周运动，和高考要求相同。

第二讲 典型例题解析

一、磁场与安培力的计算

【例题1】两根无限长的平行直导线 a、b 相距 40cm，通过电流的大小都是 3.0A，方向相反。试求位于两根导线之间且在两导线所在平面内的、与 a 导线相距 10cm 的 P 点的磁感强度。

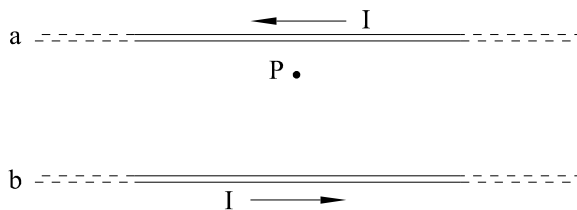


图 9-9

【解说】这是一个关于毕萨定律的简单应用。解题过程从略。

【答案】大小为 $8.0 \times 10^{-6}T$ ，方向在图 9-9 中垂直纸面向外。

【例题2】半径为 R ，通有电流 I 的圆形线圈，放在磁感强度大小为 B 、方向垂直线圈平面的匀强磁场中，求由于安培力而引起的线圈内张力。

【解说】本题有两种解法。

方法一：隔离一小段弧，对应圆心角 θ ，则弧长 $L = \theta R$ 。因为 $\theta \rightarrow 0$ （在图 9-10 中，为了说明问题， θ 被夸大了），弧形导体可视为直导体，其受到的安培力 $F = BIL$ ，其两端受到的张力设为 T ，则 T 的合力

$$\Sigma T = 2T \sin \frac{\theta}{2}$$

再根据平衡方程和极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，即可求解

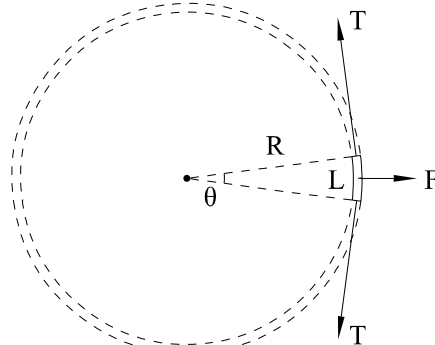


图 9-10

T 。

方法二：隔离线圈的一半，根据弯曲导体求安培力的定式和平衡方程即可求解...

【答案】 BIR 。

【说明】如果安培力不是背离圆心而是指向圆心，内张力的方向也随之反向，但大小不会变。

【学员思考】如果圆环的电流是由于环上的带正电物质顺时针旋转而成（磁

场仍然是进去的), 且已知单位长度的电量为 λ 、环的角速度 ω 、环的总质量为 M , 其它条件不变, 再求环的内张力。

【提示】此时环的张力由两部分引起: ①安培力, ②离心力。

前者的计算上面已经得出 (此处 $I = \frac{2\pi R \cdot \lambda}{2\pi/\omega} = \omega$

λR), $T_1 = B\omega\lambda R^2$;

后者的计算必须应用图 9-10 的思想, 只是 F 变成了离心力, 方程 $2T_2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2\pi} M\omega^2 R$, 即 $T_2 = \frac{M\omega^2 R}{2\pi}$ 。

【答】 $B\omega\lambda R^2 + \frac{M\omega^2 R}{2\pi}$ 。

【例题 3】如图 9-11 所示, 半径为 R 的圆形线圈共 N 匝, 处在方向坚直的、磁感强度为 B 的匀强磁场中, 线圈可绕其水平直径 (绝缘) 轴 OO' 转动。一个质量为 m 的重物挂在线圈下部, 当线圈通以恒定电流 I 后, 求其静止时线圈平面和磁场方向的夹角。

【解说】这是一个应用安培力矩定式的简单问题, 解题过程从略。

【答案】 $\arctg \frac{\pi NBIR}{mg}$ 。

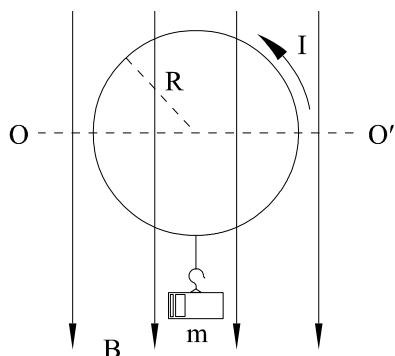


图 9-11

二、带电粒子在匀强磁场中的运动

【例题 4】电子质量为 m 、电量为 q , 以初速度 v_0 垂直磁场进入磁感强度为 B 的匀强磁场中。某时刻, 电子第一次通过图 9-12 所示的 P 点, θ 为已知量, 试求:

- (1) 电子从 O 到 P 经历的时间;
- (2) $O \rightarrow P$ 过程洛仑兹力的冲量。

【解说】圆周运动的基本计算。解题过程从略。

值得注意的是, 洛仑兹力不是恒力, 故冲量不能通过定义式去求, 而应根据动量定理求解。

【答案】(1) $\frac{2m\theta}{eB}$; (2) $2mv_0 \sin \theta$ 。

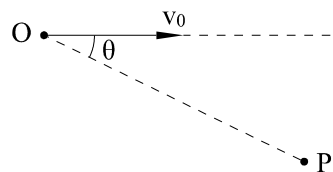


图 9-12

【例题 5】如图 9-13 所示, S 是粒子源, 只能在纸面上的 360° 范围内发射速率相同、质量为 m 、电量为 q 的电子。 MN 是一块足够大的挡板, 与 S 相距 $OS=L$ 。它们处在磁感强度为 B 、方向垂直纸面向里的匀强磁场中, 试求:

- (1) 要电子能到达挡板, 其发射速度至少应为多大?
- (2) 若发射速率为 $\frac{eBL}{m}$, 则电子击打在挡板上的范围怎样?

【解说】第一问甚简, 电子能击打到挡板的临界情形是轨迹与挡板相切, 此时 $r_{\min} = \frac{L}{2}$;

在第二问中, 先求得 $r = L$, 在考查各种方向的初

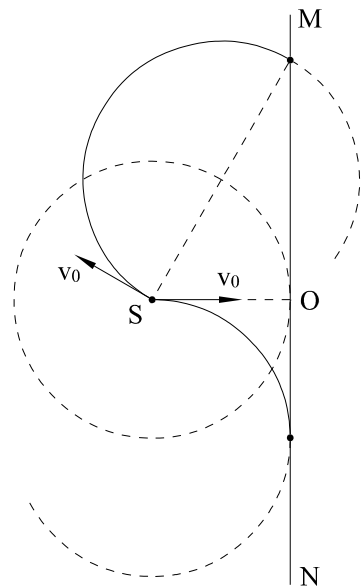


图 9-13

速所对应的轨迹与挡板相交的“最远”点。值得注意的是，O 点上方的最远点和下方的最远点并不是相对 O 点对称的。

【答案】(1) $\frac{eBL}{2m}$; (2) 从图中 O 点上方距 O 点 $\sqrt{3}L$ 处到 O 点下方距 O 点 L 处的范围内。

【例题 6】如图 9-14 甲所示，由加速电压为 U 的电子枪发射出的电子沿 x 方向射入匀强磁场，要使电子经过 x 下方距 O 为 L 且 $\angle xOP = \theta$ 的 P 点，试讨论磁感应强度 B 的大小和方向的取值情况。

【解说】以一般情形论：电子初速度 v_0 与磁感应强度 B 成任意夹角 α ，电子应做螺旋运动，半径为 $r = \frac{mv_0 \sin \alpha}{eB}$ ，螺距为 $d = \frac{2\pi mv_0 \cos \alpha}{eB}$ ，它们都由 α 、B 决定 ($v_0 = \sqrt{\frac{2mU}{e}}$ 是固定不变的)。我们总可以找到适当的半径与螺距，使 P 点的位置满足 L、 θ 的要求。电子运动轨迹的三维展示如图 9-14 乙所示。

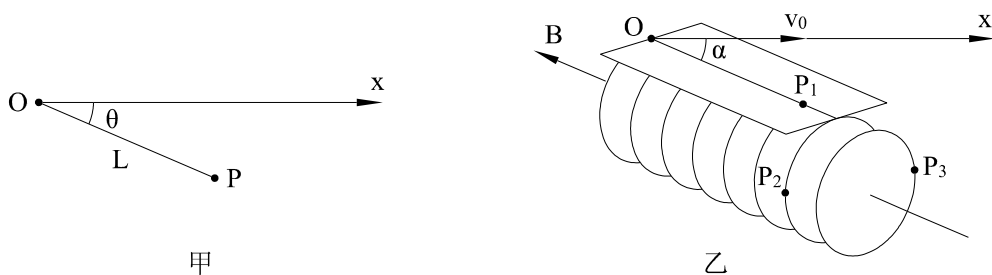


图 9-14

如果 P 点处于 (乙图中) 螺线轨迹的 P_1 位置，则 $\alpha = \theta$ ， $B // \overline{OP}$ ；如果 P 点处于 P_2 或 P_3 位置，则 $\alpha \neq \theta$ ，B 与 \overline{OP} 成一般夹角。

对于前一种情形，求解并不难——只要解 $L = kd$ (其中 $k = 1, 2, 3, \dots$) 方程即可；而对后一种情形，要求出 B 的通解就难了，这里不做讨论。

此外，还有一种特解，那就是当 $B \perp \overline{OP}$ 时，这时的解法和【例题 4】就完全重合了。

【答案】通解不定。当 $B // \overline{OP}$ 时， $B = \frac{2k\pi \cos \theta}{L} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$ (其中 $k = 1, 2, 3, \dots$)；

当 $B \perp \overline{OP}$ 时， $B = \frac{2 \sin \theta}{L} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$ 。

【问题存疑】两个特解能不能统一？

三、带电粒子在电磁复合场中的运动

一般考虑两种典型的复合情形：B 和 E 平行，B 和 E 垂直。

对于前一种情形，如果 v_0 和 B (E) 成 θ 角，可以将 v_0 分解为 $v_{0\tau}$ 和 v_{0n} ，则在 n 方向粒子做匀速圆周运动，在 τ 方向粒子做匀加速运动。所以，粒子的合运动是螺距递增 (或递减) 的螺线运动。

对于后一种情形 (垂直复合场)，难度较大，必须起用动力学工具和能量 (动量) 工具共同求解。

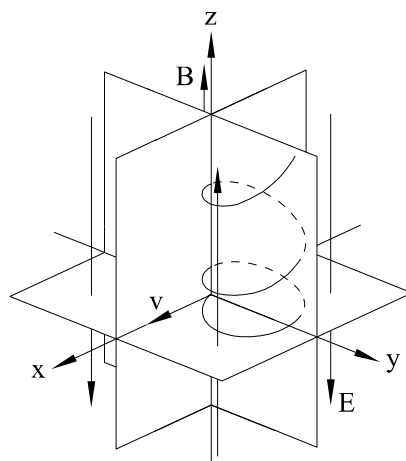


图 9-15

一般结论是，当 v_0 和 B 垂直而和 E 成一般夹角时，粒子的轨迹是摆线（的周期性衔接）。

【例题 7】 在三维直角坐标中，沿 $+z$ 方向有磁感强度为 B 的匀强磁场，沿 $-z$ 方向有电场强度为 E 的匀强电场。在原点 O 有一质量为 m 、电量为 $-q$ 的粒子（不计重力）以正 x 方向、大小为 v 的初速度发射。试求粒子再过 z 轴的坐标与时间。

【解说】 过程甚简，粒子运动情形见图 9-15。

【答案】 $z = \frac{2\pi^2 k^2 m E}{q B^2}$ ， $t = \frac{2\pi k m}{q B}$ 。（其中 $k = 1, 2, 3, \dots$ ）

【例题 8】 在相互垂直的匀强电、磁场中， E 、 B 值已知，一个质量为 m 、电量为 $+q$ 的带电微粒（重力不计）无初速地释放，试定量寻求该粒子的运动规律。

【解说】 在相互垂直的电、磁场中，粒子受力的情形非常复杂，用运动的分解与合成的手段也有相当的困难，必须用到一些特殊的处理方法。

鉴于粒子只能在垂直 B 的平面内运动，可以在该平面内建立如图 9-16 所示的直角坐标。在这个坐标中，从以下四个角度考查粒子运动的定量规律——

(1) 电场方向的最大位移 Y

$$\text{能量关系 } qEY = \frac{1}{2} m v_p^2 \quad \text{①}$$

在 x 方向上用动量定理，有

$$\overline{f_x} \cdot t = m v_p \quad \text{②}$$

$$\text{且 } \overline{f_x} = qB \overline{v_y}$$

③

(注意 $\overline{v_y} \cdot t = Y$)

$$\text{解①②③式可得 } Y = \frac{2mE}{qB^2}$$

(2) 轨迹顶点 P 的曲率半径 r

在 P 点有动力学关系 $q v_p B - qE = m \frac{v_p^2}{r}$ ，而 v_p 在第 (1) 问中已经求得。可解出：

$$r = \frac{4mE}{qB^2}$$

(3) 垂直电场方向的“漂移”速度 $\overline{v_x}$

针对 $O \rightarrow P$ 过程， y 方向有动力学关系 $\Sigma \overline{F_y} = m \overline{a_y}$

即 $qE - \overline{f_y} = m \overline{a_y}$ ，即 $qE - qB \overline{v_x} = m \overline{a_y}$ 。而 $\overline{a_y} = \frac{v_p - v_0}{t} = 0$

所以 $\overline{v_x} = \frac{E}{B}$

* (4) 粒子从 O 到 P 做经历的时间 t

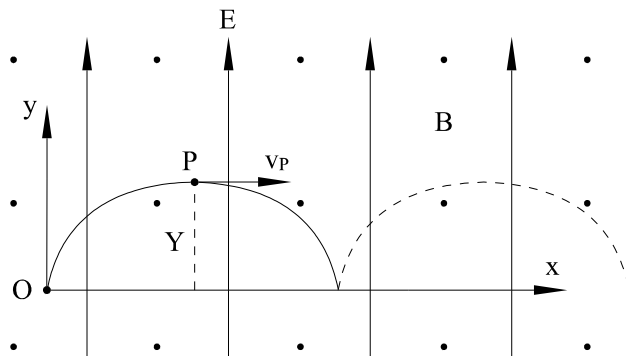


图 9-16

解法一：摆线亦称旋轮线，是由轮子在水平面无滑滚动时轮子边缘形成的轨迹（如图 9-17 所示）。在本题的 E、B 叠加场中，可以认为“轮子”的旋转是由洛伦兹力独立形成的。而从 O 到 P 的过程，轮子转动的圆心角应为 π ，故对应时间为 $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$ 。

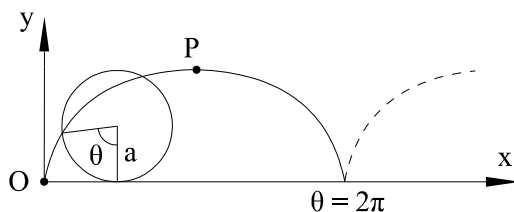


图 9-17

解法二：参照摆线方程

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

得到 $x_p = \pi a = \pi \frac{Y}{2} = \frac{\pi m E}{qB^2}$ 。再根据 $t = \frac{x_p}{v_x} = \frac{\pi m E}{qB^2} \cdot \frac{E}{B}$

所以 $t = \frac{\pi m}{qB}$ 。

【答案】略。

【评说】在垂直复合场中，寻求能量关系比较容易，但动力学关系（或动量关系）只能启用平均的思想，这也是一种特殊的处理方法。

四、束缚问题

带电实物受到斜面、绳子或杆子的束缚，在电、磁场中的运动问题称为束缚问题。束缚问题涉及的受力情形复杂，且常常伴随边界条件的讨论，因此有更大的挑战性。

【例题 9】单摆的摆长为 L ，摆球带电 $+q$ ，放在匀强磁场中，球的摆动平面跟磁场垂直，最大摆角为 α 。为使其能正常摆动，磁场的磁感强度 B 值有何限制？

【解说】这是第九届初试题，解题的关键所在是要分析清楚：小球“最有可能脱离圆弧”的点是否一定在最低点？…下面的定量讨论完成之后，我们将会发现：这个答案是否定的。

针对某个一般位置 P，设方位角 θ （如图 9-18 所示），如果小球没有离开圆弧，可以列出——

$$\text{动力学方程：} T + qvB - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{L} \quad \text{①}$$

$$\text{从 O 到 P 过程，能量方程：} mgL (\cos \theta - \cos \alpha) = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{②}$$

$$\text{小球不离开圆弧的条件是：} T \geq 0 \quad \text{③}$$

$$\text{解①②③式易得 } B \leq \frac{mg}{q\sqrt{2gL}} \cdot \frac{3\cos\theta - 2\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

【学员活动】请求出函数 $y = \frac{3\cos\theta - 2\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$

的极小值…

☆解法备考：对于正数 a 、 b ，有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\text{而 } y = \frac{3\cos\theta - 2\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

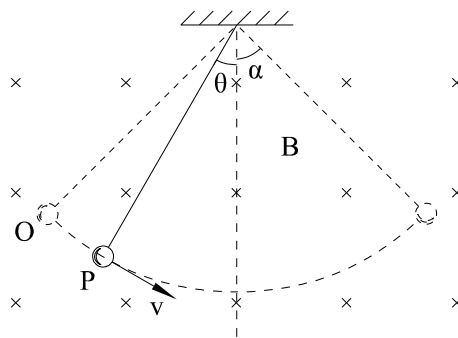


图 9-18

$$= 3\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

考虑到 θ 、 α 的实际取值情况， $3\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$ 和 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$ 均为正数，所以，

$$y \geq 2\sqrt{3\cos\alpha}$$

$$\text{即 } y_{\min} = 2\sqrt{3\cos\alpha} \quad \star$$

磁感应强度取值的一般结论为： $B \leq \frac{mg}{q\sqrt{2gL}} \cdot 2\sqrt{3\cos\alpha}$ 。

但此结论还有讨论的空间——

因为极值点的条件是： $\sqrt{3(\cos\theta - \cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$ ，即 $\cos\theta = \frac{4}{3}\cos\alpha$ 。

显然，只有当 $\cos\alpha < \frac{3}{4}$ 时（即最大摆角 α 较大时），极值点才可取，上面的“一般结论”才成立；物理意义：小球“最有可能脱离圆弧”的点不在最低点。

而当 α 过小， $\cos\alpha > \frac{3}{4}$ 时， θ 无解，极值点不可达，此时应寻求 $y =$

$\frac{3\cos\theta - 2\cos\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$ 函数（在定义域内）的最小值。

这个最值的寻求相对复杂一些，具体过程如下——

广义的 y 虽然是先减后增，但它的自变量是 $\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$ 而非 θ ，因 α 是定值，

故 y 也可以认为是随着 $\cos\theta$ 的增大而先减后增，如图 9-19 所示。

当极值点不可达时（图中虚线所示），图线应落在左边的一段实线（因为 α 过小， $\cos\alpha$ 过大，理论极值点过大， $\cos\theta$ 达不到），函数为减函数。当 $\cos\theta$ 最大时， y 有最小值。

所以，当 $\cos\theta = 1$ 时（此时 $\theta = 0$ ，小球在最低点），最小值 $y_{\min} = \frac{3-2\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$ ；物理意义：小球

“最有可能脱离圆弧”的点在最低点。

【答案】当 $\alpha \geq \arccos\frac{3}{4}$ 时， $B \leq \frac{mg}{q\sqrt{2gL}} \cdot 2\sqrt{3\cos\alpha}$ ；

当 $\alpha < \arccos\frac{3}{4}$ 时， $B \leq \frac{mg}{q\sqrt{2gL}} \cdot \frac{3-2\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$ 。

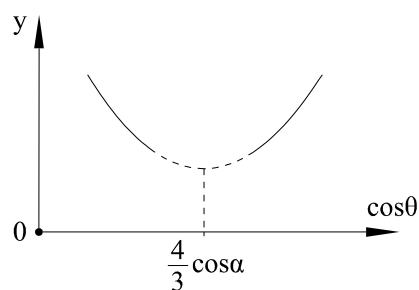


图 9-19

第十一部分 电磁感应

在第十部分，我们将对感应电动势进行更加深刻的分析，告诉大家什么是动生电动势，什么是感生电动势。在自感和互感的方面，也会分析得更全面。至于其它，如楞次定律、电磁感应的能量实质等等，则和高考考纲差别不大。

第一讲、基本定律

一、楞次定律

1、定律：感应电流的磁场总是阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

注意点：阻碍“变化”而非阻碍原磁场本身；两个磁场的存在。

2、能量实质：发电结果总是阻碍发电过程本身——能量守恒决定了楞次定律的必然结果。

【例题 1】在图 10-1 所示的装置中，令变阻器 R 的触头向左移动，判断移动过程中线圈的感应电流的方向。

【解说】法一：按部就班应用楞次定律；

法二：应用“发电结果总是阻碍发电过程本身”。由“反抗磁通增大” \rightarrow 线圈必然逆时针转动 \rightarrow 力矩方向反推感应电流方向。

【答案】上边的电流方向出来（下边进去）。

【学员思考】如果穿过线圈的磁场是一对可以旋转的永磁铁造成的，当永磁铁逆时针旋转时，线圈会怎样转动？

【解】略。

【答】逆时针。

——事实上，这就感应电动机的基本模型，只不过感应电动机的旋转磁场是由三相交流电造就的。

3、问题**佯谬**：在电磁感应问题中，可能会遇到沿不同途径时得出完全相悖结论的情形，这时，应注意什么抓住什么是矛盾的主要方面。

【例题 2】如图 10-2 所示，在匀强磁场中，有圆形的弹簧线圈。试问：当磁感应强度逐渐减小时，线圈会扩张还是会收缩？

【解说】解题途径一：根据楞次定律之“发电结果总是阻碍发电过程本身”，可以判断线圈应该“反抗磁通的减小”，故应该扩张。

解题途径二：不论感应电流方向若何，弹簧每两圈都是“同向平行电流”，根据安培力的常识，它们应该相互吸引，故线圈应该收缩。

这两个途径得出的结论虽然是矛盾的，但途径二有不严谨的地方，因为导线除了受彼此间的安培力之外，还

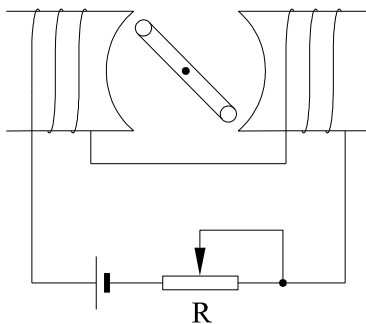


图 10-1

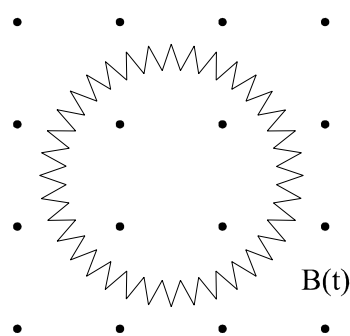


图 10-2

受到外磁场的安培力作用，而外磁场的安培力是促使线圈扩张的，所以定性得出结论事实上是困难的。但是，途径一源于能量守恒定律，站的角度更高，没有漏洞存在。

【答案】扩张。

【学员思考】如图 10-3 所示，在平行、水平的金属导轨上有两根可以自由滚动的金属棒，当它们构成闭合回路正上方有一根条形磁铁向下运动时，两根金属棒会相互靠拢还是相互远离？

【解】同上。

【答】靠拢。

二、法拉第电磁感应定律

1、定律：闭合线圈的感应电动势和穿过此线圈的磁通量的变化率成正比。即

$$\varepsilon = N \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

物理意义：N 为线圈匝数； $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 有瞬时变化率和平均变化率之分，在定律中的 ε 分别对应瞬时电动势和平均电动势。

图象意义：在 $\phi-t$ 图象中，瞬时变化率 $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 对应图线切线的斜率。

【例题 3】面积为 S 的圆形（或任何形）线圈绕平行环面且垂直磁场的轴匀速转动。已知匀强磁场的磁感应强度为 B，线圈转速为 ω ，试求：线圈转至图 19-4 所示位置的瞬时电动势和从图示位置开始转过 90° 过程的平均电动势。

【解说】本题是法拉第电磁感应定律的基本应用。

求瞬时电动势时用到极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ；求平均电动势比较容易。

【答案】 $BS\omega$ ； $\frac{2}{\pi} BS\omega$ 。

2、动生电动势

a、磁感应强度不变而因闭合回路的整体或局部运动形成的电动势成为动生电动势。

b、动生电动势的计算

在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，当长为 L 的导体棒一速度 v 平动切割磁感线，且 B、L、v 两两垂直时， $\varepsilon = BLv$ ，电势的高低由“右手定则”判断。这个结论的推导有两种途径——

①设置辅助回路，应用法拉第电磁感应定律；

②导体内部洛仑兹力与电场力平衡。导体两端形成固定电势差后，导体内部将形成电场，且自由电子不再移动，此时，对于不在定向移动的电子而言，洛仑兹力 f 和电场力 F 平衡，即

$$F = f \quad \text{即} \quad qE = qvB$$

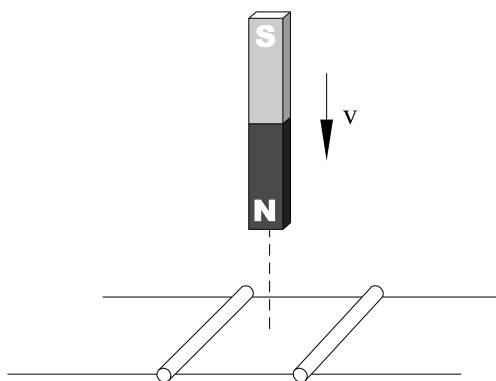


图 10-3

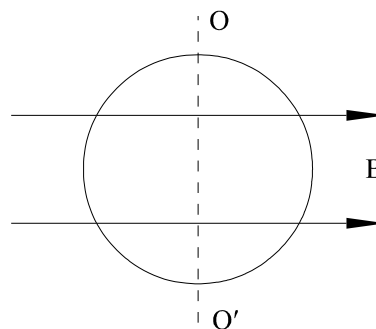


图 10-4

而导体内部可以看成匀强电场，即 $\frac{\varepsilon}{L} = E$

所以 $\varepsilon = BLv$

当导体有转动，或 B 、 L 、 v 并不两两垂直时，我们可以分以下四种情况讨论（结论推导时建议使用法拉第电磁感应定律）——

①直导体平动， $L \perp B$ ， $L \perp v$ ，但 v 与 B 夹 α 角（如图 10-5 所示），则 $\varepsilon = BLv \sin \alpha$ ；

②直导体平动， $v \perp B$ ， $L \perp B$ ，但 v 与 L 夹 β 角（如图 10-6 所示），则 $\varepsilon = BLv \sin \beta$ ；

推论：弯曲导体平动，端点始末连线为 L ， $v \perp B$ ， $L \perp B$ ，但 v 与 L 夹 γ 角（如图 10-7 所示），则 $\varepsilon = BLv \sin \gamma$ ；

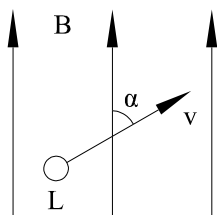


图 10-5

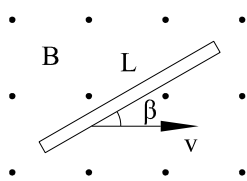


图 10-6

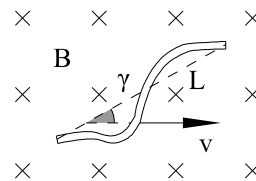


图 10-7

③直导体转动，转轴平行 B 、垂直 L 、且过导体的端点，角速度为 ω （如图 10-8 所示），则 $\varepsilon = \frac{1}{2} B \omega L^2$ ；

推论：直导体转动，转轴平行 B 、垂直 L 、但不过导体的端点（和导体一端相距 s ），角速度为 ω （如图 10-9 所示），则 $\varepsilon_1 = BL \omega (s + \frac{L}{2})$ （轴在导体外部）

、 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} B \omega (L^2 - 2s) = B(L - 2s) \omega (s + \frac{L - 2s}{2})$ （轴在导体内部）；

☆这两个结论由学员自己推导（教师配合草稿板图）…

④直导体转动，转轴平行 B 、和 L 成一般夹角 θ 、且过导体的端点，角速度为 ω （如图 10-9 所示），则 $\varepsilon = \frac{1}{2} B \omega L^2 \sin^2 \theta$ ；

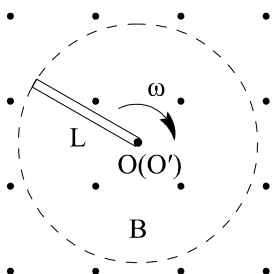


图 10-8

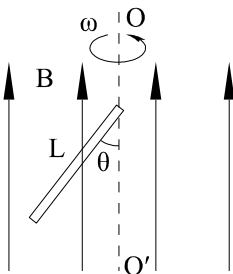


图 10-9

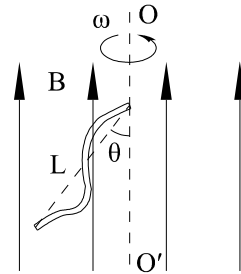


图 10-10

推论：弯曲导体（始末端连线为 L ）转动，转轴转轴平行 B 、和 L 成一般

夹角 θ 、且过导体的端点，角速度为 ω （如图 10-10 所示），则 $\varepsilon = \frac{1}{2}B\omega L^2 \sin^2 \theta$ 。

统一的结论：种种事实表明，动生电动势可以这样寻求——即 $\varepsilon = BLv$ ，而 B 、 L 、 v 应彼此垂直的（分量）。

【例题 4】一根长为 L 的直导体，绕过端点的、垂直匀强磁场的转轴匀角速转动，而导体和转轴夹 θ 角，已知磁感应强度 B 和导体的角速度 ω ，试求导体在图 10-11 所示瞬间的动生电动势。

【解说】略。（这个导体产生的感应电动势不是恒定不变的，而是一个交变电动势。）

【答案】 $\varepsilon = \frac{1}{4}B\omega L^2 \sin 2\theta$ 。

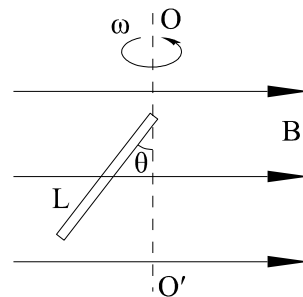


图 10-11

第二讲 感生电动势

一、感生电动势

造成回路磁通量改变的情形有两种：磁感应强度 B 不变回路面积 S 改变（部分导体切割磁感线）；回路面积 S 不变而磁感应强度 B 改变。对于这两种情形，法拉第电磁感应定律都能够求出（整个回路的）感应电动势的大小（前一种情形甚至还可以从洛仑兹力的角度解释）。但是，在解决感应电动势的归属问题上，法拉第电磁感应定律面临这前所未有的困难（而且洛仑兹力角度也不能解释其大小）。因此，我们还是将两种情形加以区别，前一种叫动生电动势，后一种叫感生电动势。

感生电动势的形成通常是用麦克斯韦的涡旋电磁理论解释的。

1、概念与意义

根据麦克斯韦电磁场的理论，变化的磁场激发（涡旋）电场。涡旋电场力作用于单位电荷，使之运动一周所做的功，叫感生电动势，即

$$\varepsilon_{\text{感}} = \frac{W_{\text{涡}}}{q}$$

*值得注意的是，这里的涡旋电场力是一种比较特殊的力，它和库仑电场力、洛仑兹力并称为驱动电荷运动的三大作用力，但是，它和库仑电场力有重大的区别，特别是：库仑电场力可以引入电位、电场线有始有终，而涡旋电场不能引入电位、电场线是闭合的（用数学语言讲，前者是有源无旋场，后者是有旋无源场）。

2、感生电动势的求法

感生电动势的严谨求法是求法拉第电磁感应定律的微分方程（*即 $\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ ）。在一般的情形下，解这个方程有一定的难度。但是， $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 具有相对涡旋中心的轴对称性，根据这种对称性解体则可以问题简化。

【例题 5】半径为 R 的无限长螺线管，其电流随时间均匀增加时，其内部的磁感应强度也随时间均匀增加，由于“无限长”的原因，其外部的有限空间内可

以认为磁感应强度恒为零。设内部 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ ，试求解管内、外部空间的感生电场。

【解说】将 B 值变化等效为磁感线变密或变疏，并假定 B 线不能凭空产生和消失。在将 B 值增加等效为 B 线向“中心”会聚（运动）、 B 值减小等效为 B 线背离“中心”扩散（运动）。

(1) 内部情形求解。设想一个以“中心”为圆心且垂直 B 线的圆形回路，半径为 r ，根据运动的相对性， B 线的会聚运动和导体向外“切割” B 线是一样的。而且，导体的每一段切割的“速度”都相同，因此，电动势也相等。根据 $E = \frac{\Delta U}{\Delta d}$ 知，回路上各处的电场强度应相等（只不过电场线是曲线，而且是闭合的）。

$$\text{由 } \varepsilon_{\text{总}} = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ 和 } E = \frac{\varepsilon_{\text{总}}}{2\pi r} \text{ 得}$$

$$E = \frac{kr}{2}$$

显然，撤去假想回路，此电场依然存在。

(2) 外部情形求解。思路类同 (1)，只是外部“假想回路”的磁通量不随“回路”的半径增大而改变，即 $\phi = \pi R^2 B$

$$\text{由 } \varepsilon_{\text{总}} = \pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ 和 } E' = \frac{\varepsilon_{\text{总}}}{2\pi r} \text{ 得}$$

$$E = \frac{kR^2}{2r} \quad (r > R)$$

【答案】感生电场线是以螺线管轴心为圆心的同心圆，具体涡旋方向服从楞次定律。感生电场强度的大小规律可以用图 10-12 表达。

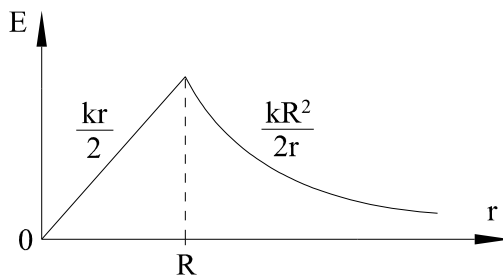


图 10-12

【说明】本题的解答中设置的是一个特殊的回路，才会有“在此回路上感生电场大小恒定”的结论，如果设置其它回路， $E = \frac{\varepsilon_{\text{总}}}{2\pi r}$ 关系不可用，用我们现有的数学工具将不可解。当然，在启用高等数学工具后，是可以的出结论的，而且得出的结论和“特殊回路”的结论相同。

【学员思考】如果在螺线管内、外分别放置两段导体 CD 和 EF ，它们都是以螺线管轴线为圆心、且圆心角为 θ 的弧形，试求这两段导体两端的电势差。

【参考解答】因为在弧线上的场强都是大小恒定的，故可用 $U = E \cdot l_{\text{弧长}}$ 求解

$$\text{显然, } U_{CD} = \frac{k}{2} \theta r^2, \quad U_{EF} = \frac{k}{2} \theta R^2.$$

【推论总结】我们不难发现， $U_{CD} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \times$

(扇形 OCD 的面积)， $U_{EF} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \times$ (扇形 OGH

的面积)。结论：感生电动势的大小可以这样计算，用磁感应强度的变化率乘以自磁场变化中心出发引向导体两端的曲边形（在磁场中）的“有效面积”。

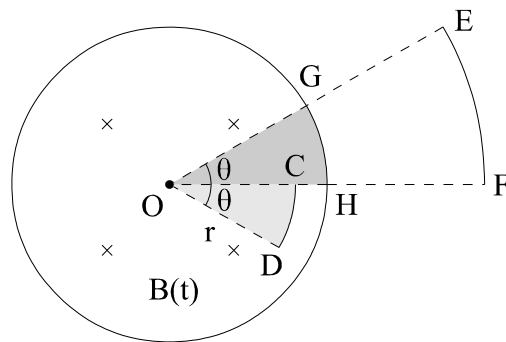


图 10-13

注意，针对（圆心在磁场变化中心的）非弧形导体，用 $U = Ed$ 行不通（启用 $\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 数学工具又不到位），但上面的“推论”则是可以照样使用的。

【应用】半径为 R 螺线管内充满匀强磁场，磁感应强度随时间的变化率 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 已知。求长为 L 的直导体在图 10-14 中 a、b、c 三个位置的感应电动势大小分别是多少？

【解】在本题中，由于没有考查（以涡旋中心为圆心的）环形回路或弧形回路，所以需要用到上面的“推论”解决问题。

显然，这里的“有效面积”分别为

$$S_a = 0$$

$$S_b = \frac{1}{2}L \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$S_c = \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{L}{1+R}$$

【答】 $\varepsilon_a = 0$; $\varepsilon_b =$

$$\frac{L}{4} \frac{\Delta B}{\Delta t} \sqrt{4R^2 - L^2} ; \quad \varepsilon_c =$$

$$\frac{R^2}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} \operatorname{arctg} \frac{L}{1+R} .$$

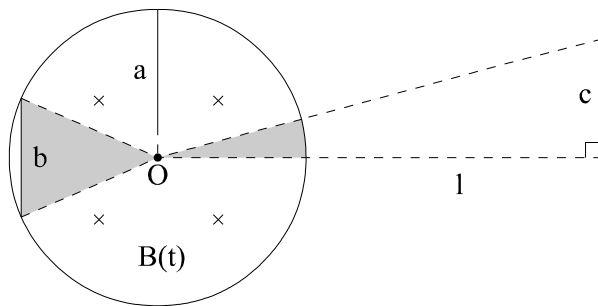


图 10-14

二、电势、电流、能量和电量

1、只要感应电路闭合，将会形成感应电流，进而导致能量的转化。关于感应电路的电流、能量和电量的计算，可以借助《稳恒电流》一章中闭合电路欧姆定律的知识。但是，在处理什么是“外电路”、什么是“内电路”的问题上，常常需要不同寻常的眼光。我们这里分两种情形归纳——

如果发电是“动生”的，内电路就是（切割）运动部分；

如果发电是“感生”的，内、外电路很难分清，需要具体问题具体分析，并适当运用等效思想。（内电路中的电动势分布还可能不均匀。）

【例题 6】如图 10-15 所示，均匀导体做成的半径为 R 的 Φ 环，内套半径为 $R/2$ 的无限长螺线管，其内部的均匀磁场随时间正比例地增大， $B = kt$ ，试求导体环直径两端 M、N 的电势差 U_{MN} 。

【解说】将图 10-15 中的左、中、右三段导体分别标示为 1、2、3，它们均为电源，电动势分别为——

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}kR^2 (\pi - \operatorname{arctg} 2), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{4}kR^2 \operatorname{arctg} 2$$

设导体单位长度电阻为 λ ，三“电源”的内阻分别为——

$$r_1 = r_3 = \pi \lambda R, \quad r_2 = 2 \lambda R$$

应用楞次定律判断电动势的方向后，不难得出它们的连接方式如图 10-16 所示。

然后，我们用戴维南定理理解图 10-16 中的电流 I ，

$$\text{最后 } U_{MN} = I r_1 - \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3 r_2 r_1 + \varepsilon_3 r_2 r_1 + \varepsilon_1 r_2 r_1}{r_2 + r_2 r_1 + r_1 r_1} = \dots$$

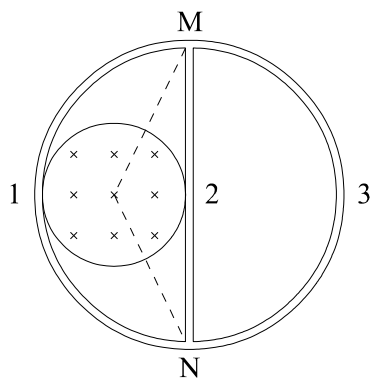


图 10-15

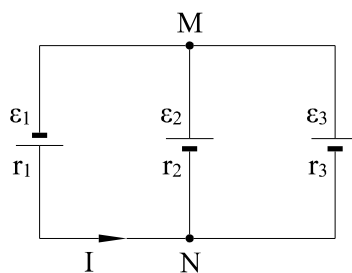


图 10-16

【答案】 $U_{MN} = \frac{1}{4}kR^2 \left(\arctg 2 - \frac{4+\pi}{2\pi} \right)$ 。

2、受中学阶段数学工具的制约，在精确解不可求的情况下，将物理过程近似处理，或在解题过程中做近似处理常常是必要的。

【例题 7】在图 10-17 所示的装置中，重 $G = 0.50\text{N}$ 、宽 $L = 20\text{cm}$ 的 Π 型导体置于水银槽中，空间存在区域很窄（恰好覆盖住导体）的、磁感应强度 $B = 2.0\text{T}$ 的匀强磁场。现将开关 K 合上后，导体立即跳离水银槽，且跳起的最大高度 $h = 3.2\text{cm}$ ，重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$ ，忽略电源内阻。

(1) 若通电时间 $t = 0.01\text{s}$ ，忽略导体加速过程产生的感应电动势，求通电过程流过导体的电量；

(2) 如果回路外总电阻 $R = 0.10\Omega$ ，则导体重回水银槽瞬间，消耗在回路中的电功率是多少？

【解说】解第 (1) 问时，本来因为导体运动而形成的反电动势（感应电动势）是存在的，这里只能忽略；磁场又是仅仅覆盖住导体的，这就意味着导体棒跳离水银槽后可以认为是竖直上抛运动。

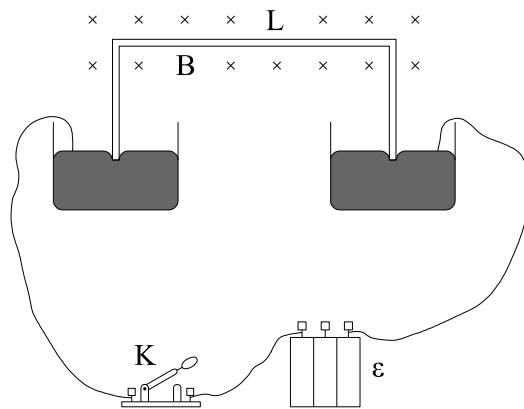


图 10-17

对上抛过程， $v_0 = \sqrt{2gh}$

对导体离开水银槽过程， $(\bar{F} - G)t = mv_0$

综合以上两式，即 $BLq - Gt = m\sqrt{2gh}$ ，由此可解 q 。

如果说第 (1) 问的近似处理重在过程的话，第 (2) 则在解题的规律运用上也不得不用一些令人难以接受的“近似处理”——

$P = \frac{(\varepsilon + \varepsilon_{感})^2}{R}$ （起跳时不计感应电动势，进入水银槽，又没有忽略 $\varepsilon_{感}$ ）

其中 $\varepsilon_{感} = BLv_0$

ε 则只有追寻到导体离开的过程， $\varepsilon = \bar{i}R = \frac{q}{t}R$ （这里的问题就大了， \bar{i} 是

电流对时间的平均值，而在 $P = \frac{(\varepsilon + \varepsilon_{\text{感}})^2}{R}$ 中的 ε 应该取方均根值（即交流电的“有效值”）才是严谨的！但是，在这里求有效值几乎是不可能的，因此也就只能勉为其难了。）

【答案】(1) 电量为 0.1125C；(2) 瞬时电功率为 20.88W。

第三讲 自感、互感及其它

一、自感

- 1、自感现象：电路中因自身电流变化而引起感应电动势的现象。
- 2、自感电动势：自感现象中产生的电动势

$$\varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

L 为自感系数，简称自感或电感。对于 N 匝闭合回路， $L = N \frac{\Phi}{I}$ ，*对长直螺线管， $L = \mu n^2 V$ （其中 V 为螺线管体积；若无铁芯， μ 减小为 μ_0 ）。

值得注意的是，随着 L 、 $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ 的增大， $\varepsilon_{\text{自}}$ 可以很大，但是自感电流却不会随之增大，定量的计算（解微分方程）表明，自感电流只会在初始电流的基础上呈指数函数减小。

【例题 8】在图 10-18 所示的电路中， $\varepsilon = 12\text{V}$ ， $r = 1.0\Omega$ ， $R_1 = 2.0\Omega$ ， $R_2 = 9.0\Omega$ ， $R_3 = 15\Omega$ ， $L = 2.0\text{H}$ 。现让 K 先与 A 接通，然后迅速拨至 B ，求自感线圈上可产生的最大自感电动势。

【解说】如果选择定义式求解， $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ 不知，故这里只能根据自感电流的变化规律解题。

在不作特别说明的情况下，忽略 L 的直流电阻。 K 接 A 时， L 上的稳恒电流 $I = 1.0\text{A}$ ； K 接 B 后，将 L 视为电动势为 $\varepsilon_{\text{自}}$ 的电源， $i = \frac{\varepsilon_{\text{自}}}{R_2 + R_3}$

i 取极大值 I 时（ K 接 B 后的初始时刻）， $\varepsilon_{\text{自}}$ 极大。

【答案】24V。

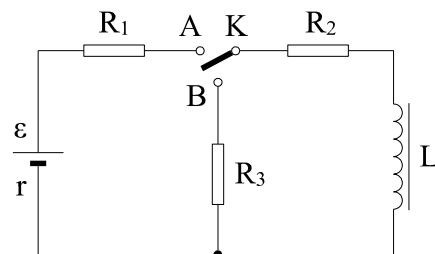


图 10-18

二、互感与变压器

- 1、互感：两线圈靠近放置，当 1 中有变化电流时，2 中会感应出电流，若 2 中的感应电流仍是变化的，则它又会激发磁场并在 1 中形成电磁感应，这种显现称为互感。

互感电动势： $\varepsilon_{12} = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$ ， $\varepsilon_{21} = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$ ，其中 M 为互感系数。

- 2、变压器：两个（或多个）有互感耦合的静止线圈的组合叫变压器。接电源的线圈叫原线圈，接负载的叫副线圈。

理想变压器：无铜损（导线焦耳热）、铁损（涡流能耗）、磁损（漏磁通），空载电流无穷小的变压器，即 $P_{\text{入}} = P_{\text{出}}$ 。

对于原、副线圈一对一的理想变压器，有

$$u_1 = -\varepsilon_1 = -(-n_1 \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t})$$

$$u_2 = \varepsilon_2 = -n_2 \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t}$$

即原、副线圈电压瞬时值 $\frac{u_1}{u_2} = -\frac{n_1}{n_2}$

但有效值 $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$

联系功率关系，可得 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$

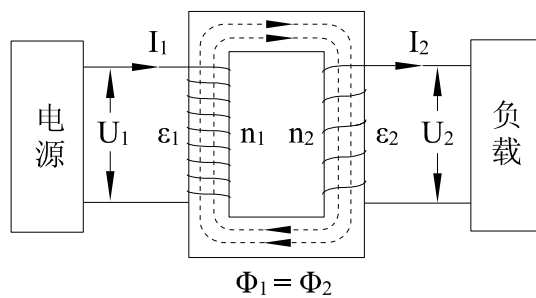


图 10-19

三、暂态过程

由一个稳态向另一个稳态过渡的过程叫暂态过程。

1、RL 暂态特性

对图 10-20 所示的电路，K 合上“过程”的电流 i 变化情形如图 10-21 所示。L 在两个稳态的等效：初态——断路；末态——短路。

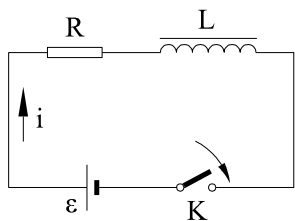


图 10-20

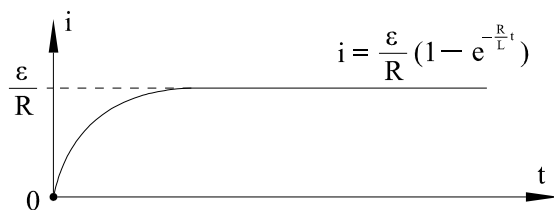


图 10-21

对图 10-22 所示的电路，K 合上“过程”的电流 i 变化情形如图 10-23 所示。

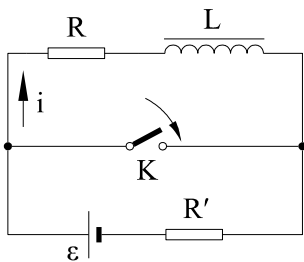


图 10-22

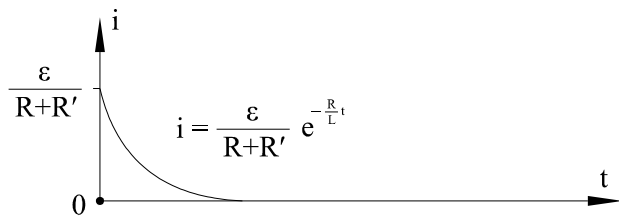


图 10-23

2、RC 暂态特性

对图 10-24 所示的电路，K 合上“过程”，电容器的电压 U_c 变化情形如图 10-25 所示。C 在两个稳态的等效：初态——短路；末态——断路。

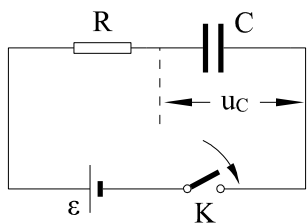


图 10-24

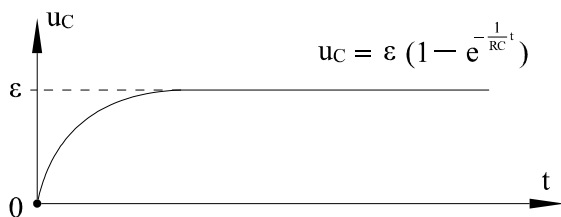


图 10-25

对图 10-26 所示的电路, K 合上“过程”, 电容器的电压 U_c 变化情形如图 10-27 所示。

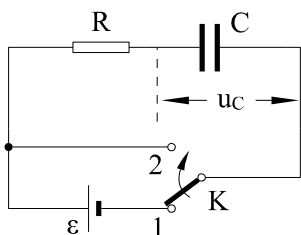


图 10-26

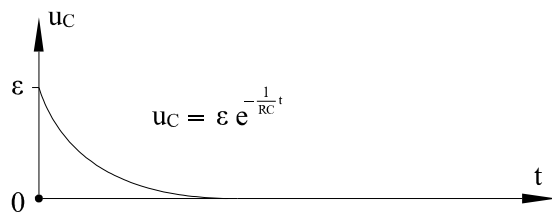


图 10-27

【例题 9】在图 10-28 所示的 RLC 电路中, L 不计电阻, $\varepsilon = 6.0\text{V}$, $r = 1.0\Omega$, $R_1 = 0.5\Omega$, $R_2 = 1.5\Omega$ 。试求: (1) K 接通时刻各元件的电流; (2) K 接通后各元件的电压。

【解说】直接应用 L、C 元件在两种特殊稳态的“等效处理”。

【答案】(1) $I_{R_1} = I_{R_2} = I_C = 2.0\text{A}$, $I_L = 0$; (2) $U_{R_1} = 2.0\text{V}$, $U_L = U_{R_2} = U_C = 0$ 。

【例题 10】如图 10-29 所示, 两匝数相同的线圈绕在同一铁芯上, 其一经电键 K 与电动势为 ε 的电源相连, 其一与电阻 R 相连。已知两线圈的自感系数均为 L, 试求: (1) 闭合 K 瞬间, R 消耗的功率; (2) 过电源的电流随时间的变化关系; * (3) 合上 K 后, 经时间 τ 再将 K 断开, 求此后 R 上消耗的功率。

【解说】闭合 K 瞬时是暂态过程的初态, 双线圈可视为理想变压器, 对原线圈

$$-\varepsilon_{\text{自}} = \varepsilon = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = L \frac{I - I_0}{t}$$

第 (3) 问 R 消耗的功率是原线圈 (或副线圈)

磁场能的释放 ($\frac{1}{2}LI^2$)

【答案】(1) $\frac{\varepsilon^2}{R}$; (2) $\frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon}{L}t$; (3) $\frac{\varepsilon^2\tau^2}{2L}$ 。

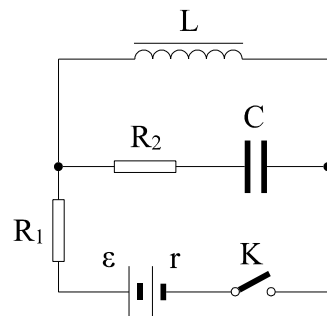


图 10-28

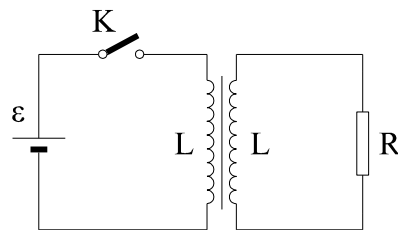


图 10-29

第十二部分 量子论

第一节 黑体辐射

1. 热辐射

在上一章中,我们已经提到,开尔文勋爵所说的两朵乌云的第二朵是黑体辐射的实验结果被拔开时,人们发现了近代物理学的两个基础理论的另一个理论即量子力学论.

量子论

由于温度升高而发射能量的辐射源,通常称为热辐射.热辐射体中原子和分子不发生运动状态变化.热辐射能量来自物体的热运动.物体在任何温度下(只要不是绝对零度)都向四周进行热辐射,也从周围吸收这种辐射.热辐射的光谱是连续光谱.一般情况下,热辐射的光谱不仅与辐射源的温度有关,还与它的表面特征有关.

为了定量的描述热辐射与温度和物体特性的关系,首先引入下列概念:

(1) 辐射出射度(简称辐出度)

温度为 T 的热辐射体,在单位时间内从单位面积向各个方向辐射出的所有频率的辐射能量.又称为辐射能通量密度.

(2) 单色辐射出射度

温度为 T 的热辐射体,在单位时间内从单位面积向各个方向所发射的、在某频率附近的单位间隔内辐射能量(即功率)叫做该物体的单色辐射出射度.单色辐射出射度与温度、频率和物体的表面特性有关.

(3) 吸收本领

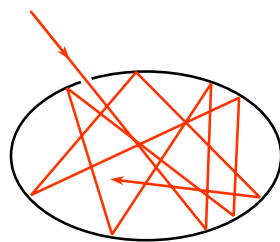
入射到物体上的辐射通量,一部分被物体散射或反射(对透明物体,还会有一部分透射),其余的为物体所吸收.

2. 黑体

热辐射的规律是很复杂的,我们知道,各种物体由于它有不同的结构,因而它对外来辐射的吸收以及它本身对外的辐射都不相同.但是有一类物体其表面不反射光,它们能够在任何温度下,吸收射来的一切电磁辐射,这类物体就叫做绝对黑体,简称黑体.

绝对黑体是我们研究热辐射时为使问题简化的理想模型.实际上黑体只是一种理想情况,但如果做一个闭合的空腔,在空腔表面开一个小孔,小孔表面就可以模拟黑体表面.这是因为从外面射来的辐射,经小孔射入空腔,要在腔壁上经过多次反射,才可能有机会射出小孔.因此,在多次反射过程中,外面射来的辐射几乎全部被腔壁吸收.在实验中,可在绕有电热丝的空腔上开一个小孔来实现,正因为实验所用的绝对黑体都是空腔辐射,因此,黑体辐射又称为空腔辐射.

3. 黑体的经典辐射定律



1879年, 斯特藩(J. Stefan, 1835~1893年)从实验观察到黑体的辐出度与绝对温度 T 的四次方成正比, 即:

$$J = \sigma T^4$$

1884年玻尔兹曼从理论上给出这个关系式. 其中 $\sigma = 5.67032 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$.

对一般物体而言, $J = \varepsilon \sigma T^4$ ($\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), ε 为发射率, J 为辐出度, $J = \varepsilon \sigma T^4$ ($\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), 式中 $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} (\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4})$, 称为斯特藩-玻尔兹曼常数. 通常 $\varepsilon < 1$, 但对黑体而言, $\varepsilon = 1$ (即为完全辐射).

如果物体周围的环境温度为 T_0 , 则须考虑物体表面对入射辐射能的吸收. 假定入射的辐射能通量密度为 σT_0^4 , a 为物体表面的吸收率, 则该物体表面所吸收的辐射能通量密度为 $J = a \sigma T_0^4$, 通常 $a < 1$, 但对黑体而言, $a = 1$ (即为完全吸收). 因此物体表面对入射能量的反射率为 $r = 1 - a$.

从理论上我们不难证明物体表面的放射率和吸收率相等, 即 $e = a$, 此称为我们可以说: 容易辐射能量的物体, 也容易吸收入射的能量.

处于热平衡时, 黑体具有最大的吸收比, 因而它也就有最大的单色辐出度.

4. 紫外灾难

(1) 基尔霍夫定律(Kirchhoff's Law):

热平衡状态时, 任何物体的单色辐出度与单色吸收比之比, 等于同温度条件下绝对黑体的单色辐出度

因此, “绝对黑体的单色辐出度”, 是当时研究的尖端课题.

推论:

- 若 $T_A = T_B$, 则辐射多的吸收也多, 不能辐射亦不能吸收;
 - λ 一定时, 绝对黑体辐射和吸收的能量比同温度下的其它物体都多.
- 经典理论在短波段的这种失败成为“紫外灾难”.

(2) 普朗克假设:

- 空腔黑体可用一些线性谐振子来代表.
- 谐振子只能处于某些特殊的不连续的状态中, 它们的能量只能是 $\varepsilon = h\nu$ 的整数倍.
- 发射和吸收的能量只能是 ε 的整数倍.

【例1】(1) 有一金属圆柱体的表面积为 S , 其内部装有电热丝, 通电流后可以生热, 供热的功率为 P_0 , 起始时圆柱体的表面以砂纸磨亮, 其辐射发射率可视为零. 经通电加热后, 利用热电偶测得圆柱体表面达成热平衡时的温度为 T_1 . 现利用蜡烛将该圆柱体表面熏黑, 其辐射发射率可视为1, 以同样的方式通电加热, 则圆柱体表面的热平衡温度为 T . 设当时金属圆柱体周围的环境温度为 T_0 , 在实验期间稳定不变. 因热传导和对流而损失的热量功率, 可合理假设为正比于圆柱

体表面温度和环境温度的差值. 试求 T 和上述已知量, 即 S 、 P 、 T_1 和 T_0 , 之间的数学关系式为何?

(2) 下列为已知量的数值:

电热丝的供热功率 $P=15.0W$

金属圆柱体的表面积 $S=24.8cm^2$

金属圆柱体表面磨亮时的热平衡温度 $T_1=212^\circ C$

环境温度 $T_0=25^\circ C$.

试求圆柱体表面熏黑时的热平衡温度 T 为何?

【解析】(1) 当金属圆柱体表面磨亮时, 没有因辐射而致的热损失, 只有因传导和对流而致的热损失. 后者根据题中的假设, 与圆柱表面温度 T_1 和环境温度 T_0 之间的差值成正比, 故

$$P=k(T_1-T_0) \quad (1)$$

式中 k 为比例常数. 当圆柱体表面熏黑时, 除了因传导和对流的热损失外, 还须加计辐射的热损失. 设圆柱体表面的热平衡温度为 T , 则

$$P=\sigma S(T^4-T_0^4)+k(T-T_0) \quad (2)$$

由上两式消去比例常数 k , 可得

$$P=\sigma S(T^4-T_0^4)+\frac{P(T-T_0)}{T_1-T_0}$$

$$T^4+\frac{P}{\sigma S(T_1-T_0)}(T-T_1)-T_0^4=0 \quad (3)$$

(2) 将已知数值代入 (3) 式, 可得

$$T^4+\frac{15.0}{5.670\times 10^{-8}\times 24.8\times 10^{-4}\times (485-298)}(T-485)-298^4=0$$

利用逼近求根法如下表:

T (K)	$f(T)=T^4+\frac{P}{\sigma S(T_1-T_0)}(T-T_1)-T_0^4$ (K^4)
4	-1.50×10^9
34.0	
4	-6.02×10^8
35.0	
4	-1.52×10^7
35.5	
4	-6.21×10^7
35.6	

4	2.80×10^7
35.7	
4	2.98×10^8
36.0	

若取三位有效数字，则 $T = 436K = 163^\circ C$

【总结】

第二节 光电效应

普朗克提出了能量子概念以后，许多物理学家都想从经典物理学中求得解释，但始终无法成功。为了尽量缩小与经典物理学之间的差距，普朗克把能量子的概念局限于振子辐射能量的过程，而认为辐射场本身仍然是连续的电磁波。直到1905年爱因斯坦在光电效应的研究中，才突破了普朗克的认识，看到了电磁波能量普遍都以能量子的形式存在。从光和微观粒子相互作用的角度来看，各种频率的电磁波都是能量为的光粒子（称作光子）体系，这就是说，光不仅有波的性质而且有粒子的性质。

1. 光电效应及其实验规律

在1886年~1887年，赫兹在证实电磁波的存在和光的麦克斯韦电磁理论的实验过程中，已经注意到：当两个电极之一受到紫外光照射时，两电极之间的放电现象就比较容易发生。然而当时赫兹对这个现象并没有继续研究下去。直到电子发现后，人们才知道这是由于紫外光的照射，使大量电子从金属表面逸出的缘故。这种电子在光的作用下从金属表面发射出来的现象，称为光电效应，逸出来的电子称为光电子。

研究光电效应的实验装置如图所示，阴极K和阳极A封闭在真空管内，在两板之间加一可变电压，用以加速或阻挡释放出来的电子。光通过石英小窗W照到电极K上，在光的作用下，电子从电极K逸出，并受电场加速而形成电流，这种电流称为光电流。

实验结果发现光和光电流之间有一定的关系。

首先在入射光的强度与频率不变的情况下，电流—电压的实验曲线如图8—9所示。曲线表明，当加速电压V增加到一定值时，光电流达到饱和值，这是因为单位时间内从阴极K射出的光电子全部到达阳极A。若单位时间内从电极K上击出的光电子数目为n，则饱和电流 $I = ne$ 。

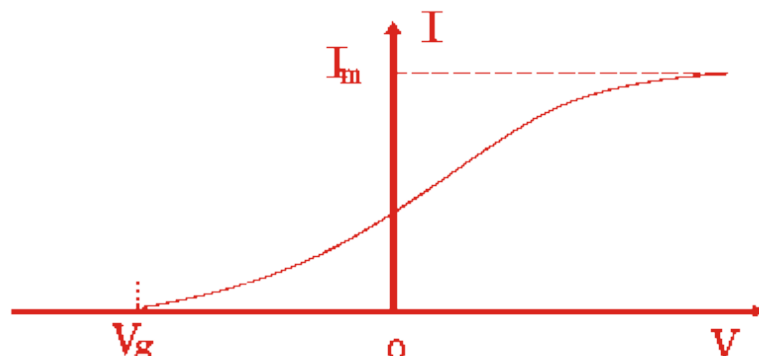
另一方面，当电位差V减小到零，并逐渐变负时，光电流并不降为零，就表明从电极K逸出的光电子具有初动能。所以尽管有电场阻碍它运动，仍有部分光电子到达电极K。但是当反向电位差等于 $-Ve$ 时，就能阻止所有的光电子飞向电极A，光电流降为零，这个电压叫遏止电压。它使具有最大初速度的电子也不能到达电极A。如果不考虑在测量遏止电压时回路中的接触电势差，那么我们就根据遏止电压 $-V_g$ 来确定电子的最大速度和最大动能，即

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_g$$

在用相同频率不同强度的光去照射电极时，得到的电流—电压曲线如图所示。它表示出对于不同强度的光， V_g 是相同的，这说明同一种频率不同强度的

光所产生的光电子的最大初动能是相同的。

此外，用不同频率的光去照射电极 K 时，实验结果是频率愈高， V_g 愈大。并且与 V_g 成直线关系，频率低于的光，不论强度多大，都不能产生光电子，因此不同的材料，阈频率不同。



总结所有的实验结果，光电效应的规律可归纳为如下几点：

1. 饱和电流 I 的大小与入射光的强度成正比，也就是单位时间内被击出的光电子数目与入射光的强度成正比。（光电效应第一定律）

2. 光电子的最大初动能（或遏止电压）与入射光的强度无关，而只与入射光的频率有关。频率越大，光电子的能量就越大。（光电效应第二定律）

3. 入射光的频率低于遏止频率（极限频率，红限频率）的光，不论光的强度如何，照射时间多长，都没光电子发射。（光电效应第三定律）

4. 光的照射和光电子的释放几乎是同时的，在测量的精度范围内 10^{-9} s 观察不出这两者间存在滞后现象。

2. 光电效应和波动理论的矛盾

光能使金属中的电子释放，从经典理论来看，是不难理解的。我们知道金属里面有大量的自由电子，这些电子通常受到正电荷的引力作用，而被束缚在金属表面以内，它们没有足够的能量逸出金属表面。但因光是电磁波，在它的照射下，光波中的电场作用于电子，迫使电子振动，给电子以能量，使电子有足够的能量挣脱金属的束缚而释放出去。因此按照光的电磁理论可以预测：

(1) 光愈强，电子接受的能量愈多，释放出去的电子的动能也愈大。

(2) 释放电子主要决定于光强，应当与频率等没有关系。但是，实验测量的结果却并不如此。

(3) 关于光照的时间问题，波动观点更是陷于困境。从波动观点来看，光能量是均匀分布，在它传播的空间内，由于电子截面很小，积累足够能量而释放出来必须要经过较长的时间，合实验事实完全完全不符。

3. 爱因斯坦光电效应方程

为了解释光电效应的所有实验结果，1905 年爱因斯坦推广了普朗克关于能量量子的概念。前面已经指出普朗克在处理黑体辐射问题时，只是把器壁的振子能量量子化，腔壁内部的辐射场仍然看作是电磁波。然而爱因斯坦在光电效应的研究中指出：光在传播过程中具有波动的特性，而在光和物质相互作用的过程中，光能量是集中在一些叫做光子（简称光子）的粒子上。从光子的观点来看，产生光电效应的光是光子流，单个光子的能量与频率成正比即：

$$\varepsilon = h\nu$$

式中 h 是普朗克常数。

把光子的概念应用于光电效应时，爱因斯坦还认为一个光子的能量是传递给

金属中的单个电子的。电子吸收一个光子后，把能量的一部分用来挣脱金属对它的束缚，余下的一部分就变成电子离开金属表面后的动能，按能量守恒和转换定律应有：

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

上式称为爱因斯坦光电效应方程。其中 $\frac{1}{2}mv^2$ 为光电子的动能， W 为光电子逸出金属表面所需的最小能量，称为脱出功。

对光电效应四个定律的解释：

(1) 光电效应第一定律的解释

$$I \propto Ne: \text{光子数} \uparrow \Rightarrow \text{光电子数} \uparrow \Rightarrow I \uparrow$$

(2) 光电效应第二定律的解释：

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A \begin{cases} h = ek \\ hv_0 = A \\ A = eU_0 \end{cases}$$

$$|U_a| = kv - U_0$$

$|U_a|$ ：遏止电压， U_0 ：逸出电位

(3) 光电效应第三定律的解释：

$$\nu_0 = \frac{A}{h} = \frac{A}{ek}$$

光电子动能不小于零

(4) 光电效应第四定律的解释：

$$t \leq 10^{-8} s: \text{光子能量} \Rightarrow \text{电子，无须能量积累时间}$$

1921年，爱因斯坦因对物理学的贡献，特别是光电效应获诺贝尔物理学奖
爱因斯坦理论的验证

1916年，密立根进行了精密的测量，证明 $U_a \sim \nu$ 确为直线，且直线的斜率为

$\frac{h}{e}$. 1923年获诺贝尔物理学奖

4. 光子的质量和动量

$$\begin{cases} \varepsilon = h\nu \\ P = \frac{h}{\lambda} \\ m = \frac{h\nu}{c^2} \end{cases}$$

光子既具有一定的能量，就必须具有质量。但是光子以光的速度运动，牛顿力学便不适用。按照狭义相对论质量和能量的关系式 $\varepsilon = mc^2$ ，就可以决定一个光子的质量

$$m_{\ast} = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

在狭义相对论中, 质量和速度的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

m_0 为静止质量, 光子永远以不变的速度 c 运动, 因而光子的静止质量必然等于零, 否则 m 将为无穷大. 因为相对于光子静止的参照系是不存在的, 所以光子的静止质量等于零也是合理的. 而原子组成的一般物质的速度总是远小于光速的, 故它们的静止质量不等于零. 在 m_0 是否等于零这一点上光子和普通的物质有显著的区别. 在狭义相对论中, 任何物体的能量和动量的关系为

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

光子的静止质量为 0, 故光子的动量为

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

这是和光子的质量为 $m = \frac{p}{c} = \frac{h\nu}{c^2}$, 速度为 c .

光电效应明确了光的行为像粒子, 并且可用动力学的变量 (动量和能量) 来描述粒子的行为; 在光和物质相互作用过程中, 光子是整体在起作用. 另一方面, 在讨论衍射和干涉现象时, 需要把光作为波动来处理, 于是用波长来阐明问题.

波动特征和粒子特征是互相对立的, 但并不是矛盾的.

光的波长既适宜于显示波动特征, 同时又也容易显示粒子特征. 对于电磁波谱的长波段, 表示其波动特征的物理量 λ 和较大, 而表示其粒子特征的物理量 ε 和 p 较小, 因而容易显示波动特征, 反之, 对于电磁波谱的短波段, 表示其波动特征的物理量 λ 和较小, 而表示其粒子特征的物理量 ε 和 p 较大, 因而容易显示粒子特征.

【例 1】 将一块金属板放在离单色点光源 5 米远的地方, 光源的光功率输出为 10^{-3} 瓦. 假设被打出的光电子可以从半径为 10^{-8} 米 (约相当于原子直径的十倍) 的圆面上以从光源取得它所得的能量, 已知打出一个电子需要 5.0eV. 现在将光认为是经典波动, 对这种装置的一个“靶”来说, 打出一个光电子需要多长时间?

【解析】 电子接受能量的靶面积为 $\pi \cdot (10^{-9})^2$, 半径为 5 米的球面面积为 $4\pi (5)^2 \text{米}^2 = 100\pi \text{米}^2$, 前者是后者的 10^{-20} , 故每秒投射于靶面积上的能量为 $10^{-3} \cdot 10^{-20}$ 焦耳.

打出一个电子需要能量 5eV, 即 8×10^{-19} 焦耳, 故积累这些能量需时

$$\frac{8 \times 10^{-19}}{10^{-23}} \text{秒} = 22.22 \text{小时}.$$

实际上光电效应是几时的, 根本不需要这么长的时间. 这说明光与光电阴极电子的作用决不是经典波动模型中能量积累的那种形式

【例 2】 若一个光子的能量等于一个电子的静能量, 试问该光子的动量和波长是多少? 在电磁波谱中它是属何种射线?

【解析】 一个电子的静能量为 $m_0 c^2$, 按题意

$$h\nu = mc^2$$

光子的动量

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{m_0 c^2}{c} = m_0 c$$

$$= 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.73 \times 10^{-22}} = 0.024 \text{ \AA}$$

因电磁波谱中 γ 射线的波长在 $300 \sim 10^{-4} \text{ \AA}$ 范围内，所以该光子在电磁波谱中属于 γ 射线。

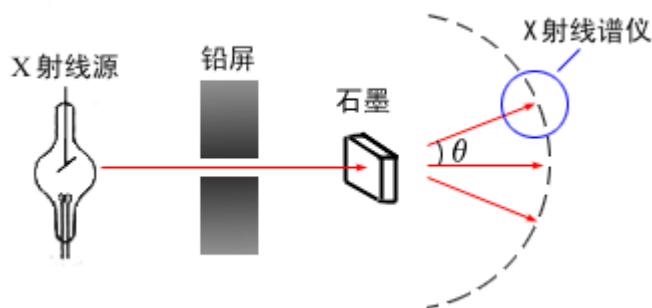
5. 康普顿效应

(1) 散射现象：光通过不均匀物质时，向各个方向发射的现象

实验发现：X 射线 \rightarrow 金属或石墨时，也有散射现象

1922、1923 年康普顿及其学生吴有顺进行了系统研究

(2) 实验装置：如图



(3) 实验结果：

a. 散射光中除有与入射线波长 λ_0 相同的，还有比 λ_0 大的波长 λ ， $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随

散射角 θ 而异， θ 增大时， λ 的强度增加， λ_0 的强度减小。

b. 当散射角 θ 确定时，波长的增加量 $\Delta\lambda$ 与散射物质的性质无关。

c. 康普顿散射的强度与散射物质有关。原子量小的散射物质，康普顿散射较强，原波长的谱线强度较低。反之相反。

按经典电磁理论，光的散射是带电粒子在入射光电场作用下作受迫振动，散射光与入射光应该有相同波长。

按照光子理论，一个光子与散射物中的一个自由电子发生碰撞，散射光子将沿某一方向进行——康普顿散射，光子与电子之间碰撞遵守能量守恒和动量守恒，电子受到反冲而获得一定的动量和动能，因此散射光子能量要小于入射光子能量。由光子的能量与频率间的关系 $\varepsilon = h\nu$ 可知，散射光的频率要比入射光的频

率低，因此散射光的波长 $\lambda > \lambda_0$ 。如果入射光子与原子中被束缚得很紧的电子碰

撞, 光子将与整个原子作弹性碰撞 (如乒乓球碰铅球), 散射光子的能量就不会显著地减小, 所以观察到的散射光波长就与入射光波长相同.

下图为光子与自由电子弹性碰撞的示意图. 应用相对论质量、能量、动量关系, 有

$$\begin{cases} h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \\ m\mathbf{v} = \frac{h\nu_0}{c}\mathbf{n}_0 - \frac{h\nu}{c}\mathbf{n} \end{cases}$$

式中 m_0 、 m 为电子的静质量和质量, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. 将上式第二式写成分量式

$$mv\cos\varphi = \frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta$$

$$mv\sin\varphi = \frac{h\nu}{c}\sin\theta$$

解以上联立方程组, 消去 φ , 即得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

式中

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

叫做电子的康普顿波长. 上式表明 $\Delta\lambda$ 与散射物质的性质无关.

康普顿散射进一步证实了光子论, 证明了光子能量、动量表示式的正确性, 光确实具有波粒两象性. 另外证明在光电相互作用的过程中严格遵守能量、动量守恒定律.

在基元相互作用过程中, 能量、动量守恒. 1927年, 康普顿因此获诺贝尔物理学奖

【例1】 求 $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ 的可见光光子和 $\lambda_2 = 0.1 \text{ nm}$ 的 X 射线光子的能量、动量和质量?

$$\varepsilon_1 = 3.98 \times 10^{-19} \text{ J}, P_1 = 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}, m_1 = 4.42 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

$$\varepsilon_2 = 1.99 \times 10^{-15} \text{ J}, P_2 = 6.63 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}, m_2 = 2.21 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

【例2】 $\lambda_0 = 0.01 \text{ nm}$ 的 X 射线, 射向静止的自由电子, 观察方向 $\varphi = 90^\circ$,

求: ① $\lambda = ?$ ② 反冲电子的动能和动量?

① $\lambda = 0.01243 \text{ nm}$

② $E_k = 3.8 \times 10^{-15} \text{ J} = 2.4 \times 10^4 \text{ eV}, P_e = 6.63 \times 10^{-23} \vec{i} - 5.53 \times 10^{-23} \vec{j} (\text{kg} \cdot \text{m/s})$

或： $P_e = 8.51 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, $\theta = 38^\circ 44'$

【例 3】已知 X 光光子的能量为 0.6 MeV ，在康普顿散射之后，波长变化了 20%，求反冲电子的能量。（ $E_e = 0.61 \text{ MeV}$ ）

练习

- 下列各物体，哪个是绝对黑体？
 - 不辐射可见光的物体
 - 不辐射任何光线的物体；
 - 不能反射可见光的物体
 - 不能反射任何光线的物体。
- 以金属表面用绿光照射开始发射电子，当用下列光照射时，有电子发出的为：
 - 紫光
 - 橙色光
 - 蓝光
 - 红光
- 钾金属表面被蓝光照射，发出光电子，若照射的蓝光光强增加，则
 - 单位时间内发出光电子数增加；
 - 光电子的最大动能增加；
 - 发出光电子的红限增加；
 - 光电效应的发生时间后滞缩短。
- 波长为 0.5 微米的绿光频率为_____ Hz，其电子能量为_____ 焦耳，合_____ 电子伏特；频率为 1 兆赫的无线电量子能量为_____ 焦耳。
- 已知从铯表面发射出的光电子最大动能为 2 eV ，铯的脱出功为 1.8 eV ，则入射光光子能量为_____ eV，即_____ 焦耳，其波长为_____ 埃。

第三节 波粒二象性

1. 光的波粒二象性

波动性：干涉、衍射、偏振

粒子性：热辐射，光电效应，散射等

同时具有，不同时显现

2. 德布罗意假设

(1) 假设：质量为 m 的粒子，以速度 v 运动时，不但具有粒子的性质，也具有波动的性质；

粒子性：可用 E 、 P 描述

$$E = mc^2 = h\nu, \quad P = mv = \frac{h}{\lambda}$$

波动性：可用 λ, ν 描述

$$v = \frac{mc^2}{h} = \frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}, \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0v} \text{----- 德布罗意公式}$$

(2) 电子的德布罗意波长

$$\text{加速电势差为 } U, \text{ 则: } \frac{1}{2}m_0v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2eUm_0}} = \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}$$

$$\lambda = \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm}$$

如: $U=150V, \lambda=0.1nm$ (与 x 射线的波长相当)

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{eU(eU+2m_0c^2)}}$$

$$E_0 \gg E_k \Rightarrow \lambda = \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm}$$

$$E_k \gg E_0 \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_k}$$

3. 德布罗意假设的实验验证

德布罗意关于物质波的假设在微观粒子的衍射实验中得到了验证。其中最具有代表性的是电子散射实验、透射实验和双缝干涉实验。这些实验有力地证明了德布罗意物质波假说的正确性。

实物粒子的衍射效应在近代科技中有广泛的应用,例如中子衍射技术,已成为研究固体微观结构的最有效的手段之一。

光学仪器的分辨率与波长成正比,而电子的德布罗意波长比光波长短很多,例如在 10 万伏的加速电压下,电子的波长只有 0.004 nm ,比可见光短 10 万倍左右,因而利用电子波代替光波制成电子显微镜就可以有极高的分辨本领。现代的电子显微镜不仅可以直接看到如蛋白质一类的大分子,而且能分辨单个原子的尺寸,为研究物质结构提供了有力的工具。

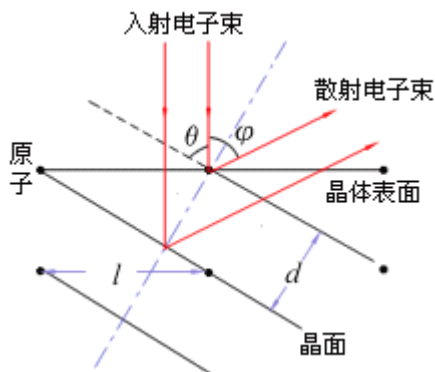
(1) 电子散射实验

电子散射实验的典型代表是戴维孙-革末实验。1927 年戴维孙和革末用电子束垂直投射到镍单晶,电子束被散射。电子经晶格散射后在某一特定方向衍射极大,这一结果与 X 射线散射相似,其强度分布可用德布罗意关系和衍射理论给以解释,从而验证了物质波的存在。

衍射加强时的电子德布罗意波长应满足布拉格公式

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

式中 θ 是入射电子束对晶面的掠射角， d 是晶面间距。晶面间距 d 与镍原子的间隔 l 的关系是 $d = l \cos \theta$ ，考虑第一级衍射极大，有 $l \sin 2\theta = \lambda$



由图知电子相对于入射方向的散射角 φ 与掠射角 θ 之间有关系 $\varphi = \pi - 2\theta$ ，因此上式可写成 $l \sin \varphi = \lambda$

当加速电压 $U=54$ 伏，加速电子的能量： $eU = \frac{1}{2}mv^2$

电子的德布罗意波长： $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = 16.7 \text{ nm}$

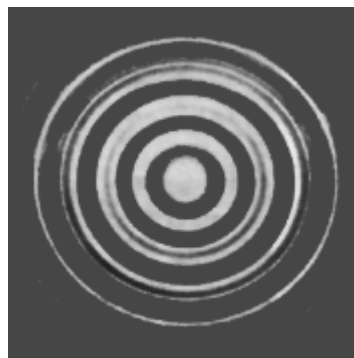
镍的原子间隔是 21.5 nm ，由此求出衍射第一极大的散射角度：

$$\varphi = \arcsin \frac{16.7}{21.5} = 51^\circ$$

实验测量出的值 $\varphi = 50^\circ$ ，是理论值比实验值稍大的原因是电子受正离子的吸引，在晶体中的波长比在真空中稍小（动量稍大）。经修正后，理论值与实验结果完全符合。

(2) 电子透射实验

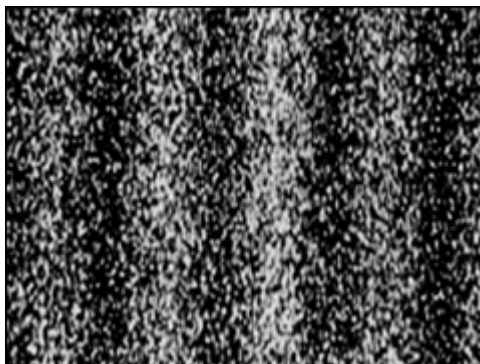
电子穿过晶体薄片后产生的衍射，与 X 射线通过晶体的衍射极其类似。汤姆逊实验证明了电子在穿过金属片后也象 X 射线一样产生衍射现象。下图是电子射线通过多晶时的衍射图样。



戴维逊和汤姆逊因验证电子的波动性分享 1937 年的物理学诺贝尔奖金。

(3) 电子双缝干涉实验

1960年，约恩孙直接做了电子双缝干涉实验，从屏上摄得了类似杨氏双缝干涉图样的照片。干涉图样如下图所示。



在电子波动性获得证实以后，在其它一些实验中也观察到中性粒子如分子、原子和中子等微观粒子，也具有波动性，1988年蔡林格等做了中子的双缝实验。德布罗意公式也同样正确，德布罗意公式成了波粒二象性的统一性的基本公式，德布罗意由于发现电子的波动性，荣获1929年诺贝尔物理学奖。

【例1】求波长都等于0.2nm的光子与电子的总能量和动量

【例2】电子通过单缝的实验中，加速电压 $U=100V$ ，垂直穿过 $a=2nm$ 的单缝，求：

- ①加速后的速率；
- ②电子相应的波长；
- ③中央明纹的半角宽度 φ

解：① $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5.9 \times 10^6 \text{ m/s}$ ② $\lambda = \frac{1.225}{\sqrt{U}} = 0.1225 \text{ nm}$

③ $\varphi = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right) = 3.512^\circ$

第四节 测不准关系

1. 描述物体的运动状态

(1) 宏观： $\vec{r}, \vec{v}(\vec{P})$ ，两者可同时准确测量；

(2) 微观粒子： $\vec{r}, \vec{v}(\vec{P})$ 不能同时准确测量，原因是微观粒子具有波、粒二

象性，有测不准关系： $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h$

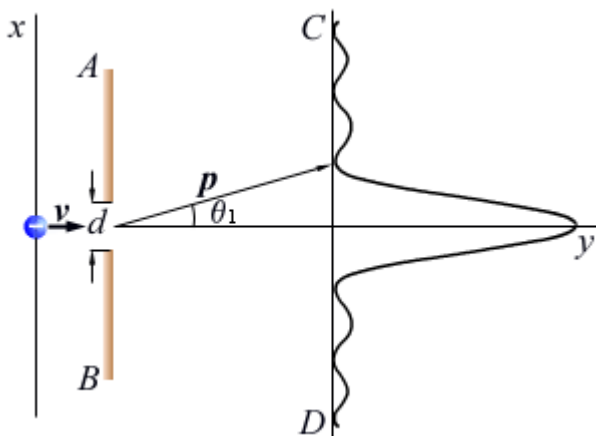
即：粒子有某方向的坐标测不准量与该方向上的动量分量的测不准量的积，必不小于普朗克常数；位置测得越准，动量测得越不准！

现代量子力学证明： $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi}$

2. 测不准关系的推证（1927年，海森堡）

微观粒子的位置和动量具有不确定性，这可用电子单缝衍射实验说明，并验证不确定关系。

如下图所示，设有一束电子，以速度 v 沿 y 轴射向 AB 屏上的单缝，缝宽为 d ，在屏幕 CD 上得到衍射图样，衍射的第一极小角为 θ_1 ，则 $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d}$



电子位置在 x 方向上的不确定量为 $\Delta x = d$ ，由于衍射的缘故，电子在 x 方向上动量分量 p_x 具有各种不同的量值。如果只考虑衍射主极大区域，则 x 方向动量不确定度为

$$\Delta p_x = p \sin \theta_1 = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\text{即 } \Delta x \cdot \Delta p_x = h$$

如果考虑高次衍射条纹， Δp_x 还要大些， $\Delta p_x \geq p \sin \theta_1$ ，因此一般地有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

这就是海森堡分析得到的不确定关系。

不确定度关系不是仪器的误差，或人为测量误差造成的，而是波粒二象性的必然结果。我们只能说粒子位置不确定性越大（ d 越宽），粒子的动量就越确定。能级的寿命越长，能级的宽度（不确定度）就越小，辐射产生的谱线宽度就越小，单色性就越好，反之亦然。

3. 讨论

(1) 不确定关系式表示电子的坐标及相应的动量不能同时准确测量

(2) 不确定关系取决于电子本身的固有特性—波粒二象性，即精度、方法等都无济于事

(3) 对宏观物体讲不受此限制

4. 其它表示：

能量、时间： $\Delta E \Delta t \geq h$

角动量、角位移： $\Delta L_\phi \cdot \Delta \phi \geq h$

5. 不确定关系的应用

(1) 估算氢原子可能具有的最低能量
电子束缚在半径为 r 的球内, 所以

$$\Delta x = r, \Delta p \sim \hbar/r, p \approx \Delta p \approx \hbar/r$$

当不计核的运动, 氢原子的能量就是电子的能量:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

用不确定关系代入上式得:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

基态能应满足

$$\frac{dE}{dr} = 0 \text{ 得}$$

$$-\frac{\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

由此得出基态氢原子半径

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi^2 m_e} = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$$

基态氢原子的能量

$$E_{\min} = -\frac{e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -13.6 \text{ eV}$$

与波尔理论结果一致。

(2) 解释谱线的自然宽度

原子中某激发态的平均寿命为 $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$

由普朗克能量量子假说 $R = h\nu$ 及 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \approx \frac{1}{2\pi \Delta t} \sim 1.59 \times 10^7 \text{ Hz}$$

这就是谱线的自然宽度。

【例 1】已知一个光子沿 x 方向传播, 其波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$, 对波长的测量是相当准确的, $\Delta \lambda = 5 \times 10^{-4} \text{ nm}$, 求该光子 x 坐标的不确定度; ($\Delta x \geq 0.5 m$)

【例 2】质量为 m 的粒子位置的不确定量等于粒子的德布罗意波长 λ , 求 Δv_x 的最小值. ($\Delta v_x \geq v$)

【例 3】 氢原子中基态电子的速度大约是 $10^6 m/s$ ，电子位置的不确定度可按原子大小估算 $\Delta x = 10^{-8} cm$ ，求电子速度的不确定度。

$(\Delta v_x \geq 7.3 \times 10^6 m/s) \Rightarrow$ 轨道概念在量子力学中无意义！