2009女子数学奥林匹克

第 一 天

1. 求证:方程 $abc=2\,009(a+b+c)$只有有限组正整数解 (a, b, c). (梁应德 供题)

2. 如图 1,在 $\triangle ABC$中,$\angle BAC=90°$,点 E在 $\triangle ABC$的外接圆圆 Γ 的弧 $\overset{\frown}{BC}$(不含点 A)内,$AE>EC$. 联结 EC 并延长至点 F,使得 $\angle EAC=\angle CAF$,联结 BF交圆 Γ 于点 D,联结 ED,记 $\triangle DEF$的外心为 O. 求证:A、C、O三点共线. (边红平 供题)

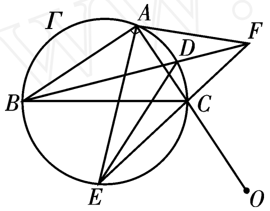

图 1

3. 在平面直角坐标系中,设点集

$$\{P_1, P_2, \cdots, P_{4n+1}\}=\{(x, y)\mid x、y为整数, |x|\leq n, |y|\leq n, xy=0\},$$

其中,$n\in \mathbf{N}_+$. 求

$$(P_1P_2)^2+(P_2P_3)^2+\cdots+(P_{4n}P_{4n+1})^2+(P_{4n+1}P_1)^2$$

的最小值. (王新茂 供题)

4. 设平面上有 $n(n\geq4)$个点 $V_1, V_2, \cdots, V_n$,任意三点不共线,某些点之间连有线段. 把标号分别为 $1, 2, \cdots, n$的 n枚棋子放置在这 n个点处,每个点处恰有一枚棋子. 现对这 n枚棋子进行如下操作:每次选取若干枚棋子,将它们分别移动到与自己所在点有线段相连的另一个点处;操作后每点处仍恰有一枚棋子,并且没有两枚棋子在操作前后交换位置. 若一种连线段的方式使得无论开始时如何放置这 n枚棋子,总能经过有限次操作后,使每个标号为 $k(k=1, 2, \cdots, n)$的棋子在点 V_k处,则称这种连线段的方式为"和谐的". 求在所有和谐的连线段的方式中,线段数目的最小值. (付云皓 供题)

第 二 天

5. 设实数 x、y、z大于或等于 1. 求证:

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\leq(xyz)^2-2xyz+2.$$

(熊 斌 供题)

6. 如图 2,圆 Γ_1、Γ_2内切于点 S,圆 Γ_2的弦 AB与圆 Γ_1切于点 C,M是弧 $\overset{\frown}{AB}$(不含点 S)的中点,过点 M作 $MN\perp AB$,垂足为 N. 记圆 Γ_1的半径为 r. 求证:$AC\cdot CB=2r\cdot MN$. (叶中豪 供题)

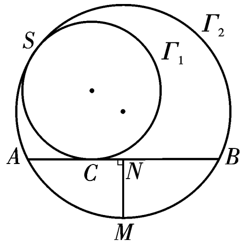

图 2

7. 在一个 10×10的方格表中有一个由 $4n$个 1×1的小方格组成的图形,它既可被 n个"田"型的图形覆盖,也可被 n个"□□□"或"□□□"型(可以旋转)的图形覆盖. 求正整数 n的最小值. (朱华伟 供题)

8. 设 $a_n=n\sqrt{5}-[n\sqrt{5}]$. 求数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2\,009}$中的最大项和最小项,其中,$[x]$表示不超过实数 x的最大整数. (王志雄 供题)

参 考 答 案

第 一 天

1. 只需证明:原方程满足 $a\leq b\leq c$的正整数解只有有限多组.

事实上,由 $a\le b\le c$,知

$$abc=2\,009(a+b+c)\le 6\,027c$$
$$\Rightarrow ab\le 6\,027.$$

因此,只有有限多组正整数对 (a,b),使得存在正整数 c满足

$$a\le b\le c \text{及} abc=2\,009(a+b+c).$$

又由于 $c(ab-2\,009)=2\,009(a+b)$,故对于给定的正整数对 (a,b),最多存在一个正整数 c满足

$$a\le b\le c \text{及} abc=2\,009(a+b+c).$$

因此,原方程满足 $a\le b\le c$的正整数解只有有限多组.

2.用同一法.

如图 3,设 $\triangle AEF$ 的外接圆圆 Γ 与 AC 的延长线交于点 P,联结 PE、PF.

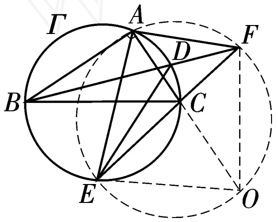

图 3

因 $\angle EAC=\angle FAC$,

所以,四边形 $AEPF$是圆内接四边形.

故 $\angle PEF=\angle PFE=\angle EAP$

$$\Rightarrow PE=PF$$
$$\Rightarrow \angle EPF=180°-2\angle EAP. \qquad ①$$

又 E、D、A、B四点共圆,则

$$\angle BDE=\angle EAB=90°-\angle EAC$$
$$=90°-\angle EAP. \qquad ②$$

由式①、②得

$$\angle BDE=\frac{1}{2}\angle EPF. \qquad ③$$

以点 P为圆心、PE为半径作$\odot P$.则点 E、F在$\odot P$上.结合式③知,点 D也在$\odot P$上.故 P为$\triangle DEF$的外心.

这就表明,点 P与 O重合,即$\triangle AEF$的外心 O位于 AC的延长线上.

3.首先证明一个引理.

引理 设实数 $s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_m$,且

$$f(s_1,s_2,\cdots,s_m)=\min_{(t_1,t_2,\cdots,t_m)}\{|t_1-t_2|^2+|t_2-t_3|^2+\cdots+|t_{m-1}-t_m|^2+|t_m-t_1|^2\},$$

其中,$(t_1,t_2,\cdots,t_m)$取遍$(s_1,s_2,\cdots,s_m)$的所有排列.则

$$f(s_1,s_2,\cdots,s_m)$$
$$\ge f(s_2,s_3,\cdots,s_m)+2(s_1-s_2)(s_1-s_3).$$

引理的证明:不妨设 $t_1=s_1$.则

$$|t_1-t_2|^2+|t_2-t_3|^2+\cdots+|t_{m-1}-t_m|^2+|t_m-t_1|^2$$
$$=|t_2-t_3|^2+\cdots+|t_{m-1}-t_m|^2+|t_m-t_2|^2+(|t_1-t_2|^2+|t_m-t_1|^2-|t_m-t_2|^2)$$
$$=|t_2-t_3|^2+\cdots+|t_{m-1}-t_m|^2+|t_m-t_2|^2+2(t_1-t_2)(t_1-t_m)$$
$$\ge f(s_2,s_3,\cdots,s_m)+2(s_1-s_2)(s_1-s_3).$$

回到原题.

设 $P_i=(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,4n+2)$,其中,$P_{4n+2}=P_1$.则

$$\sum_{i=1}^{4n+1}P_iP_{i+1}^2=\sum_{i=1}^{4n+1}[(x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2].$$

由引理可知

$$\sum_{i=1}^{4n+1}P_iP_{i+1}^2\ge 2f(n,\cdots,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2n+1\text{个}},-1,\cdots,-n)$$
$$\ge 2f(n-1,\cdots,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2n+1\text{个}},-1,\cdots,1-n)+16$$
$$\ge\cdots\ge 2f(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2n+1\text{个}},-1)+16(n-1)$$
$$=16n-8.$$

而当 $P_1,P_2,\cdots,P_{4n+1}$分别为

$(2,0),(4,0),\cdots,(n,0),\cdots,(3,0),(1,0),(0,2),(0,4),\cdots,(0,n),\cdots,(0,3),(0,1),(-2,0),(-4,0),\cdots,(-n,0),\cdots,(-3,0),(-1,0),(0,-2),(0,-4),\cdots,(0,-n),\cdots,(0,-3),(0,-1),(0,0)$

时,$\sum_{i=1}^{4n+1}P_iP_{i+1}^2=16n-8.$

因此,所求的最小值为 $16n-8$.

4.所求的最小值为 $n+1$.

首先,当线段数目不大于 n时,易知下面两种情形之一必然出现:

(1)在 $V_1,V_2,\cdots,V_n$中存在一个点,它最多与另外一个点有线段相连;

(2)对于 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 中的每一个点,恰有两个点与该点有线段相连.

如果情形(1)出现,不妨设这个点为 V_1. 则可以证明开始在点 V_1 的棋子只能一直停留在该点. 若不然,设在某一次操作中这枚棋子到达了顶点 V_i. 由条件知,在这次操作中必然有在另一个顶点 V_j 上的棋子被移动到 V_1. 这样,V_i、V_j 是两个不同的点,且都与 V_1 有线段相连,这与假设矛盾. 只要开始时,点 V_1 处的棋子不是 1 号棋子,就无法通过有限次操作,使得该棋子到达相应的顶点. 因此,这样的连线段的方式是不和谐的.

如果情形(2)出现,易知所有的线段连成了一条或者多条封闭折线. 如果是多条折线,则显然存在两个点 V_i、V_j,使得 V_i 上的棋子无法通过操作移动到 V_j 上,故只要开始时,点 V_i 处的棋子恰是 j 号棋子,就无法通过有限次操作使得该棋子到达相应的顶点,因此,这样的连线段的方式是不和谐的;如果是一条折线,则不妨设点 V_i、V_{i+1} 之间连了线($i=1, 2, \cdots, n, V_{n+1}=V_1$). 易知,在一次操作中,或者所有的棋子均不动,或者在点 V_i 处的棋子移动到点 V_{i+1},或者在点 V_{i+1} 处的棋子移动到点 V_i($i=1, 2, \cdots, n$),只要开始时,点 V_1、V_2 处的棋子恰是 1 号、3 号棋子,就无法通过有限次操作使得该棋子到达相应的顶点,因此,这样的连线段的方式是不和谐的.

另一方面,若将点 V_i、V_{i+1} 之间连上线($i=1, 2, \cdots, n, V_{n+1}=V_1$),且将点 V_{n-1}、V_1 之间连上线,则可以证明这样的连线段方式是和谐的.

事实上,在这样的连线方式下,可以做下面两种操作.

操作 M_1:将在点 V_i 处的棋子移动到点 V_{i+1} 处($i=1, 2, \cdots, n$).

操作 M_2:将在点 V_i 处的棋子移动到点 V_{i+1} 处($i=1, 2, \cdots, n-2$),将在点 V_{n-1} 处的棋子移动到点 V_1 处,在点 V_n 处的棋子不动.

下面利用数学归纳法证明:对于任意的 $k(1\leq k\leq n)$,可以经有限次操作后,使得编号为 $1, 2, \cdots, k$ 的棋子分别在点 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 处.

当 $k=1$ 时,设 1 号棋子开始时在点 V_i 处. 则进行 $n-i+1$ 次操作 M_1 即可让 1 号棋子移动到点 V_1 处.

假设在某次操作后,编号为 $1, 2, \cdots, k$ 的棋子分别在点 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 处,设此时 $k+1$ 号棋子在点 V_r($k+1\leq r\leq n$)处. 则先进行 $n-$ 次操作 M_1,再进行 $r-k-1$ 次操作 M_2,最后进行 $k+1$ 次操作 M_1,即可使编号为 $1, 2, \cdots, k+1$ 的棋子分别在点 $V_1, V_2, \cdots, V_{k+1}$ 处.

由数学归纳法,最终可以在有限次操作后,使每个标号为 k 的棋子在点 V_k($k=1, 2, \cdots, n$)处. 因此,这样的连线段的方式是和谐的.

综上,在所有和谐的连线段的方式中,线段数目的最小值为 $n+1$.

第 二 天

5. 注意到 $x\geq1, y\geq1$. 则

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)-[(xy)^2-2xy+2]$$
$$=(-2y+2)x^2+(6y-2y^2-4)x+(2y^2-4y+2)$$
$$=-2(y-1)[x^2+(y-2)x+1-y]$$
$$=-2(y-1)(x-1)(x+y-1)\leq0.$$

故 $(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)$
$$\leq(xy)^2-2xy+2.$$

同理,因为 $xy\geq1, z\geq1$,所以,
$$[(xy)^2-2xy+2](z^2-2z+2)$$
$$\leq(xyz)^2-2xyz+2.$$

从而,命题得证.

6. 证法 1:如图 4,记圆 Γ_1、Γ_2 的圆心分别为 O_1、O_2,半径分别为 r、R.

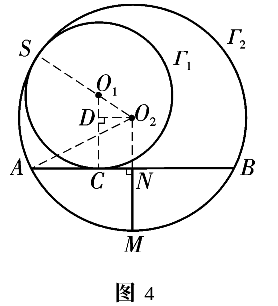

图 4

由垂径定理知,MN 的延长线经过 O_2,且 N 是弦 AB 的中点.

因圆 Γ_1、Γ_2 内切于点 S,所以,

S、O_1、O_2三点共线.

又 AB 与圆 Γ_1切于点 C,联结 O_1C.

则 $O_1C\perp AB$.

再作 $O_2D\perp O_1C$于点 D.

注意到

$$AC\cdot CB=(AN-CN)(AN+CN)$$
$$=AN^2-CN^2. \quad ①$$

联结 AO_2. 由勾股定理得

$$AN^2=R^2-(R-MN)^2=2RMN-MN^2. \quad ②$$

而 $CN^2=O_1O_2^2-O_1D^2$

$$=(R-r)^2-(r+MN-R)^2$$
$$=2(R-r)MN-MN^2. \quad ③$$

将式 ②、③代入式 ①得

$$AC\cdot CB=AN^2-CN^2$$
$$=2[R-(R-r)]MN=2rMN.$$

证法 2:如图 5,作出圆 Γ_1的直径 CD.

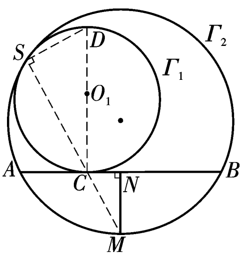

图 5

因 S 是两圆 Γ_1、Γ_2的切点,即位似中心,而 C、M 为两圆上的位似对应点,故 S、C、M 三点共线.

由相交弦定理得 $AC\cdot CB=SC\cdot CM$.

又由 $\text{Rt}\triangle SCD\backsim\text{Rt}\triangle NMC$,得

$$SC\cdot CM=CD\cdot MN=2rMN.$$

7. 将题设的图形分别设为 A型、B型.

首先论证:n是偶数.

用图 6所示方法将 10×10的方格表染色.

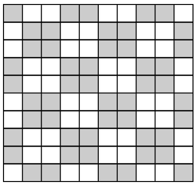

图 6

无论 A型覆盖哪 4个方格,其中黑格数必是偶数,而对于 B型则是奇数. 如果 n是奇数,n个 A型所覆盖的黑方格数必是偶数;而 n个 B型所覆盖的黑方格数必是奇数,矛盾. 所以,n必是偶数.

如果 $n=2$,由两个 A型拼成的图形只有如图 7所示的两种情形. 但是它们都不能由两个 B型拼成.

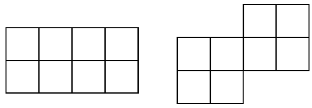

图 7

所以,$n\geqslant4$.

图 8是 $n=4$时的拼法.

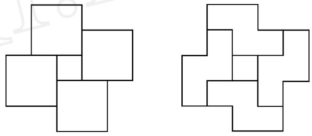

图 8

8. 令 $b_0=0,\ b_1=1,$

$$b_n=4b_{n-2}+b_{n-1}\ (n\geqslant2).$$

则 $b_n=\dfrac{(2+\sqrt5)^n-(2-\sqrt5)^n}{2\sqrt5}$.

特别地,$b_6=1\ 292,\ b_7=5\ 473$.

对任意的 $k(k=1,2,\cdots,5\ 473)$,存在唯一的整数 x_k、y_k,使得

$$1\ 292k=x_k+5\ 473y_k\ (1\leqslant x_k\leqslant5\ 473).$$

因 $(1\ 292,5\ 473)=1$,所以,$x_1,x_2,\cdots,x_{5\ 473}$为 $1,2,\cdots,5\ 473$的一个排列,且数列$\{y_k\}$满足

$$y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_{5\ 473}=1\ 291.$$

为方便计,令 $f(x)=x-[x]$. 于是,

$$f(x_k\sqrt5)=f((1\ 292k-5\ 473y_k)\sqrt5)$$
$$=f\left(\frac{(2+\sqrt5)^6-(2-\sqrt5)^6}{2}k-\frac{(2+\sqrt5)^7-(2-\sqrt5)^7}{2}y_k\right)$$
$$=f(-(2-\sqrt5)^6k+(2-\sqrt5)^7y_k).$$

又 $0<(2-\sqrt5)^6k-(2-\sqrt5)^7y_k$

$$\leqslant5\ 473(2-\sqrt5)^6-1\ 291(2-\sqrt5)^7<1,$$

得 $f(x_k\sqrt5)=1-(2-\sqrt5)^6k+(2-\sqrt5)^7y_k$是单调递减的.

又 $x_1=1\ 292,\ x_{5\ 473}=5\ 473,\ x_{5\ 472}=4\ 181,$

$x_{5\ 471}=2\ 889,\ x_{5\ 470}=1\ 597,$

故所求的最大项是 $a_{1\ 292}$,最小项是 $a_{1\ 597}$.

(熊 斌 提供)