2002年西部数学奥林匹克

第一天

1. 求所有的正整数 n，使得 $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ 是一个完全平方数.

2. 设 O 为锐角$\triangle ABC$的外心，P 为$\triangle AOB$内部一点，P 在$\triangle ABC$的三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 D、E、F. 求证：以 FE、FD 为邻边的平行四边形位于$\triangle ABC$内.

3. 考虑复平面上的正方形，它的4个顶点所对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的4个根. 求这种正方形面积的最小值.

4. 设 n 为正整数，集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $n+1$ 个非空子集. 证明：存在 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$，使得

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}.$$

第二天

5. 在给定的梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E 是边 AB 上的动点，O_1、O_2 分别是$\triangle AED$、$\triangle BEC$的外心. 求证：O_1O_2 的长为一定值.

6. 设 $n(n\geqslant 2)$ 是给定的正整数，求所有整数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 满足条件：

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2$;

(2) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant n^3+1$.

7. 设 α、β 为方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，令

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},n=1,2,\cdots.$$

(1) 证明：对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$;

(2) 求所有正整数 a、b，$a<b$，满足对任意正整数 n，有 b 整除 a_n-2na^n.

8. 设 $S=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个由0，1组成的满足下述条件的最长的数列：数列 S 中任意两个连续的5项不同，即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n-4$，$a_i,a_{i+1},a_{i+2},a_{i+3},a_{i+4}$ 与 $a_j,a_{j+1},a_{j+2},a_{j+3},a_{j+4}$ 不相同. 证明：数列 S 最前面的4项与最后面的4项相同.

参考答案

1. 设 $m\in\mathbf{N}_+$，使得 $n^4-4n^3+22n^2-36n+18=m^2$，配方后得

$$(n^2-2n+9)^2-63=m^2. \qquad ①$$

于是，$63=(n^2-2n+9)^2-m^2$

$=(n^2-2n+9-m)(n^2-2n+9+m)$.

注意到，$n^2-2n+9+m=(n-1)^2+m+8\in\mathbf{N}_+$，所以，必有

$$\begin{cases}n^2-2n+9-m=1,3,7,\\ n^2-2n+9+m=63,21,9.\end{cases}$$

而 $n^2-2n+9=32,12$ 或 8，分别求解得 n 只能为1或3(对应的 $m=1,9$).

注：在得到式①后，还可用不等式估计来处理.

2. 如图1，以 FE、FD 为邻边作$\square EFDG$. 为证命题成立，只须证明

$\angle FDE<\angle CED$, ①

且 $\angle FED<\angle EDC$. ②

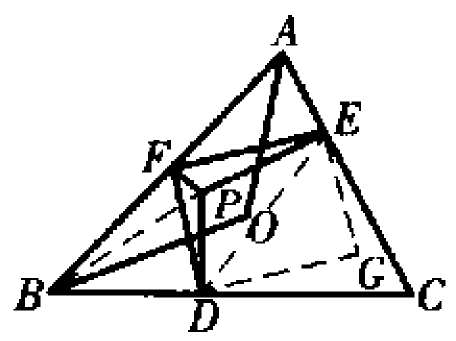

图1

注意到①、②是对称的，故只须证明其中一式成立，另一式子可以完全类似地证明.

对于式①，由于$\angle FDE=\angle FDP+\angle EDP$，而 B、D、P、F 四点共圆，故

$\angle FDP=\angle FBP<\angle ABO$

$=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle AOB=90^\circ-\angle C$

(这里用到 P 在$\triangle AOB$内部及 O 为$\triangle ABC$的外心).

又 C、E、P、D 四点共圆，故

$\angle PDE=\angle PCE$,

$\angle CED=\angle CPD=90^\circ-\angle PCD$.

所以，$\angle FDE<(90^\circ-\angle C)+\angle PCE$

$=90^\circ-\angle PCD=\angle CED$.

从而，式①成立. 命题获证.

3. 依题意，可知方程的4个根只能是下面的两种情形：2个实根与1对共轭虚根；2对共轭虚根.

(1)若方程的4个根是2个实根与1对共轭虚根，则可设此4个根为 $a\pm b$，$a\pm b\mathrm{i}$. 于是，原方程为

$(x-a)^4=b^4$,

即 $x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b^4=0$.

由 $-4a\in\mathbf{Z}$，且 $4a^3\in\mathbf{Z}$ 可知 $a\in\mathbf{Z}$. 由 $a^4-b^4\in$

$\mathbf{Z}$ 知 $b^4\in\mathbf{Z}$,所以,$b^4\geqslant 1$,$b^2\geqslant 1$.此时正方形的面积为 $2b^2\geqslant 2$,当 $a\in\mathbf{Z}$,$b=\pm 1$ 时等号成立.

(2)若方程的 4 个根为 2 对共轭虚根,则可设此 4 个根为 $a\pm bi$,$a+2b\pm bi$.这 4 个根为方程 $(x-(a+b))^4=-4b^4$ 的 4 个根.同上讨论可知 $4b^4\in\mathbf{Z}$,进而 $4b^4\geqslant 1$,$b^2\geqslant\frac{1}{2}$.于是,正方形的面积为 $4b^2\geqslant 2$.当 $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$a+b\in\mathbf{Z}$ 时等号成立.

综上可知,这样的正方形的面积大于等于 2.又方程 $x^4=1$ 的 4 个根为复平面上一个面积等于 2 的正方形的 4 个顶点,所以,这种正方形面积的最小值为 2.

4.对 n 归纳,用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,必有 $A_1=A_2=\{1\}$,命题获证.

设命题对 $n=l$ 成立,考虑 $n=l+1$ 的情形.

此时若存在 $A_i=A_j$,则命题成立.因此,可设 $A_1,A_2,\cdots,A_{l+2}$ 两两不同.令 $A_i'=A_i\setminus\{l+1\}$,则

$$A_i'\subseteq\{1,2,\cdots,l\},\ i=1,2,\cdots,l+2.$$

(1)A_i' 两两不同.此时,考虑 $A_1',A_2',\cdots,A_{l+1}'$,运用归纳假设,可得分组

$$U_1'\xlongequal{\text{记}}A_{i_1}'\cup A_{i_2}'\cup\cdots\cup A_{i_s}'$$
$$=A_{j_1}'\cup A_{j_2}'\cup\cdots\cup A_{j_t}'\xlongequal{\text{记}}U_2'. \qquad ①$$

如果将式①中的 A_i' 改为 A_i 后,得 $U_1=U_2$,则命题获证.若 $U_1\neq U_2$,则必有一边含有 $l+1$,而另一边不含 $l+1$,不妨设 $l+1\in A_{i_1}$.而对任意 $1\leqslant k\leqslant t$,均有 $l+1\notin A_{j_k}$.

此时,考虑 $A_1',A_2',\cdots,A_{l+2}'$ 中除 A_{i_1}' 以外的 $l+1$ 个集合.利用归纳假设,可得另一分组

$$U_3'\xlongequal{\text{记}}A'_{\bar{i}_1}\cup A'_{\bar{i}_2}\cup\cdots\cup A'_{\bar{i}_u}$$
$$=A'_{\bar{j}_1}\cup A'_{\bar{j}_2}\cup\cdots\cup A'_{\bar{j}_v}\xlongequal{\text{记}}U'_4. \qquad ②$$

如果将式②中的 A_j' 改为 A_j 后,得 $U_3=U_4$,则命题获证.若 $U_3\neq U_4$,则必有一边含有 $l+1$,而另一边不含 $l+1$,不妨设 $l+1\notin U_3$,$l+1\in U_4$.此时,考虑下面的并集

$$U_1'\cup U_3'=U_2'\cup U_4'. \qquad ③$$

则式③中两边去掉“′”后,必有 $U_1\cup U_3=U_2\cup U_4$.这时,只需对式③中下标相同的集合予以处理.

注意到,$A_{i_1}'\in U_1'$,但 $A_{i_1}'\notin U_k'$,$k=2,3,4$,故下标 i_1 仅在式③中出现一次.从而,在将下标相同的集合去掉时(保持式③成立),式③的两边不会变为空集.若 A_i' 在式③中重复出现,不妨设 $A_i'\in U_1'$,若 $A_i'\in U_3'$,则从 U_3' 中去掉 A_i',式③仍成立;若 $A_i'\in U_2'\cup U_4'$,由于 U_1' 与 U_2' 的下标不同,故必有 $A_i'\in U_4'$.此时结合 $U_1'=U_2'$ 可知,将 A_i' 从 U_4' 中去掉后,式③仍成立.依此处理,直至式③两边没有相同下标的项,从而命题获证.

(2)若 A_i' 中存在相同的集合($1\leqslant i\leqslant l+2$),这时,如果 A_i' 中有 3 个相同,不妨设 $A_1'=A_2'=A_3'$,则 A_1、A_2、A_3 中必有 2 个相等,矛盾;如果 A_i' 中有两对集合分别相等,不妨设 $A_1'=A_2'$,$A_3'=A_4'$,这时 A_1、A_2 中恰有一个含有 $l+1$,A_3、A_4 中也恰有一个含有 $l+1$.不妨设 $l+1\in A_1$,$l+1\in A_3$,而 $l+1\notin A_2$,$l+1\notin A_4$,此时,得到 $A_1\cup A_4=A_2\cup A_3$.命题获证.

最后,A_i' 中恰有两个集合相同,设为 $A_1'=A_2'$,此时,$l+1$ 必恰属于 A_1、A_2 中的一个.注意到,两个集合组 $A_1',A_3',\cdots,A_{l+2}'$ 与 $A_2',A_3',\cdots,A_{l+2}'$ 中没有相同的集合(指同一组内).这时,利用(1)的处理方法,可知命题成立.

综上可知,命题对一切正整数 n 成立.

5.如图 2,连结 O_1E、O_1D、O_2E、O_2C(不妨设 $\angle A\geqslant\angle B$).注意到

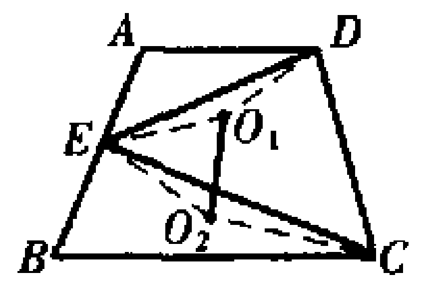

图 2

$$\angle EO_1D=360°-2\angle A=2(180°-\angle A)=2\angle B.$$ 于是,有

$$\angle O_1ED=\frac{1}{2}(180°-\angle EO_1D)=90°-\angle B,$$

$$\angle O_2EC=\frac{1}{2}(180°-\angle EO_2C)=90°-\angle B.$$

从而,$\angle O_1ED=\angle O_2EC$.故 $\angle O_1EO_2=\angle DEC$.

另一方面,由正弦定理,可知

$$\frac{DE}{\sin A}=2EO_1,\ \frac{EC}{\sin B}=2EO_2.$$

又因为 $\sin A=\sin B$,故 $\frac{DE}{EC}=\frac{EO_1}{EO_2}$.

结合 $\angle O_1EO_2=\angle DEC$,可知 $\triangle DEC\backsim\triangle O_1EO_2$.

所以,$\frac{O_1O_2}{CD}=\frac{EO_1}{DE}=\frac{1}{2\sin A}$.

从而,$O_1O_2=\frac{CD}{2\sin A}$ 为定值.

(下转第 48 页)

$2,|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_6|\neq 0$,和式

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_6)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_6x_6$$

都是3的倍数.

则 $|S(x_1,x_2,\cdots,x_6)|$

$\leqslant 2(3^1+3^2+\cdots+3^6)$

$=3(3^6-1)=3(3^3-1)(3^3+1)$

$=3\times 26\times 28=3\times 728$.

不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 中不为零且下标 k_1 为最大的数是 x_{k_1},即 $x_{k_1}\neq 0$,且 $x_{k_1+1}=x_{k_1+2}=\cdots=x_6=0$,则

$S(x_1,x_2,\cdots,x_6)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{k_1}x_{k_1}$

$=3^1x_1+3^2x_2+\cdots+3^{k_1}x_{k_1}$.

另外,不妨设 $x_{k_1}>0$(当 $x_{k_1}<0$ 时,可考虑 $-S(x_1,x_2,\cdots,x_6)$).

若 $k_1\geqslant 2$,则

$S(x_1,x_2,\cdots,x_6)$

$\geqslant 3^{k_1}-2\times 3^{k_1-1}-2\times 3^{k_1-2}-\cdots-2\times 3^1$

$=3^{k_1}-(3-1)(3^{k_1-1}+3^{k_1-2}+\cdots+3^1)$

$=3^{k_1}-(3^{k_1}-3^1)=3>0$.

若 $k_1=1$,则

$x_1\neq 0,S(x_1,x_2,\cdots,x_6)=a_1x_1>0$.

综上可知

$3|S(x_1,x_2,\cdots,x_6)$,且 $S(x_1,x_2,\cdots,x_6)\neq 0$, $|S(x_1,x_2,\cdots,x_6)|\leqslant 3\times 728$.

显然2 003与3互素.

假若有2 003整除 $S(x_1,x_2,\cdots,x_6)$,则 $S(x_1,x_2,\cdots,x_6)=3t$,t 为整数,且 $1\leqslant|t|\leqslant 728$.于是,$2\,003|t$,这与 $1\leqslant|t|\leqslant 728$ 矛盾.因此,当取 $a_i=3^i$,$i=1,2,\cdots,6$ 时,就不可能有 $x_1,x_2,\cdots,x_6\in\mathbf{Z}$,$|x_i|\leqslant 2$,$i=1,2,\cdots,6$,$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_6|\neq 0$,能使得

$$2\,003|S(x_1,x_2,\cdots,x_6)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_6x_6.$$

这个反例说明:当 $k=6$ 时,命题不成立.

由上述两步可知,所求的最小正整数 k 为7.

(吴伟朝 广州大学理学院数学系,510405)

(上接第39页)

6.由条件可知

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2n\sum_{k=1}^{n}a_k+n^3$$

$\leqslant(n^3+1)-2n^3+n^3=1$.

故 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2=0$ 或1.

若 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2=0$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_n=n$.

若 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2=1$,则 $|a_k-n|$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 中恰有一个为1,其余 $n-1$ 个都为0.依此不妨设 $|a_1-n|=1,a_2=a_3\cdots=a_n=n$,此时,结合 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n^2$,可知 $a_1=n+1$,故 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=(n+1)^2+(n-1)n^2=n^3+2n+1>n^3+1$.矛盾.

综上可知,只有一组数 $(n,n,\cdots,n)$ 满足条件.

7.(1)由条件可知 $\alpha^2=\alpha+1,\beta^2=\beta+1$.从而,

$$a_{n+2}=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^{n+1}+\alpha^n)-(\beta^{n+1}+\beta^n)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=a_{n+1}+a_n.$$

(2)由条件可知 $b|(a_1-2a)$,由韦达定理可知 $a_1=a_2=1$.于是,$b|(1-2a)$.注意到 $1\leqslant 2a-1<2b-1<2b$,而 $2a-1$ 是 b 的倍数,故 $b=2a-1$.

又 $b|(a_3-6a^3)$,即有 $(2a-1)|(6a^3-2)$.

而 $6a^3-2=3a^2(2a-1)+3a^2-2$,故 $(2a-1)|(3a^2-2)$.从而,有 $(2a-1)|(6a^2-4)$.

结合 $6a^2-4=(3a+1)(2a-1)+a-3$,故 $(2a-1)|(a-3)$.从而,$(2a-1)|(2a-6)$,于是,$(2a-1)|5$.所以,$2a-1=1$ 或5.但 $2a-1=1$ 推出 $a=b=1$,矛盾.故 $2a-1=5$,进而 $a=3,b=5$.

下面证明:对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,均有

$5|(a_n-2n\times 3^n)$.

对此可以利用数学归纳法予以证明(以下略).

8.用反证法.

若 S 的前4项与最后4项不相同,设 S 的最后4项为 $abcd$.由于 S 为最长的具有题中性质的数列,从而,在 S 后添加0或1后,所形成的5数段 $abcd0$ 和 $abcd1$ 必在 S 中出现,即存在 $i\neq j,i、j\in\{2,3,\cdots,n-5\}$,使得

$$a_ia_{i+1}\cdots a_{i+4}=abcd0,a_ja_{j+1}\cdots a_{j+4}=abcd1.$$

考虑 $a_{i-1}、a_{j-1}$ 与 a_{n-5} 这3个数,其中必有2个数相同.

若 $a_{i-1}=a_{j-1}$,则 $a_{i-1}\cdots a_{i+3}=a_{j-1}\cdots a_{j+3}$,从而,$S$ 中有2个相同的5数段,矛盾.

另外的情形将推出同样的矛盾.

所以,命题成立.

(李胜宏 提供)