智浪教育--普惠英才文库

·物理竞赛·

物理竞赛中不平衡电桥电路的几个分析方法

陈玉奇
（江苏省姜堰中等专业学校 江苏 姜堰 225500）

高中物理竞赛中电学部分要用到的物理规律，除了电阻定律、焦耳定律、欧姆定律等高中物理课本上的知识以外，还要用到一些复杂直流电路的求解方法，如基尔霍夫定律、Y－Δ等效变换等等，而遇到的电路也不限于一般的混联电路，其中也包括桥式电路的计算.

图1是一惠斯通电桥电路，因英国物理学家惠斯通首先使用该电路来测量未知电阻的阻值而得名. R_1、R_2、R_3、R_4 是电桥的四个“桥臂”电阻，电流表和 R_5 构成了“桥支路”. 因该电路结构特殊，其中各个元件的联接并非简单的串并联关系. 当电桥平衡时，可以将“桥支路”作短路或断路的等效处理，而当电桥不平衡时，该电路虽然结构简单，但已经不属于简单直流电路，无法用串并联电路的分析方法进行求解. 本文给出几种不平衡电桥电路的求解方法.

1 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律包括节点电流定律和回路电压定律.

① 节点电流定律：在电路中任意一个节点上，任一时刻流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和，即

$$\sum I_{入} = \sum I_{出}.$$

② 回路电压定律：一个闭合回路中，从一点出发绕某一个回路一周回到该点时，各段电压降的代数和等于零，即

$$\sum U = 0.$$

例1 在图1中，已知电阻，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = R_3 = 12\ \Omega$，$R_4 = 6\ \Omega$，$R_5 = 3\ \Omega$，$E = 12$ V，求理想电流表A的读数.

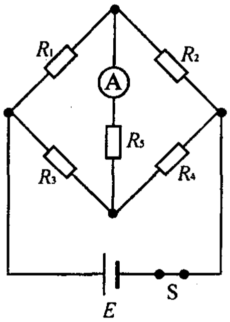

图1

解析 因该电路中 $R_1 \times R_4 \neq R_3 \times R_2$，即对臂电阻的乘积不相等，所以该电路属于不平衡电桥电路，不好用简单直流电路的方法计算，现用基尔霍夫定律求解.

设各个电阻的电流分别为 I_1、I_2、I_3、I_4、I_5，方向如图2所示，则由节点电流定律，对图2中的节点 a、b 有

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_5 & (1) \\ I_4 = I_3 + I_5 & (2) \end{cases}$$

分别选取三个回路 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，绕行方向取顺时针方向，其中回路 Ⅰ 和 Ⅱ 已在图2中标出，回路 Ⅲ 由 R_1、R_2、S、E 构成（图中未标出），由回路电压定律，对以上三个回路有

$$\begin{cases} I_1R_1 + I_5R_5 - I_3R_3 = 0 & (3) \\ I_2R_2 - I_4R_4 - I_5R_5 = 0 & (4) \\ I_1R_1 + I_2R_2 - E = 0 & (5) \end{cases}$$

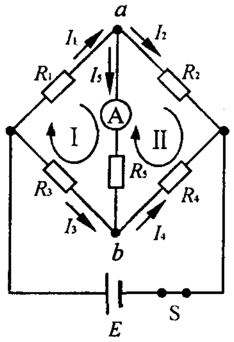

图2

将方程(1)、(2)代入(3)、(4)、(5)，再代入电路中各个元件的参数值，可解得 $I_5 = 0.5\ A$ 方向向下.（求解过程略）

点拨 ① 基尔霍夫定律是电路的基本定律之一，不论在何种电路中，它阐明的各支路电流之间和回路电压之间的基本关系都是普遍适用的. 理论上来讲，基尔霍夫定律可以解决一切电路问题，它思路简单清晰，对于基础好的学生来讲，是完全可以做到熟练掌握和灵活应用的，但是不足之处在于，如果支路较多，所列方程的个数也会随之增多，从而使得解题过程显得比较繁琐，但不失为解决非平衡电桥电路的一种有效方法.

② 在列回路电压方程时，有两个注意点，一是电压符号的选取，回路电压定律指出“各段电压降的代数和等于零”，因此，如果遇到电位升的情况，电压要取负号；二是回路的选取要使得所列的电压方程独立，如本题中回路 Ⅲ 选取 R_1、R_2、R_4、R_3 时，则方程(5)为

$$I_1R_1 + I_2R_2 - I_4R_4 - I_3R_3 = 0,$$

很显然该方程可以由方程(3)、(4)相加得到，用该方程与方程(1)、(2)、(3)、(4)联立是无法求解的，因而它不是独立的方程.

2 戴维南定理

戴维南定理也叫等效电压源定理，即对外电路来说，一个含源二端线性网络可以用一个电压源来代替，该电压源的电动势 E_0 等于二端网络的开路电压，其内阻 R_0 等于含源二端网络内所有电源电动势为零，仅保留其内阻时，网络两端

的等效电阻(输入电阻).

根据戴维南定理可以对一个含源二端网络进行简化,简化的关键在于正确理解和求出含源二端网络的开路电压和等效电阻.

例2　用戴维南定理求图1中理想电流表A的读数.

解析　移开 R_5 和A这个待求支路,求二端网络的开路电压 U_{ab},如图3所示.

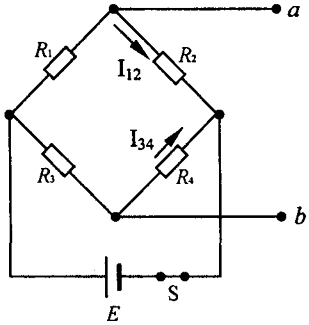

图3

开路后的电路为一简单直流电路,其中 R_1 与 R_2 串联,R_3 与 R_4 串联,设此时 R_1 与 R_2 的电流为 I_{12},R_3 与 R_4 的电流为 I_{34},方向如图所示,则

$$U_{ab} = I_{12}R_2 - I_{34}R_4 = \frac{E}{R_1+R_2}R_2 - \frac{E}{R_3+R_4}R_4$$

$$= \left(\frac{12}{4+12}\times 12 - \frac{6}{12+6}\times 12\right)\ \text{V} = 5\ \text{V}.$$

即等效电源的电动势为 $E_0 = 5$ V.

再求等效电阻 R_{ab},这时将电源电动势除去,如图4所示,则

$$R_{ab} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \left(\frac{4\times 12}{4+12} + \frac{12\times 6}{12+6}\right)\ \Omega$$

$$= 7\ \Omega,$$

即等效电源的内阻为 $R_0 = 7\ \Omega$.

画出二端网络对应的等效电压源的电路图,并将 R_5 和A支路接入,如图5所示,则

$$I_5 = \frac{E_0}{R_0+R_5} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}+R_5} = \frac{5}{7+3}\ \text{A} = 0.5\ \text{A}.$$

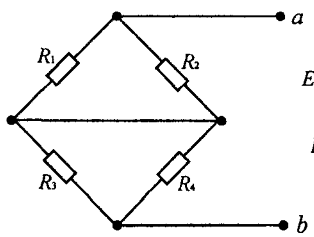

图4

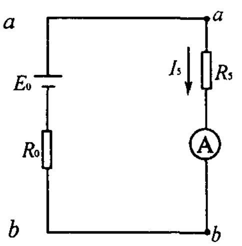

图5

点拨　① 在实际问题中,遇到一个复杂直流电路,如果并不需要把所有的支路电流都求出来,在这种情况下,用基尔霍夫定律来计算就很复杂,而应用戴维南定理就比较方便.

② 戴维南定理的两个关键步骤:求开路电压 U_{ab} 和等效电阻 R_{ab}. 在计算开路电压 U_{ab} 时,必须注意代替含源二端网络的等效电压源 E_0 的极性与开路电压 U_{ab} 保持一致,如果求得的 U_{ab} 是负值,则电动势 E_0 的极性与图5中的相反;而求等效电阻 R_{ab} 时,必须将网络内的各个电源除去,仅保留电源内阻.

③ 戴维南定理只适用于二端网络以及二端网络内部为线性电路的情形,如果二端网络内有非线性元件(如二极管、三极管等),或者所求部分为三端网络(如三相负载),则不适用,但如果所求支路中含有非线性元件,戴维南定理同样适用.

3　节点电位法

以节点电位作为未知量,将各支路的电流用节点电位表示,再利用节点电流关系列出独立的电流方程进行求解,这就是节点电位法.

要想确定电路中节点的电位,只需在电路中任选一个节点,设其电位等于零,则所求点的电位即等于该点和零电位点之间的电压值.

例3　用节点电位法求图1中理想电流表A的读数.

解析　如图6,将图中另外两个节点 c、d 标出,各个电阻上的电流方向如图所示.

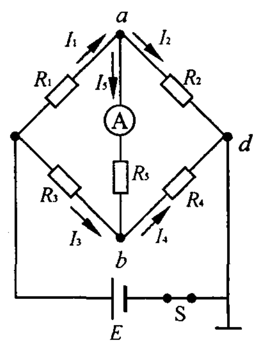

图6

设 d 接地,则 $\varphi_d = 0$,$\varphi_c = 12$ V,则各支路电流用节点电位可表示为

$$I_1 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_1} = \frac{12-\varphi_a}{4},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_d}{R_2} = \frac{\varphi_a}{12},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_b}{R_3} = \frac{12-\varphi_b}{12},$$

$$I_4 = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{R_4} = \frac{\varphi_b}{6},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_5} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{3}.$$

对节点 a 和 b,有节点电流关系

$$I_1 = I_2 + I_5,$$

$$I_4 = I_3 + I_5,$$

将以上各电流表达式代入节点电流关系,有

$$\begin{cases} \dfrac{12-\varphi_a}{4} = \dfrac{\varphi_a}{12} + \dfrac{\varphi_a - \varphi_b}{3}, \\ \dfrac{\varphi_b}{6} = \dfrac{12-\varphi_b}{12} + \dfrac{\varphi_a - \varphi_b}{3}. \end{cases}$$

解得　　$\varphi_a = 7.5$ V,$\varphi_b = 6$ V.

所以　　$I_5 = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b}{R_5} = \dfrac{7.5-6}{3}\ \mathrm{A} = 0.5\ \mathrm{A}.$

点拨　①节点电位法实际上是以节点电位作为未知量分析电路的一种方法，适用于支路数较多，而节点数较少的电路中，本题中虽然有四个节点，但由于 c、d 的电位已知，所以实际上只有两个未知节点 a 和 b，使用节点电位法的优点在于解题的方程较少.

②用节点电位法求解电路问题时参考点的选择要合适，应使该电路中其余节点的电位易于表示，使未知数尽可能少.

4　互易定理

在一个只含电压源的线性电阻电路中，如 X 支路中的电压源 U_X 在支路 Y 中产生的电流为 I_Y，则当电压源由支路 X 移到支路 Y 中时，将在支路 X 中产生电流 I_Y，这就是互易定理.

简单来讲，即在图 1 中，如果将电压源 E 与电流表 A 互换位置，根据互易定理，电流表的读数应该不变，从而可以从另一个角度求得电流表的读数.

例 4　*用互易定理求解图 1 中的电流表的读数.*

解析　将图 1 中的电流表和电源互换位置，如图 7 所示，其对应的等效电路以及互换后各个电流的参考方向如图 8 所示，可知 R_1 和 R_2 并联，R_3 和 R_4 并联.

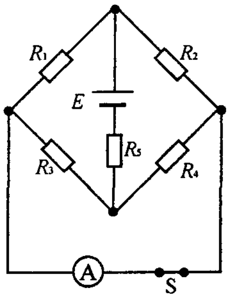

图7

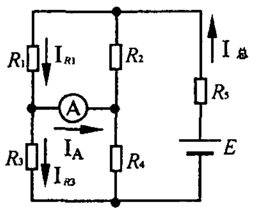

图8

在图 8 中，

$$R_{总} = R_5 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

$$= \left(3 + \frac{4\times12}{4+12} + \frac{12\times6}{12+6}\right)\ \Omega = 10\ \Omega.$$

所以　　$I_{总} = \dfrac{E}{R_{总}} = \dfrac{12}{10}\ \mathrm{A} = 1.2\ \mathrm{A}.$

根据串并联电路的分流公式可知，电阻 R_1 和 R_3 上的电流分别为

$$I_{R1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}I_{总} = \frac{12}{4+12}\times1.2\ \mathrm{A} = 0.9\ \mathrm{A},$$

$$I_{R3} = \frac{R_4}{R_3+R_4}I_{总} = \frac{6}{12+6}\times1.2\ \mathrm{A} = 0.4\ \mathrm{A},$$

所以电流表的读数

$$I_A = R_{R1} - R_{R3} = (0.9-0.4)\ \mathrm{A} = 0.5\ \mathrm{A}.$$

点拨　①互易定理适用于线性网络只有一个电源时，电源支路和另一个支路之间的电压、电流关系.

②互易时电压源原来的位置应短路，电压源串联接入另一支路.

5　Y－Δ 等效变换

如图 9 和图 10 所示是一个 Y 形电阻网络和一个 Δ 形电阻网络，当这两个电阻网络分别接到同一个电路中时，如能保持这个电路中其余各部分的电流和电压不变，则这两个电阻网络对于这个电路是等效的，对应的等效变换关系如下（证明过程略）：

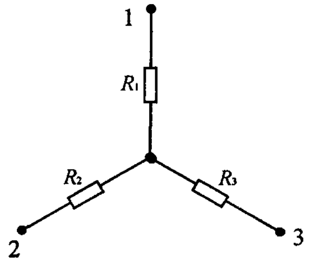

图9

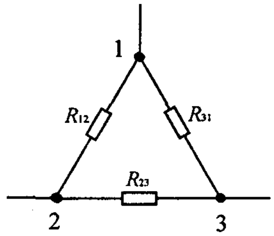

图10

Y 形电路等效变换成 Δ 形电路的条件为

$$\begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}, \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}, \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}, \end{cases}$$

Δ 形电路等效变换成 Y 形电路的条件为

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, \\ R_2 = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, \\ R_3 = \dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \end{cases}$$

例 5　*用 Y－Δ 等效变换的方法求解图 1 中电阻 R_1、R_3 上的电流 I_1、I_3.*

解析　因图 1 中 R_2、R_4、R_5 为 Δ 形接法，用 Y－Δ 等效变换法将此 Δ 形接法变换成 Y 形接法，如图 11 所示，则对应的 Y 形接法中等效电阻为

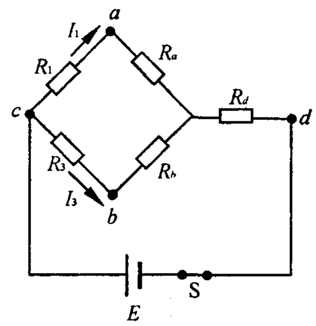

图11

$$R_a = \frac{R_2R_5}{R_2+R_4+R_5} = \frac{3\times12}{3+6+12}\ \Omega = \frac{12}{7}\ \Omega,$$

$$R_b = \frac{R_4R_5}{R_2+R_4+R_5} = \frac{3\times6}{3+6+12}\ \Omega = \frac{6}{7}\ \Omega,$$

$$R_d = \frac{R_2R_4}{R_2+R_4+R_5} = \frac{6\times12}{3+6+12}\ \Omega = \frac{24}{7}\ \Omega,$$ ▶

注意力的保守性与参照系的关系

李卫平　　罗　洁

（西华师范大学物理与电子信息学院　四川 南充　637009）

为了方便读者，将第26届全国中学生物理竞赛复赛第三大题的第1小题的原题及原评分参考解答转述于下.

题目　*一质量为 m 的小球与一劲度系数为 k 的弹簧相连组成一体系，置于光滑水平桌面上，弹簧的另一端与固定墙面相连，小球做一维自由振动. 试问在一沿此弹簧长度方向以速度 u 作匀速运动的参考系里观察，此体系的机械能是否守恒，并说明理由.*

参考解答　否. 原因是墙壁对于该体系而言是外界，墙壁对弹簧有作用力，在运动参考系里此力的作用点有位移，因而要对体系做功，从而会改变这一体系的机械能.

笔者认为该题中隐含着弹性势能概念使用不当的问题，本文对这一问题及其引起的原因进行了分析.

1　题目隐含的问题

题目所述情景如图1所示. 其中，S 系为与桌面固结的静止惯性参照系，小球在其中作一维水平自由振动，某时刻的速度为 v；S' 系为相对桌面以水平速度 u 作匀速直线运动的惯性参照系.

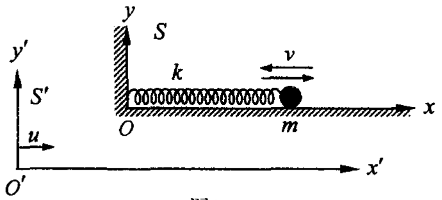

图1

1.1　分析的前提

在对原题存在的问题进行分析之前，有两点须事先确定：第一、原题题文明确指出了研究机械能是否改变的对象是仅由弹簧和小球组成的体系；第二、尽管题文没有明确指出题目中由弹簧和小球组成的体系的机械能是包含弹性势能和动能在内还是仅仅是动能，但结合阅卷参考解答来看，题目所说的该体系的机械能应该是包含弹性势能和动能在内的. 因为如果体系的机械能仅仅是指的小球的动能的话，那么，可直接简单地根据小球在静止参照系 S 中谐振动的速度 v 叠加上速度 u 而得知在运动参照系 S' 中小球的速度仍是变化的，进而即可判断此体系的仅有动能的机械能是不守恒的，而不必从守恒的条件入手进行分析、判断. 事实上，阅卷参考解答在分析守恒条件时，也仅仅考虑了外力对系统是否做功而未考虑系统内力（小球与弹簧、弹簧各部分之间的作用）是否做功，而要确定系统的动能是否守恒，根据质点系的动能定理则是需要既分析系统的外力做功也需要分析系统的内力做功的. 另一方面，从物理竞赛复赛试题的难度要求来看，很显然，如果题文所述的体系的机械能仅仅是动能的话，该题作为复赛试题便显得过于简单.

1.2　存在的问题

若原题题文所述的仅由弹簧和小球组成的体系的机械能确实指的就是体系的弹性势能和动能之和，那么原题在匀速运动参照系 S' 中对此体系使用弹性势能概念本身便是不妥当的.

众所周知，势能概念是与保守力相联系的，只有对保守力才能引入相应的势能概念. 在静止参照系 S 中，毫无疑问弹簧对小球的弹力为保受力，为此可以引入系统的弹性势能概念，可以将弹性势能和小球的动能作为此体系的总机械能予以分析和讨论. 但在运动参照系 S' 中，弹簧对小球的这一弹力的保守性将不复存在. 这可通过如图2、图3、图4所示的在 S' 系中观测到的弹力做功的简单情况进行分析说明. 不妨假设小球在 S 系中过平衡位置时的速度 v_0 大于 S' 系的速度 u. 当小球在 S 系中向右运动经平衡位置 x_0 处时，在 S' 系中则

◀ 所以 $$R_{总}=\frac{(R_1+R_a)\times(R_3+R_b)}{(R_1+R_a)+(R_3+R_b)}+R_d$$

$$=\frac{(4+\frac{12}{7})\times(12+\frac{6}{7})}{(4+\frac{12}{7})+(12+\frac{6}{7})}\ \Omega+\frac{24}{7}\ \Omega$$

$$=\frac{96}{13}\ \Omega,$$

$$I_{总}=\frac{E}{R_{总}}=12\times\frac{13}{96}\ \text{A}=\frac{13}{8}\ \text{A}.$$

根据并联电路的分流公式

$$I_1=\frac{(R_3+R_b)}{(R_1+R_a)+(R_3+R_b)}I_{总}=\frac{9}{8}\ \text{A}.$$

$$I_3=\frac{(R_1+R_a)}{(R_1+R_a)+(R_3+R_b)}I_{总}=0.5\ \text{A}.$$

点拨　①Y－Δ电路的等效变换属于节点电路的等效，在应用中，除了正确使用电阻变换公式计算各电阻值外，还必须正确连接各对应节点.

② 等效是对外部电路有效，对内部不成立，如本题中的这种变换对于外电路 R_3、R_3 而言是等效的（相对于 R_2、R_4、R_3 的Δ形接法），而对原 R_2、R_4、R_5 的支路而言是不等效的.

③Y－Δ等效变换用于简化电路，因此注意不要把原本就是串并联的问题看作Y、Δ结构进行等效变换，那样会使问题的计算更加复杂.