



# 清北学堂集中培训课程导学资料

(2014 年寒假集中培训课程使用)

QBXT/JY/DX2013/12-2-6

---

## 2014 年寒假物理竞赛提高班导学

(第二次)

### 资料说明

本导学用于学员在实际授课之前，了解授课方向及重难点。同时还附上部分知识点的详细解读。每个班型导学共由 4 次书面资料构成。此次发布的为第二次导学，后面的第三次导学，将于 2013 年 12 月 15 日发布。在 2013 年 12 月 20 日，公司还会发布相应班型的详细授课大纲，敬请关注。

自主招生邮箱: [wanglj@qbxt.cn](mailto:wanglj@qbxt.cn)

数学竞赛邮箱: [cuid@qbxt.cn](mailto:cuid@qbxt.cn)

物理竞赛邮箱: [lin@qbxt.cn](mailto:lin@qbxt.cn)

化学竞赛邮箱: [zhouk@qbxt.cn](mailto:zhouk@qbxt.cn)

生物竞赛邮箱: [zhangw@qbxt.cn](mailto:zhangw@qbxt.cn)

理科精英邮箱: [wanglj@qbxt.cn](mailto:wanglj@qbxt.cn)

2013-12-5 发布

---

清北学堂教学研究部

# 2014 年寒假物理竞赛提高班导学(电磁学部分)

## 目录

知识框架.....	2
重点难点.....	3
知识梳理.....	4
一、 <b>静电场</b> .....	4
1. 库仑定律.....	4
2. 电场强度.....	4
3. 电势和电势能.....	5
4. 静电场中的导体和电介质.....	5
5. 电容和电容器.....	6
二、 <b>稳恒电流</b> .....	7
1. 欧姆定律.....	7
2. 电功和电功率.....	7
3. 复杂电路计算.....	7
三、 <b>磁场</b> .....	8
1. 磁感应强度.....	8
2. 安培力.....	9
3. 洛伦兹力.....	10
四、 <b>电磁感应</b> .....	10
1. 楞次定律.....	10
2. 法拉第电磁感应定律.....	10
3. 动生、感生电动势.....	11
例题选讲.....	12
巩固习题.....	22
参考答案.....	25

# 知识框架

静电场	库仑定律
	电场强度
	电势和电势能
	静电场中的导体和电介质
	电容和电容器
稳恒电流	欧姆定律
	电功和电功率
	复杂电路计算
磁场	磁感应强度
	安培力
	洛伦兹力
电磁感应	楞次定律
	法拉第电磁感应定律
	动生、感生电动势

## 重点难点

电磁学中，除稳恒电流和交变电流外，其他部分均可与力学结合，题目类型层出不穷，是竞赛中的难点。

静电场部分，**库仑定律**是静电场基本定律，此外电场强度还可用**高斯定理**计算。静电场中的导体涉及**静电屏蔽**，该部分理解容易，但应用中变化较多。

稳恒电流部分，题目主要涉及的是复杂电路的计算。复杂电路的化简是竞赛中一大难点，需要熟练掌握**基尔霍夫定律**，灵活运用电路**对称性**、**叠加原理**和**Y- $\Delta$ 变换**化简电路并求解。

磁场部分，主要题型是通过**安培力**或**洛伦兹力**将题目与运动学、动力学结合，也是电磁学的重点和难点。此外，对磁场还要求能使用**比奥-萨法尔定律**计算磁感应强度。

电磁感应部分，经常将感应电动势通过的安培力与运动学、动力学结合，重点在于掌握**法拉第电磁感应定律**，理解**动生**、**感生电动势**。

# 知识梳理

## 一、 静电场

### 1. 库仑定律

库仑定律是电磁场理论的基本定律之一。其内容是：真空中两个静止的点电荷之间的作用力与这两个电荷所带电量的乘积成正比，与它们距离的平方成反比，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同名电荷相斥，异名电荷相吸。即  $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ 。

### 2. 电场强度

#### (1) 电场强度

电场的客观存在可由电场对处于其中的任意电荷的作用力来体现，为了从力的角度描绘这个客观存在的场，引入电场强度这一物理量，其定义为  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ 。

其中， $q$  为试验电荷。为了确定空间每点的电场性质，试验电荷必须是点电荷。电场强度在电场确定后就已经确定了，与试验电荷无关。

#### (2) 叠加原理

电场强度是矢量，方向与该点正电荷受力方向相同。当空间有多个电荷产生的场强时，空间某点的场强等于各个电荷单独存在时在该点场强的矢量和，这叫做场强的叠加原理。

#### (3) 高斯定理

通过一个任意闭合曲面的电通量  $\Phi_e$  等于该面包围的所有电荷电量的代数和的  $4\pi K$  倍（或  $1/\epsilon_0$  倍）。

高斯定理说明静电场是有源场。利用高斯定理可以求出某些具有对称性电场的电场强度。

#### (4) 几种特殊带电体的场强

i. 点电荷：  $E = K \frac{Q}{r^2}$

ii. 均匀带电球壳：  $E = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ K \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$ ， $r$  为空间点到球心距离， $R$  为球壳半径。

iii. 均匀带电球体：  $E = \begin{cases} K \frac{q(r)}{r^2}, & r \leq R \\ K \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$ ， $r$  为空间点到球心距离， $R$  为球壳半径，

$q(r)$  为半径  $r$  的球体内带电荷量。

iv. 无限大带电薄板：  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ， $\sigma$  为电荷密度。

v. 无限大带电厚板:  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ,  $\sigma$  为电荷密度。

### 3. 电势和电势能

类比重力场中重力做功, 静电场中**静电力做功等于电势能的减少**, 有  $A_{AB} = W_A - W_B$ 。要确定电势能的大小, 还需要选择一个零势能参考点。通常, 如果带电体系局限在有限大小的空间里, 选择**无穷远处的电势能为零**。那么  $W_Q = K \frac{qq_0}{r_1}$ 。

电势能除了与电场有关, 还与  $q_0$  有关。因此, 用  $W_p$  与  $q_0$  的比值描绘电场, 称之为电势。电势为标量  $U = \frac{W}{q_0}$ 。

对点电荷电场, 电势  $U = K \frac{q}{r}$ 。点电荷组  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 空间任一点的电势  $U$  等于各

点电荷单独存在时该点的电势  $U_i$  的代数和, 即  $U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{r_i}$ 。

### 4. 静电场中的导体和电介质

#### (1) 静电平衡

以金属导体为例, 当其置于静电场时, 自由电子发生定向运动, 导体的两端面出现**等量异性电荷**, 这个现象称为静电感应。当静电感应电荷产生的电场与外电场叠加使得**导体内部场强为零**时, 电荷分布不再变化, 场强分布不再变化, 这种状态称为静电平衡。

静电平衡的条件是: 导体内部场强处处为零。

静电平衡的导体具有以下特点:

- i. 导体是**等势体**, 导体表面是**等势面**。
- ii. **净电荷**只分布在导体**表面**, 表面**曲率大**处表面**电荷密度也大**。
- iii. 导体表面附近场强与导体表面垂直, 其大小与导体表面对应点的电荷面密度  $\sigma$

的关系为  $E = 4\pi K \sigma (E = \frac{\sigma}{\epsilon_0})$ 。

#### (2) 静电屏蔽

导体的**外壳**对它的**内部**起到“保护”作用, 使它的内部不受**外部电场**的影响, 这种现象称为静电屏蔽。根据静电平衡导体的特性我们可以很容易得到静电屏蔽这一结论。

#### (3) 电偶极子

两个带**电量相等**, 但**符号相反**且**相隔很近**的点电荷组成的系统称为电偶极子, 电偶极子用**电偶极矩**矢量来描绘, 其大小等于一个点电荷的电量与相隔距离的乘积, 方向由**负电荷指向正电荷**。

#### (4) 静电场中的电介质

电介质就是绝缘体。电介质根据分子结构分为两类, 一类介质分子的正负电荷**中心重合**, 称为**无极分子**, 另一类介质分子的正负电荷**中心不重合**, 形成电偶极子。无外电场时无极分

子介质对外不显电性，有极分子电偶极子由于热运动排列杂乱无章，对外也不显电性。当外加静电场时，无极分子正负电荷中心沿电场线方向错开，形成电偶极子；有极分子电偶极子收到电场力力矩，转向电场方向。两种介质都会顺着电场方向形成电偶极子，从而在介质**表面甚至内部产生净电荷**，这种现象称为电介质的**极化**。极化产生的电荷称为极化电荷或束缚电荷。

极化电荷也会产生电场，且与外电场方向相反，从而**削弱原电场**，引入电介质的**相对介电常数**  $\epsilon_r$ ，这一物理量描绘电介质削弱原电场的性质。设真空中场强  $E_0$ ，均匀电介质充满这

一空间时场强  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ ，从而得到  $\epsilon_r = E_0/E$ 。

## 5. 电容和电容器

### (1) 孤立导体电容

孤立导体电容定义为  $C = \frac{q}{U}$ 。注意，电容是导体的固有属性，与是否带电无关。对球

形导体， $U = K \frac{q}{R}$ ，所以球形导体电容为  $C = \frac{R}{K}$ 。

### (2) 常见电容器及其电容

当一导体被另一导体**完全屏蔽**，则这两个导体组成电容器。电容器电容的定义为

$C = \frac{q}{\Delta U}$ ， $\Delta U$  为两导体间电势差。常见的电容器有**平行板电容器**、**球形电容器**和**圆柱形**

**电容器**。它们的电容为：

平行板电容器： $C = \frac{S}{4\pi Kd}$ ， $S$  为平板面积， $d$  为两平板间距。

球形电容器： $C = \frac{R_1 R_2}{K(R_2 - R_1)}$ ， $R_1$  为内球半径， $R_2$  为外球壳内半径。

圆柱形电容器： $C = \frac{L}{2K} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ ， $R_1$  为内柱半径， $R_2$  为外筒内半径。

### (3) 静电场的能量

对  $n$  个点电荷组成的点电荷组，电场的能量  $W = \frac{1}{2}(q_1 U_1 + \dots + q_n U_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$ ，

其中  $U_i$  为除  $q_i$  外其他点电荷在  $i$  点处的电势之和。

对电容器，其储存的能量为  $W = \frac{Q^2}{2C}$ ，单位体积的能量（**能量密度**） $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ 。

## 二、 稳恒电流

### 1. 欧姆定律

#### (1) 电阻定律

导体的电阻跟它的长度  $l$  成正比，跟它的横截面积  $S$  成反比，即  $R = \rho \frac{l}{S}$ ，式中， $\rho$  是

导体的电阻率，它与导体的温度  $T$  有如下关系： $\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$ ，其中  $\rho_0$  为导体在  $0^\circ\text{C}$  时的电阻率， $\alpha$  为导体的电阻温度系数。

某些金属、合金及化合物，当温度降到某一特定温度时，电阻率趋于零，这种现象叫做超导现象。

#### (2) 欧姆定律

电路中任意两点间的电势差等于连接这两点的支路上各电路元件上电势降的代数和。这里需要注意电势降的正负号。在电路的任意一个闭合回路上，电势降的代数和为零。

闭合电路的欧姆定律： $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$ ， $\mathcal{E}$  为电源电动势， $R$  为外电阻， $r$  为电源内阻。注

意，欧姆定律只对纯电阻电路适用。

### 2. 电功和电功率

#### (1) 焦耳定律

电流通过导体时放出的热量  $Q$  与电流  $I$  的平方、导体的电阻  $R$  及通电的时间  $t$  成正比，

即  $Q = I^2 R t$ 。对于纯电阻电路，在焦耳定律可表示为  $Q = I^2 R t = U I t = \frac{U^2 t}{R}$ 。

#### (2) 电功和电功率

电流通过电路时，电场力对电荷作的功叫做电功  $W$ 。单位时间内电场力所作的功叫做

电功率  $P$ 。 $W = UQ = U I t$ ， $P = U I$ 。对纯电阻电路，有  $P = U I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ 。

### 3. 复杂电路计算

不能通过电阻串并联公式求解的电路为复杂电路，如电桥电路等，求解复杂电路的基本原理是基尔霍夫定律。对复杂电路还可通过基尔霍夫定律推得一些变换规律从而化简电路。

#### (1) 基尔霍夫定律

第一定律：稳恒电流电路中电荷分布不随时间改变，对电路中任一节点（三条或三条以上支路汇合点），流进的电流等于流出的电流。若规定流进电流为负，流出电流为正，则各支路电流代数和为零，即  $\sum I_i = 0$ 。

第二定律：稳恒电流电路中任一闭合回路，电势增量的代数和为零，即  $\sum \mathcal{E}_i + \sum I_i R_i = 0$ 。式中规定  $\mathcal{E}_i$  和  $I_i$  的符号按如下规则选取：选定闭合回路的绕行方向后，与绕行方向一致的  $I_i$  为正，相反为负；沿绕行方向从负极到正极  $\mathcal{E}_i$  为负，从正极到负极  $\mathcal{E}_i$  为正。

#### (2) 叠加原理

若电路中有多个电源，则通过电路中任一支路的电流等于各个电源单独存在且其他电源

短路时，在该支路产生的电流之和。

利用叠加原理，计算一个多电源电路时，可以分别考虑各电源的单独作用，然后再叠加起来，常用来解决电路中含多个电源导致电阻连接不易判断的问题。

(3) 无源二端网络等效电阻

任何电阻网络不管是简单或是复杂的，只要有**两个引出端**，**内部无电源**，则称为无源二端网络。若网络两端之间电压为  $U$ ，从一端流进另一端流出的电流为  $I$ ，则  $R = \frac{U}{I}$  称为二端网络的电阻。

i. 对称性化简法

一个复杂网络，若能找到一些完全对称的点，在网络两端加上电压后，其电势相等，因而把这些点“短路”或“断路”均不影响网络中的电流分布，从而不影响网络的等效电阻。

ii. 电流分布法

设电流  $I$  从二端网络的  $A$  端流入， $B$  端流出，根据基尔霍夫第一定律解出网络各支路电流（与电流  $I$  的比例关系），任选  $A$  到  $B$  的一条支路计算电势差，由  $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$  确定  $R_{AB}$ 。

iii. Y-Δ 变换法

将三个支路连接成具有三个节点的回路，称为三角形 ( $\Delta$ ) 连接；若将三个电阻的一端连接，则只有一个节点，称为星形 ( $Y$ ) 连接。为简化电路结构，两种连接可相互转换。

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

用  $Y$  连接替代  $\Delta$  连接:  $R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2}{R_3} + R_1 + R_2$$

用  $\Delta$  连接替代  $Y$  连接:  $R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_1} + R_2 + R_3$

$$R_{31} = \frac{R_3R_1}{R_2} + R_3 + R_1$$

(4) 无限多电阻元件构成的二端网络

对无限多电阻元件构成的二端网络求解，一种方法是用**归纳法**并令归纳结果中  $k \rightarrow \infty$ ；另一种方法是根据无限网络的**对称性**求解；还有一种方法是利用“ $\infty + 1 = \infty - 1 = \infty$ ”的**极限思想**列写方程求解。

### 三、 磁场

#### 1. 磁感应强度

(1) 磁场

磁铁和磁铁，电流和磁铁以及电流和电流间的相互作用是通过场的形式产生的，这种场叫做**磁场**。磁场是**无源场**，磁感线无头无尾，对任意封闭曲面有多少磁感线穿入必有多少穿

出，即**封闭曲面磁通量为零**（**磁场高斯定理**）。自然界中没有单独存在的 N 极或 S 极。

(2) 磁感应强度

将一称为**电流元**的、长度为  $\Delta L$  的载流导线放在磁场中某一点，电流元所受到的力与  $\Delta L$ 、载流  $I$  及其**方位**有关。当电流元在某一方位时所受力最大，这个最大力为  $F_m$  与  $I\Delta L$  之比为

一定值，这一比值即为该点的磁感应强度，即  $B = \frac{F_m}{I\Delta L}$ 。磁感应强度  $\vec{B}$  的方向由受力为零

且稳定平衡时的电流方向  $I$  给出。

(3) 毕-萨定律

一个电流元  $I\Delta L$  在相对电流元的位置矢量  $\vec{r}$  的  $P$  点所产生的磁感应强度  $\Delta\vec{B}$  的大小为  $K \frac{I\Delta L \sin\theta}{r^2}$ ， $\theta$  为电流元  $I\Delta L$  的方向与  $\vec{r}$  的夹角。 $\Delta\vec{B}$  的方向由右手螺旋法则确定。若令

$K = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m}/\text{A}^{-1}$  为真空磁导率，则毕萨定律可写为

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta L \sin\theta}{r^2}$$

载流回路是由许多个电流元组成，求出每个电流元在  $P$  点产生的磁感应强度，**求和叠加**后得到整个回路在  $P$  点的磁感应强度。

(4) 几种特殊载流体的磁感应强度

i. **圆电流轴线**： $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$ ， $x$  为轴线上点到圆心距离， $R$  为圆电流半径。

ii. **无限长直导线**： $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ， $r$  为所求点到直导线距离。

iii. **无限长均匀载流圆柱体**： $B = \begin{cases} \frac{\mu_0 j}{2} r, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R \end{cases}$ ， $j$  为电流密度， $R$  为圆柱半径。

iv. **无限长直螺线管内**： $B = \mu_0 n I$ ， $n$  为单位长度绕线匝数。

2. 安培力

(1) 安培力

长为  $\Delta L$ ，电流强度为  $I$  的载流导线处磁感应强度为  $\vec{B}$ ，电流元与磁感应强度夹角为  $\theta$ ，则电流元受的安培力  $F = IB\Delta L \sin\theta$ ，方向由**左手定则**确定。

任意长度、任意形状的载流导线可**分解**为若干小段直导线，各段受的安培力的**矢量和**即为整个导线所受的安培力。

(2) 磁偶极子

称面积很小的载流线圈为**磁偶极子**，用**磁偶极矩**  $P_m$  来描绘它。磁偶极矩的大小为平面线圈的面积与所载电流强度的乘积，即  $P_m = IS$ ，方向满足右手螺旋法则。线圈所受力矩为

$M = P_m B \sin \theta$ ,  $\theta$  为线圈法线与磁感应强度的夹角。

### 3. 洛伦兹力

#### (1) 洛伦兹力

带电粒子在磁场中受到的洛伦兹力为  $F = qvB \sin \theta$ ,  $\theta$  为带电粒子速度与磁感应强度的夹角。洛伦兹力方向与粒子速度方向垂直, 洛伦兹力不做功, 不能改变电荷速度的大小, 只能改变速度的方向, 使路径发生弯曲。

#### (2) 带电粒子在匀强磁场中的运动

若  $\vec{v} // \vec{B}$ , 匀速直线运动。

若  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , 匀速圆周运动。圆周半径  $R = \frac{mv}{qB}$ , 运动周期  $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 。

若  $\vec{v}$  和  $\vec{B}$  成夹角  $\alpha$ , 把速度分解为平行与磁感应强度的分量  $v \cos \alpha$  和垂直于磁感应强度的分量  $v \sin \alpha$ , 粒子运动为两种运动的叠加, 即螺旋运动。螺旋半径  $R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$ , 每

个螺旋的周期  $T = \frac{2\pi m}{qB}$ , 螺距  $h = T \cdot v \cos \alpha = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB}$ 。

#### (3) 磁聚焦

设从磁场  $A$  点射出一束很窄的带电粒子流, 其速率  $v$  相差无几, 与  $\vec{B}$  的夹角  $\alpha$  都很小, 则  $v_{//} = v \cos \alpha \approx v$ ,  $v_{\perp} = v \sin \alpha \approx v \alpha$ 。由于速度的垂直分量不相等, 粒子将在磁场作用下沿不同半径做螺旋运动。由于水平分量近似相等, 运动周期与速度无关亦相等, 故经历时间  $T$  后, 它们又都在前进  $h \approx \frac{2\pi m v}{qB}$  后相遇于  $A'$  点, 这与光经过透镜后聚焦的现象相似, 所以叫磁聚焦。

## 四、 电磁感应

### 1. 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向, 总是使得它所激发的磁场阻止引起感应电流的磁通量的变化, 这个结论就是楞次定律。

在使用楞次定律判断感应电流方向时, 首先判断穿过闭合回路磁感线沿什么方向, 磁通量如何变化 (增加/减少), 然后根据楞次定律确定感应电流激发的磁场应沿什么方向 (与原磁场反向/同向)。最后根据右手定则从感应电流产生的磁场方向确定感应电流方向。

### 2. 法拉第电磁感应定律

闭合回路中感应电动势  $\varepsilon$  与穿过回路的磁通量的变化率  $\Delta \Phi / \Delta t$  成正比, 即

$\varepsilon = -K \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 。式中  $K$  为比例系数，取决于  $\varepsilon$ 、 $\Phi$  和  $t$  的单位，如果  $\Phi$  的单位用 Wb， $t$  的单位用 s， $\varepsilon$  的单位用 V，则  $K=1$ 。式中负号代表感应电动势方向。最终有  $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 。

### 3. 动生、感生电动势

#### (1) 磁通量变化方式

磁通量  $\Phi = \sum B_i \Delta S_i \cos \alpha_i$  变化有下列三种情况：

- i.  $B$  不变， $\alpha$  不变，但电路中的一部分切割磁感线运动使回路面积改变，从而使  $\Phi$  改变。
- ii.  $B$  不变， $S$  不变，但回路在磁场中转动使得回路所包围的面与  $\vec{B}$  的夹角  $\alpha$  改变，从而使  $\Phi$  改变。
- iii.  $S$  不变， $\alpha$  不变，但磁感应强度改变，从而使得  $\Phi$  改变。

#### (2) 动生电动势

前两种磁通量变化方式是由于回路的一部分或整体在**磁场中运动**使得通过回路的磁通量改变而产生感应电动势，称为动生电动势。

动生电动势所对应的**非静电力是洛伦兹力**，切割磁感线运动产生的动生电动势  $\varepsilon = Blv \sin \theta$ ， $\theta$  是速度与磁感应强度的夹角。动生电动势方向根据洛伦兹力方向判断，也可根据楞次定律判断。

#### (3) 感生电动势

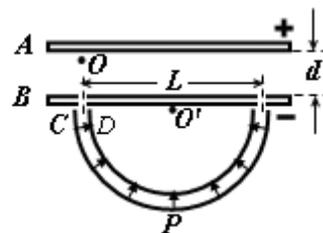
第三种磁通量变化方式是由于磁场变化使得通过回路的磁通量改变而产生感应电动势，称为感生电动势。

感生电动势对应的非静电力是感生电场对电荷的作用力。感生电场为无源场，感生电场对电荷的力是非保守力。

$$\text{对无限长螺线管内的感生电场，有 } E_{\text{感}} = \begin{cases} \frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} & , r < R \\ \frac{R^2}{2r} \frac{\Delta B}{\Delta t} & , r > R \end{cases} \quad 。 R \text{ 为螺线管半径。}$$

## 例题选讲

**例 1.** 如图所示,  $A$ 、 $B$  为两块平行金属板,  $A$  板带正电、 $B$  板带负电。两板之间存在着匀强电场, 两板间距为  $d$ 、电势差为  $U$ , 在  $B$  板上开有两个间距为  $L$  的小孔。 $C$ 、 $D$  为两块同心半圆形金属板, 圆心都在贴近  $B$  板的  $O'$  处,  $C$  带正电、 $D$  带负电。两半圆形金属板间的距离很近, 两板间的电场强度可认为大小处处相等, 方向都指向  $O'$ 。且两板末端的中心线正对着  $B$  板上的小孔。半圆形金属板两端与  $B$  板的间隙可忽略不计。现从正对  $B$  板小孔紧靠  $A$  板的  $O$  处由静止释放一个质量为  $m$ 、电量为  $q$  的带正电微粒 (微粒的重力不计), 问:



- (1) 微粒穿过  $B$  板小孔时的速度多大?
- (2) 为了使微粒能在  $CD$  板间运动而不碰板,  $CD$  板间的电场强度大小应满足什么条件?
- (3) 从静止释放开始, 微粒第一次到达半圆形金属板间的最低点  $P$  的时间?

**解:**

- (1) 设微粒穿过  $B$  板小孔时的速度为  $v$ , 根据动能定理, 有

$$qU = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

解得  $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

- (2) 微粒进入半圆形金属板后, 电场力提供向心力, 有

$$qE = m\frac{v^2}{R} = m\frac{2v^2}{L} \quad (2)$$

联立(1)、(2), 得  $E = \frac{4U}{L}$

- (3) 微粒从释放开始经  $t_1$  射出  $B$  板的小孔, 则

$$t_1 = \frac{d}{v} = \frac{2d}{v} = 2d\sqrt{\frac{m}{2qU}} \quad (3)$$

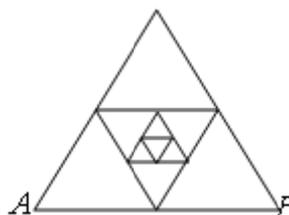
设微粒在半圆形金属板间运动经过  $t_2$  第一次到达最低点  $P$  点,

$$t_2 = \frac{\pi L}{4v} = \frac{\pi L}{4}\sqrt{\frac{m}{2qU}} \quad (4)$$

所以从释放微粒开始，经过  $(t_1 + t_2) = \left(2d + \frac{\pi L}{4}\right) \sqrt{\frac{m}{2qU}}$  微粒第一次到达 P 点。

**简析：** 本题将静电场与力学内容相结合，实质是力学问题，只要把握运动规律，结合动能定理即可求解。在计算力时需要用到电场力的计算。

**例 2.** 如图所示，框架是用同种金属丝制成的，单位长度的电阻为  $\rho$ ，一连串内接等边三角形的数目可认为趋向无穷，取 AB 边长为  $a$ ，以下每个三角形的边长依次减小一半，则框架上 A、B 两点间的电阻为多大？

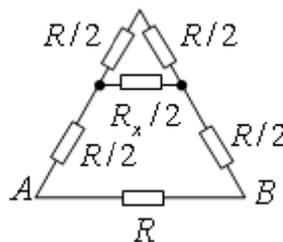


**解：** 从对称性考虑原电路可以用如下图所示的等效电路来代替，同时我们用电阻为  $R_x/2$  的电阻器来代替由无数层“格子”所构成的“内”三角。由于电阻与长度成正比，内三角每一层均为大三角形边长的一般，故应有  $R_{AB} = \frac{R_x}{2} \times 2 = R_x$ ， $R = a\rho$  因此

$$R_x = R \left( R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2} \right) \cdot \left( R + R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2} \right)$$

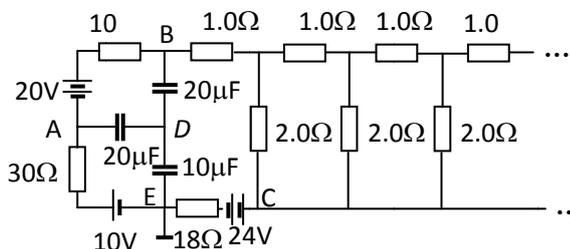
解得

$$R_{AB} = R_x = \frac{\sqrt{7}-1}{3} R = \frac{1}{3} (\sqrt{7}-1) a\rho$$



**简析：** 本题是求解无穷多电阻元件网络的问题，根据无穷网络的对称性找到等势点，再运用等效方法将网络化简即可求解。

**例 3.** 如图所示的电路中，各电源的内阻均为零，其中 B、C 两点与其右方由  $1.0\Omega$  的电阻和  $2.0\Omega$  的电阻构成的无穷组合电路相接。求图中  $10\mu\text{F}$  的电容器与 E 点相接的极板上的电荷量。



**解：**

设 B、C 右方无穷组合电路的等效电阻为  $R_{BC}$ ，则题图中通有电流的电路可以简化为图 2 中的电路。B、C 右方的电路又可简化为图 3 的电路，其中  $R_{BC}$  是虚线右方电路的等效电阻。由于 B'、C' 右方的电路与 B、C 右方的电路结构相同，而且都是无穷组合电路，故有

$$R_{BC} = R_{B'C'} \quad (1)$$

由电阻串并联公式可得

$$R_{BC} = 1 + \frac{2R_{B'C'}}{2 + R_{B'C'}} \quad (2)$$

由式(1)、(2)得  $R_{BC}^2 - R_{BC} - 2 = 0$

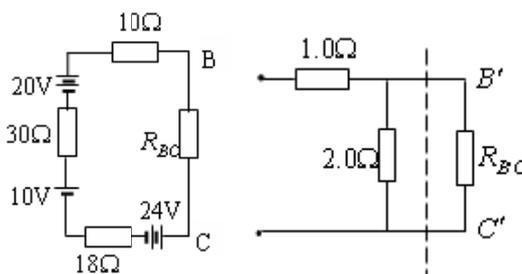


图 2

图 3

解得  $R_{BC} = 2.0\Omega$  (3)

图 4 所示回路中的电流为

$$I = \frac{20 + 10 - 24}{10 + 30 + 18 + 2} A = 0.10A \quad (4)$$

电流沿顺时针方向。设电路中三个电容器的电容分别为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$ ，各电容器极板上的电荷分别为  $Q_1$ 、 $Q_2$  和  $Q_3$ ，极性如图 4 所示。由于电荷守恒，在虚线框内，三个极板上电荷的代数和应为零，即

$$Q_1 + Q_3 - Q_2 = 0 \quad (5)$$

因此  $A$ 、 $E$  两点间的电势差

$$U_A - U_E = -\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} = (10 - 30 \times 0.10)V = 7.0V \quad (6)$$

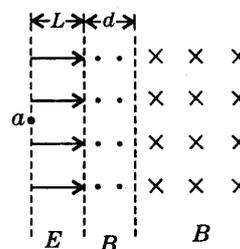
$B$ 、 $E$  两点间的电势差

$$U_B - U_E = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = (24 + 20 \times 0.10)V = 26V \quad (7)$$

由(5)、(6)、(7)式并代入  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  之值后可得  $Q_3 = 1.3 \times 10^{-4} C$ 。即电容器  $C_3$  与  $E$  点相接的极板带负电，电荷量为  $1.3 \times 10^{-4} C$ 。

**简析：**本题也是无穷网络问题，在化简无穷网路时使用了极限思想，即无穷多增加或减少有限数值（如增加或减少 1）仍为无穷多，系统不变。将电路化简后由基尔霍夫定律及电荷守恒即可求解。

**例 4.** 如图所示，空间分布着有理想边界的匀强电场和匀强磁场，左侧匀强电场的场强大小为  $E$ ，方向水平向右，其宽度为  $L$ 。中间区域匀强磁场的磁感应强度大小为  $B$ ，方向垂直纸面向外。右侧匀强磁场的磁感应强度大小也为  $B$ ，方向垂直纸面向里。一个带正电的粒子（质量  $m$ ，电量  $q$ ，不计重力）从电场左边缘  $a$  点由静止开始运动，穿过中间磁场区域进入右侧磁场区域后，又回到了  $a$  点，然后重复上述运动过程。（图中虚线为电场与磁场、相反方向磁场间的分界面，并不表示有什么障碍物）。求：



- (1) 中间磁场区域的宽度  $d$  为多大。
- (2) 带电粒子在两个磁场区域中的运动时间之比。
- (3) 带电粒子从  $a$  点开始运动到第一次回到  $a$  点时所用的时间  $t$ 。

**解：**

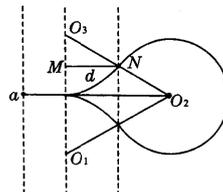
(1) 带正电的粒子在电场中加速，由动能定理得： $qEL = \frac{1}{2}mv^2$ ，解得  $v = \sqrt{\frac{2qEL}{m}}$ 。

在磁场中偏转，由带电粒子磁场中运动规律  $r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mEL}{q}}$ 。显然，在两磁场区

域粒子运动的半径相同。如右图，三段圆弧的圆心组成的三角形  $O_1O_2O_3$  是等边三角形，其边长为  $2r$ ，则

$$d = r \sin 60^\circ = \frac{1}{2B} \sqrt{\frac{6mEL}{q}}$$

(2) 在中间磁场区域的两段圆弧所对应的圆心角为  $\theta_1 = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ ，在右侧磁场区域圆弧对应的圆心角为  $\theta_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ 。由于速度  $v$  相同，半径  $r$  相同，故而角速度相同，因此两个磁场区域中的运动时间之比为：



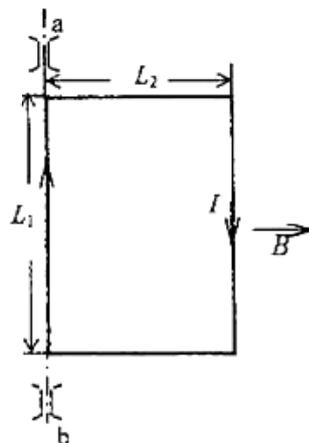
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{120^\circ}{300^\circ} = \frac{2}{5}$$

(3) 在电场中， $t_1 = \frac{2v}{a} = \frac{2mv}{qE} = 2\sqrt{\frac{2mL}{qE}}$ 。在中间磁场中， $t_2 = 2 \times \frac{T}{6} = \frac{2\pi m}{3qB}$ 。在右侧

磁场中， $t_3 = \frac{5}{6}T = \frac{5\pi m}{3qB}$ 。则  $t = t_1 + t_2 + t_3 = 2\sqrt{\frac{2mL}{qE}} + \frac{7\pi m}{3qB}$ 。

**简析：**本题是静电场、磁场与运动学和动力学的结合，本质上依然是力学问题。通过电磁学理论求得受力后，确定带电粒子运动轨迹即可轻易求解本题。

**例 5.** 一个长为  $L_1$ ，宽为  $L_2$ ，质量为  $m$  的矩形导电线框，由质量均匀分布的刚性杆构成，静止放置在不导电的水平桌面上，可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴  $ab$  转动，在此边中串接一能输出可变电流的电流源（图中未画出）。线框处在匀强磁场中，磁场的磁感应强度  $B$  沿水平方向且与转轴垂直，俯视图如图所示。现让电流从零逐渐增大，当电流大于某一最小值  $I_{\min}$  时，线框将改变静止状态。



(1) 求电流值  $I_{\min}$ 。

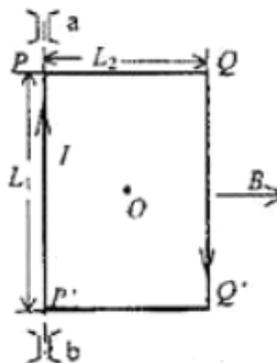
(2) 当线框改变静止状态后，设该电流源具有始终保持恒定电流值  $I_0$  不变 ( $I_0 > I_{\min}$ ) 的功能。已知在线框运动过程中存在空气阻力。试分析线框的运动状况。

**解：**

导体线框放在水平桌面上，俯视图如右图。由图可见，在线框没动之前，线框的  $PQ$  边与  $P'Q'$  边平行于磁场  $B$ ，因而不受磁场力。 $PP'$  边受的安培力的大小为  $IBL_1$ ，方向垂直于桌面向下，但此力对轴的力矩为零。 $QQ'$  边受的安培力的大小为  $IBL_1$ ，方向垂直桌面向上。此力对固定轴的力矩为

$$M_0 = IBL_1L_2 \quad (1)$$

除此力矩外，线框还受到重力矩作用。重力力矩等于重力乘线框重心 ( $O$  点) 到轴  $ab$  的距离，即



$$\tau_0 = mg(L_2/2) \quad (2)$$

当  $M_0 = \tau_0$  时，桌面对线框的支持力的力矩为零， $M_0 > \tau_0$  时，线框将改变静止状态，开始绕轴  $ab$  向上翘起。根据题意及 (1)、(2) 式，由力矩平衡原理可知

$$I_{\min} BL_1 L_2 = \frac{1}{2} mg L_2 \quad (3)$$

$$\text{解得 } I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1}$$

(2) 线框处于静止状态时，若电流  $I_0$  比  $I_{\min}$  稍大，线框所受的电磁力矩  $M$  将大于重力矩  $\tau$ ，使线框绕  $ab$  轴向上翘起。 $PQ$  边和  $P'Q'$  边所受电磁力不等于零，但二者相互抵消。当保持电流值  $I_0$  恒定不变时，线框将从静止状态开始绕固定轴作加速转动。在加速转动过程中，由于通过线框的磁通量发生变化，线框内将产生感应电动势，它有使线框中的电流变小的趋势，题中已设电流源有保持电流恒定不变的功能，所以当线框平面转至与桌面成  $\alpha$  角时，如右图所示，线框受到的合力矩为

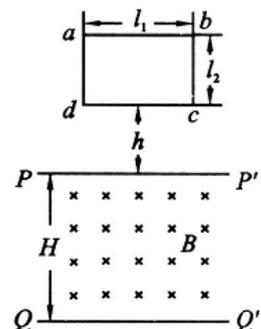
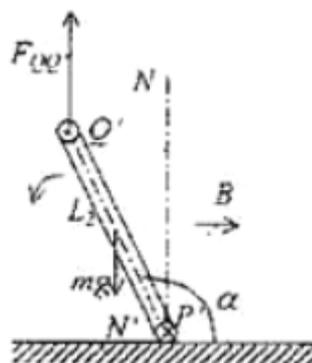
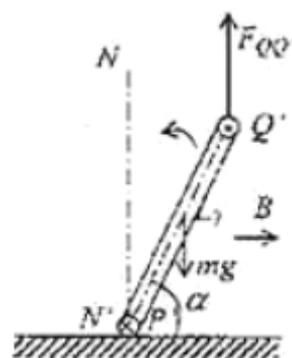
$$M - \tau = (I_0 BL_1 - \frac{1}{2} mg) L_2 \cos \alpha \quad (4)$$

随着  $\alpha$  角逐渐增大，合力矩随之减小，但  $M - \tau$  始终大于零，因而线框仍作逆时针加速转动，角速度不断增大。当线框平面转到竖直面  $NN'$  时，合力矩为零，角速度达到最大。由于惯性，线框将越过  $NN'$  面作逆时针转到。此时，合力矩与线框转动方向相反，角速度将逐渐减小，合力矩的大小随着  $\alpha$  角的增大而增大，如右图所示。如果没有空气阻力， $\alpha$  将增至  $180^\circ$ 。当  $\alpha$  角等于  $180^\circ$  时，线框转动的角速度为零，合力矩将使线框作顺时针加速转动，结果线框将在  $\alpha$  角等于  $0^\circ$  与  $180^\circ$  之间往复摆动不止。

实际上，由于空气阻力作用，线框平面在  $NN'$  平面两侧摆动的幅度将逐渐变小，最终静止在  $NN'$  面处，此时，电磁力矩与重力矩均为零。如果线框稍偏离平衡位置  $NN'$ ，电磁力矩与重力矩的合力矩将使线框回到  $NN'$  平面处。故线框处于稳定平衡状态。

**简析：** 本题通过磁场中安培力与力学相结合，由电磁学理论计算安培力后，通过受力情况分析判断线框运动状态，其核心也是力学。

**例 6.** 位于竖直平面内的矩形平面导线框  $abcd$ 。 $ab$  长为  $l_1$ ，是水平的， $bc$  长为  $l_2$ ，线框的质量为  $m$ ，电阻为  $R$ 。其下方有一匀强磁场区域，该区域的上、下边界  $PP'$  和  $QQ'$  均与  $ab$  平行，两边界间的距离为  $H$ ， $H > l_2$ ，磁场的磁感应强度为  $B$ ，方向与线框平面垂直，如图所示。令线框的  $dc$  边从离磁场区域上边界  $PP'$  的距离为  $h$  处自由下落，已知在线框的  $dc$  边进入磁场后，



$ab$  边到达边界  $PP'$  之前的某一时刻线框的速度已达到这一阶段的最大值。问从线框开始下落到  $dc$  边刚刚到达磁场区域下边界  $QQ'$  的过程中，磁场作用于线框的安培力做的总功为多少？

**解：** 设线框的  $dc$  边刚刚到达磁场区域上边界  $PP'$  时的速度为  $v_1$ ，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \quad (1)$$

$dc$  边进入磁场后，按题意线框虽然受安培力阻力作用，但依然加速下落。设  $dc$  边下落到离  $PP'$  的距离为  $\Delta h_1$  时，速度达到最大值，以  $v_0$  表示这个最大速度，这时线框中的感应电动势

为  $E = Bl_1v_0$ ，线框中的电流  $I = \frac{E}{R} = \frac{Bl_1v_0}{R}$ ，作用于线框的安培力为

$$F = Bl_1I = \frac{B^2l_1^2v_0}{R} \quad (2)$$

而速度达到最大的条件是  $F = mg$ ，由此得

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2l_1^2} \quad (3)$$

在  $dc$  边向下运动距离  $\Delta h_1$  的过程中，重力做功  $W_G = mg\Delta h_1$ ，安培力做功  $W_F$ ，由动能定理得  $W_G + W_F = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ 。将 (1)、(3) 式代入得

$$W_F = -mg\Delta h_1 + \frac{m^3g^2R^2}{2B^4l_1^4} - mgh$$

线框速度达到  $v_0$  后，做匀速运动。当  $dc$  边匀速向下运动的距离为  $\Delta h_2 = l_2 - \Delta h_1$  时， $ab$  边到达磁场的边界  $PP'$ ，整个线框进入磁场。在线框  $dc$  边向下移动  $\Delta h_2$  的过程中，重力做功  $W'_G$ ，安培力做功  $W'_F$ ，但线框速度未变化，由动能定理  $W'_G + W'_F = 0$ ，解得

$$W'_F = -mg(l_2 - \Delta h_1)$$

整个线框进入磁场后，直至  $dc$  边到达磁场区的下边界  $QQ'$ ，作用于整个线框的安培力为零，安培力做的功也为零，线框只在重力作用下做加速运动。

所以，整个过程中安培力做的总功为：

$$W = W_F + W'_F = -mg(l_2 + h) + \frac{m^3g^2R^2}{2B^4l_1^4}$$

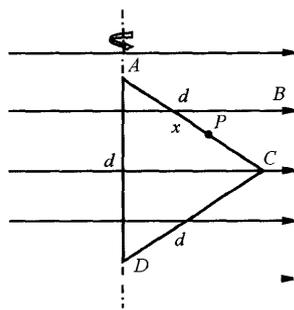
**简析：** 本题是通过安培力求做功的问题，将安培力与动能定理结合。求解本题只需根据受力确定线框的运动状态，再结合动能定理即可。

**例 7.** 如图所示， $ACD$  是由均匀细导线制成的边长为  $d$  的等边三角形线框，它以  $AD$  为转轴，在磁感应强度为  $B$  的恒定的匀强磁场中以恒定的角速度  $\omega$  转动（俯视为逆时针旋转），磁场方向与  $AD$  垂直。已知三角形每条边的电阻都等于  $R$ ，取图示线框平面转至与磁

场平行的时刻为  $t=0$ 。

(1) 求任意时刻  $t$  线框中的电流。

(2) 规定  $A$  点的电势为 0, 求  $t=0$  时, 三角形线框的  $AC$  边上任一点  $P$  (到  $A$  点的距离用  $x$  表示) 的电势  $U_P$ , 并画出  $U_P$  与  $x$  之间关系的图线。



**解:**

(1) 在线框转动过程中, 三角形的  $AC$ 、 $CD$  两边因切割磁感线而产生磁感应电动势, 因长度为  $d$  的  $AC$  边和  $CD$  边都不与磁场方向垂直, 每条边切割磁感线的有效长度, 即垂直于磁场方向的长度为  $l = d \sin 30^\circ = \frac{1}{2}d$ 。因  $AC$  边上不同部分到转轴的距离不同, 它们的速度随离开转轴的距离的增大而线性增大, 故可认为  $AC$  边上各部分产生的总电动势, 数值上等同于整条  $AC$  边均以  $AC$  边中点处的速度  $\bar{v}$  运动时产生的电动势, 而  $\bar{v} = \omega \frac{1}{2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega d$ 。

设在  $t=0$  至时刻  $t$ , 三角形从平行于磁场方向的位置绕轴转过角度为  $\theta$ , 则  $\theta = \omega t$ , 因边上各点速度的方向不再与磁场方向垂直,  $\bar{v}$  沿垂直磁场方向的分量为  $\bar{v}_\perp = \bar{v} \cos \theta$ , 由此得到  $t$  时刻  $AC$  边中的感应电动势  $\varepsilon_{AC} = B l \bar{v}_\perp$ , 其方向由  $A$  指向  $C$ , 由带入  $\bar{v}_\perp$  的表达式得

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega d^2 \cos \omega t$$

同理可得  $\varepsilon_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega d^2 \cos \omega t$ , 其方向由  $C$  指向  $D$ , 三角形线框中的总电动势为

$$\varepsilon = \varepsilon_{AC} + \varepsilon_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4} B \omega d^2 \cos \omega t$$

其方向沿  $ACDA$  回路方向。因线框中的总电阻为  $3R$ , 故  $t$  时刻线框中的电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{3R} = \frac{\sqrt{3}}{12R} B \omega d^2 \cos \omega t$$

(2) 对于  $AP$  来说, 长度为  $x$ , 在  $t=0$  时刻,  $\cos \omega t = 1$ , 而以  $x$  代替  $d$ , 即可得  $AP$  段中的感应电动势的大小为  $\varepsilon_{AP} = \frac{\sqrt{3}}{8} B x^2 \omega$ , 方向由  $A$  点指向  $P$  点, 此时线框的电流为

$$I = \frac{\sqrt{3}}{12R} B \omega d^2。$$

根据含源电路欧姆定律,  $P$  点的电势

$$U_P = \varepsilon_{AP} - \frac{I x R}{d}$$

整理后得

$$U_p = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega(x^2 - \frac{2}{3}xd)$$

为了画出  $U_p(x)$  图线, 先求出若干特征点的电势值。上式右侧是一个关于  $x$  的二次方程, 故  $U_p(x)$  图线为一抛物线, 上式可改写为

$$U_p + \frac{\sqrt{3}}{72} B\omega d^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega(x - \frac{1}{3}d)^2$$

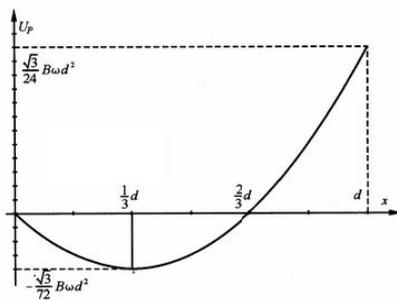
由上式可知, 此抛物线

(i)  $x=0$  和  $x = \frac{2}{3}d$ ,  $U_p = 0$

(ii) 抛物线的顶点坐标为  $x = \frac{d}{3}$ ,

$$U_p = -\frac{\sqrt{3}}{72} B\omega d^2$$

(iii)  $x = d$ ,  $U_p = \frac{\sqrt{3}}{24} B\omega d^2$



图线如图所示。

**简析:** 本题主要考察了动生电动势的理解和计算, 把握好动生电动势产生的原因, 由公式即可计算动生电动势。得到了动生电动势其他问题均属于简单的电路分析问题。

**例 8.** 在真空中建立一坐标系, 以水平向右为  $x$  轴正方向, 竖直向下为  $y$  轴正方向,  $z$  轴垂直纸面向里 (如图所示)。在  $0 \leq y \leq L$  的区域内有匀强磁场,  $L=0.80\text{m}$ , 磁场的磁感强度的方向沿  $z$  轴的正方向, 其大小  $B=0.10\text{T}$ 。今把一荷质比  $q/m=50\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$  的带正电质点在  $x=0, y=-0.20\text{m}, z=0$  处静止释放, 将带电质点过原点的时刻定为  $t=0$  时刻, 求带电质点在磁场中任一时刻  $t$  的位置坐标。并求它刚离开磁场时的位置和速度。取重力加速度  $g=10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

**解:** 带电质点静止释放时, 受重力作用做自由落体运动, 当它到达坐标原点时, 速度为

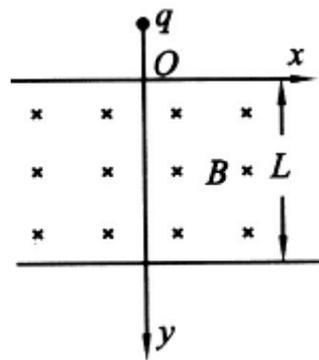
$$v_1 = \sqrt{2g|y|} = 2.0\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1)$$

方向竖直向下。带电质点进入磁场后, 除受重力作用外, 还受到洛伦兹力作用, 质点速度的大小和方向都将变化, 洛伦兹力的大小和方向亦随之变化。我们可以设想, 在带电质点到达原点时, 给质点附加上沿  $x$  轴正方向和负方向两个大小都是  $v_0$  的初速度, 由于这两个方向相反的速度的合速度为零, 因而不影响带电质点以后的运动。在  $t=0$  时刻, 带电质点因具有沿  $x$  轴正方向的初速度  $v_0$  而受洛伦兹力  $f_1$  的作用。

$$f_1 = qv_0B \quad (2)$$

其方向与重力的方向相反。适当选择  $v_0$  的大小, 使  $f_1$  等于重力, 即

$$qv_0B = mg \quad (3)$$



解得：

$$v_0 = \frac{g}{(q/m)B} = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

只要带电质点保持 (4) 式决定的  $v_0$  沿  $x$  轴正方向运动,  $f_1$  与重力的合力始终等于零。但此时, 位于坐标原点的带电质点还具有竖直向下的速度  $v_1$  和沿  $x$  轴负方向的速度  $v_0$ , 二者的合成速度大小为

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

方向指向左下方, 设它与  $x$  轴的负方向的夹角为  $\alpha$ , 如图所示, 则

$$\tan \alpha = \frac{v_1}{v_0} = 1\sqrt{2}$$

解得

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

因而带电质点从  $t=0$  时刻起的运动可以看做是速率为  $v_0$ , 沿  $x$  轴的正方向的匀速直线运动和在  $xOy$  平面内速率为  $v$  的匀速圆周运动的合成。圆周半径

$$R = \frac{mv}{qB} = 0.56 \text{ m} \quad (7)$$

带电质点进入磁场瞬间所对应的圆周运动的圆心  $O'$  位于垂直于质点此时速度  $v$  的直线上, 由图可知, 其坐标为

$$\begin{cases} x_{O'} = R \sin \alpha = 0.40 \text{ m} \\ y_{O'} = R \cos \alpha = 0.40 \text{ m} \end{cases} \quad (8)$$

圆周运动的角速度

$$\omega = \frac{v}{R} = 5.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (9)$$

由图可知, 在带电质点离开磁场区域前的任何时刻  $t$ , 质点位置的坐标为

$$\begin{cases} x = v_0 t - [R \sin(\omega t + \alpha) - x_{O'}] \\ y = y_{O'} - R \cos(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (10)$$

式中  $v_0$ 、 $R$ 、 $\omega$ 、 $\alpha$ 、 $x_{O'}$ 、 $y_{O'}$  已分别由 (4)、(7)、(9)、(6)、(8) 各式给出。

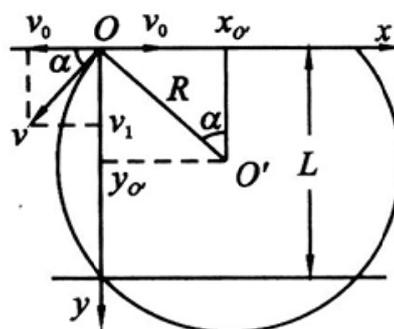
带电质点到达磁场区域下边界时,  $y=L=0.80\text{m}$ , 代入 (10) 式, 再代入有关数值, 解得

$$t = 0.31 \text{ s} \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (10) 式, 再代入有关数值得

$$x = 0.63 \text{ m} \quad (12)$$

所以带电质点离开磁场下边界时的位置的坐标为



$$\begin{cases} x = 0.63\text{m} \\ y = 0.80\text{m} \\ z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

带电质点在磁场内的运动可分解成一个速率为  $v$  的匀速圆周运动和一个速率为  $v_0$  的沿  $x$  轴正方向的匀速直线运动，任何时刻  $t$ ，带电质点的速度  $V$  便是匀速圆周运动速度  $v$  与匀速直线运动的速度  $v_0$  的合速度。若圆周运动的速度在  $x$  方向和  $y$  方向的分量为  $v_x$ 、 $v_y$ ，则质点合速度在  $x$  方向和  $y$  方向的分速度分别为

$$V_x = v_x + v_0 \quad (14)$$

$$V_y = v_y \quad (15)$$

$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$ ， $v$  由 (5) 式决定，其大小是恒定不变的， $v_0$  由 (4) 式决定，也是恒定不变的，但在质点运动过程中因  $v$  的方向不断变化，它在  $x$  方向和  $y$  方向的分量  $v_x$  和  $v_y$  都随时间变化，因此  $V_x$  和  $V_y$  也随时间变化，取决于所考察时刻质点做圆周运动速度的方向，由于圆周运动的圆心的  $y$  坐标恰为磁场区域宽度的一半，由对称性可知，带电质点离开磁场下边缘时，圆周运动的速度方向应指向右下方，与  $x$  轴正方向夹角  $\alpha' = \frac{\pi}{4}$ ，故代入数值得

$$v_x = v \cos \alpha' = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y = v \sin \alpha' = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

将以上两式及 (5) 式代入 (14)、(15) 式，便得带电质点刚离开磁场区域时的速度分量，它们分别为

$$V_x = 4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (16)$$

$$V_y = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (17)$$

速度大小为

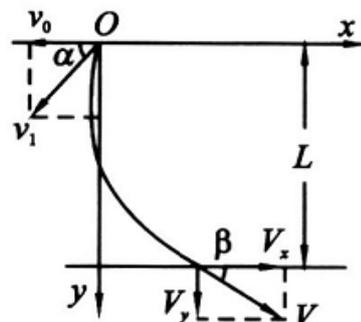
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (18)$$

设  $V$  的方向与  $x$  轴的夹角为  $\beta$ ，如图所示，则

$$\tan \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{1}{2}$$

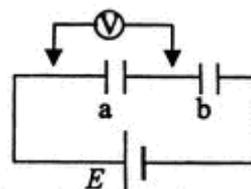
解得  $\beta = 27^\circ$ 。

**简析：** 本题关键在于添加水平速度  $v_0$  产生抵消重力的洛伦兹力，这样运动的分解变得简单，位移相对易求。这在磁场问题中是一种较为有效的处理方法。



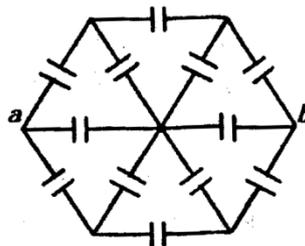
### 巩固习题

1. 如图所示，电容量分别为  $C$  和  $2C$  的两个电容器  $a$  和  $b$  串联接在电动势为  $E$  的电池两端充电，达到稳定后，如果用多用电表的直流电压档  $V$  接到电容器  $a$  的两端（如图），则电压表的指针稳定后的读数是（ ）



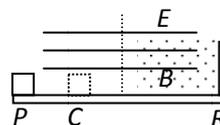
- A.  $E/3$     B.  $2E/3$     C.  $E$     D.  $0$

2. 由电容皆为  $1\mu F$  的电容器组成的网络如图所示。则  $a$ 、 $b$  间的等效电容  $C_{ab} =$  \_\_\_\_\_。

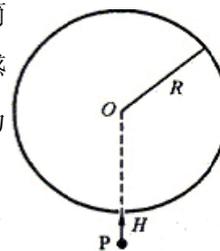


3. 如图所示， $PR$  是一块长  $L$  的绝缘平板，整个空间有一平行于  $PR$  的匀强电场  $E$ ，在板的右半部分有一个垂直于纸面向外的匀强磁场  $B$ 。一个质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的物体，从板的  $P$  端由静止开始在电场力和摩擦力的作用下向右做匀加速运动，进入磁场后恰能做匀速运动。当物体碰到板  $R$  端挡板后被弹回，若在碰撞瞬间撤去电场，物体返回时在磁场中仍做匀速运动，离开磁场后做匀减速运动停在  $C$  点， $PC = \frac{L}{4}$ ，物体与平板间的动摩擦因数为  $\mu$ 。求：

- (1) 物体与挡板碰撞前后的速度  $V_1$  和  $V_2$ ；
- (2) 磁感强度  $B$  的大小；
- (3) 电场强度  $E$  的大小和方向。

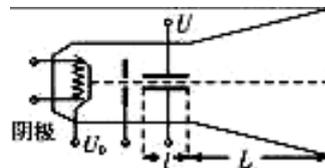


4. 图示为一固定不动的绝缘的圆筒形容器的横截面，其半径为  $R$ ，圆筒的轴线在  $O$  处。圆筒内有匀强磁场，磁场方向与圆筒的轴线平行，磁感应强度为  $B$ 。筒壁的  $H$  处开有小孔，整个装置处在真空中。现有一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$  的带电粒子  $P$  以某一初速度沿筒的半径方向从小孔射入圆筒，经与筒壁碰撞后又从小孔射出圆筒。设：筒壁是光滑的， $P$  与筒壁碰撞是弹性的， $P$  与筒壁碰撞时其电荷量是不变的。若要使  $P$  与筒壁碰撞的次数最少，问：



- (1)  $P$  的速率应为多少？
- (2)  $P$  从进入圆筒到射出圆筒经历的时间为多少？

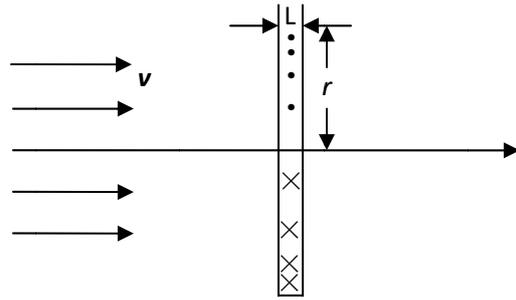
5. 图为示波管的示意图，竖直偏转电极的极板长  $l = 4.0\text{ cm}$ ，两板间距  $d = 1.0\text{ cm}$ ，极板右端与荧光屏的距离  $L = 18\text{ cm}$ 。由阴极发出的电子经电场加速后，以  $v = 1.6 \times 10^7\text{ m/s}$  的速度沿中心线进入竖直偏转电场。若电子由阴极逸出时的初速度、



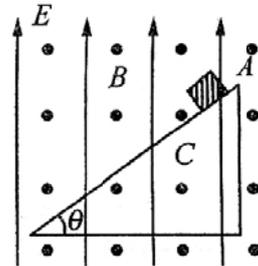
电子所受重力及电子之间的相互作用力均可忽略不计，已知电子的电荷量  $e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，质量  $m=0.91 \times 10^{-30} \text{ kg}$ 。

- (1) 求加速电压  $U_0$  的大小；(2) 要使电子束不打在偏转电极的极板上，求加在竖直偏转电极上的电压应满足的条件；(3) 在竖直偏转电极上加  $u=40\sin 100\pi t \text{ V}$  的交变电压，求电子打在荧光屏上亮线的长度。

6. 空间有半径为  $R$ 、长度  $L$  很短的圆柱形的磁场区域，圆柱的轴线为  $z$  轴，磁场中任一点的磁感应强度的方向沿以  $z$  轴为对称轴的圆的切线，大小与该点离  $z$  轴的距离  $r$  成正比， $B=Kr$ ， $K$  为常数，如图中“ $\cdot$ ”与“ $\times$ ”所示。电量为  $q$  ( $q>0$ )、质量为  $m$  的一束带电粒子流如图中一簇平行箭头所示，以很高的速度  $v$  沿圆柱沿轴线方向，穿过该磁场空间，磁场区域外的磁场强度的大小可视为零。试讨论这束带电粒子流穿过区域后的运动情况。

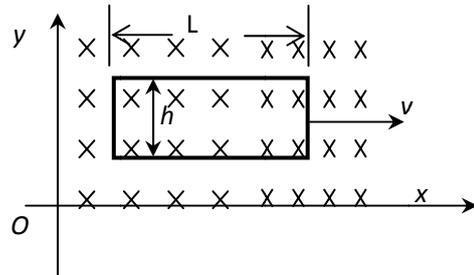


7. 在相互垂直的匀强磁场和匀强电场中，有一倾角为  $\theta$  的足够长的光滑绝缘斜面，磁感应强度为  $B$ ，方向水平向外，电场强度为  $E$ ，方向竖直向上，有一质量为  $m$  带电荷量为  $+q$  的小滑块静止在斜面顶端时对斜面的正压力恰好为零，如图所示。



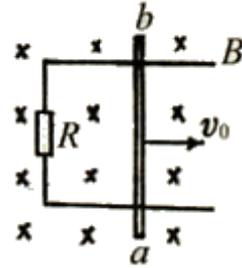
- (1) 如果迅速把电场方向转为竖直向下，求小滑块能在斜面上连续滑行的最远距离  $L$  和所用时间  $t$ ；  
 (2) 如果在距  $A$  端  $L/4$  远处的  $C$  点放入一个相同质量但不带电的小物体，当滑块从  $A$  点由静止下滑到  $C$  点时两物体相碰并黏在一起。求此黏合体在斜面上还能再滑行多长时间和距离。

8. 如图所示，磁场的方向垂直于  $xy$  平面向里。磁感强度  $B$  沿  $y$  方向没有变化，沿  $x$  方向均匀增加，每经过  $1\text{cm}$  增加量为  $1.0 \times 10^{-4} \text{ T}$ ，即  $\frac{\Delta B}{\Delta x} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ T/cm}$ 。有一个长  $L=20\text{cm}$ ，宽  $h=10\text{cm}$  的不变形的矩形金属线圈，以  $v=20\text{cm/s}$  的速度沿  $x$  方向运动。问：



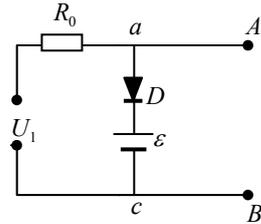
- (1) 线圈中感应电动势  $E$  是多少？  
 (2) 如果线圈电阻  $R=0.02\Omega$ ，线圈消耗的电功率是多少？  
 (3) 为保持线圈的匀速运动，需要多大外力？机械功率是多少？

9. 如图所示，一水平放置的光滑平行导轨上放一质量为  $m$  的金属杆，导轨间距为  $L$ ，导轨的一端连接一阻值为  $R$  的电阻，其他电阻不计，磁感应强度为  $B$  的匀强磁场垂直于导轨平面。现给金属杆一个水平向右的初速度  $v_0$ ，然后任其运动，导轨足够长，试求金属杆在导轨上向右移动的最大距离是多少？

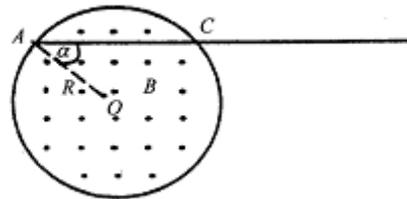


10. 如图所示电路中，输入电压  $260\mu F u_i = 5 \sin \omega t (V)$ ，直流电源电动势  $\varepsilon = 3V$ 。

- (1) 求  $u_{AB}$  的波形；
- (2) 将  $D$  反接后， $u_{AB}$  又当如何？

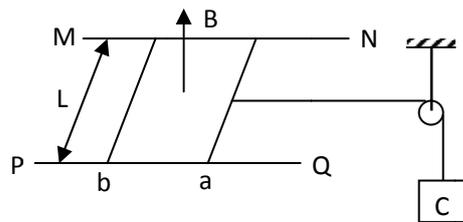


11. 如图所示，半径为  $R$  的圆柱形区域内有匀强磁场，磁场方向垂直纸面指向纸外，磁感应强度  $B$  随时间均匀变化，变化率  $\Delta B / \Delta t = K$  ( $K$  为一正值常量)，圆柱形区外空间没有磁场，沿图中  $AC$  弦的方向画一直线，并向外延长，弦  $AC$  与半径  $OA$  的夹角  $\alpha = \pi/4$ 。直线上有一任意点，设该点与  $A$  点的距离为  $x$ ，求从  $A$  沿直线到该点的电动势的大小。

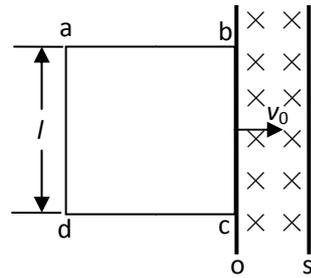


12. 如图所示，间距为  $L$ ，电阻不计的两根平行金属导轨  $MN$ 、 $PQ$  (足够长) 被固定在同一水平面内，质量均为  $m$ ，电阻均为  $R$  的两根相同导体棒  $a$ 、 $b$  垂直于导轨放在导轨上，一根轻绳绕过定滑轮后沿两金属导轨的中线与  $a$  棒连连，其下端悬挂一个质量为  $M$  的物体  $C$ ，整个装置放在方向竖直向上，磁感应强度大小为  $B$  的匀强磁场中，开始时使  $a$ 、 $b$ 、 $C$  都处于静止状态，现释放  $C$ ，经过时间  $t$ ， $C$  的速度为  $v_1$ ， $b$  的速度为  $v_2$ 。不计一切摩擦，两棒始终与导轨接触良好，重力加速度为  $g$ ，求：

- (1)  $t$  时刻  $a$  棒两端的电压
- (2)  $t$  时刻  $C$  的加速度值
- (3)  $t$  时刻  $a$ 、 $b$  与导轨所组成的闭合回路消耗的热功率
- (4)  $t$  时刻  $a$ 、 $b$  与导轨所组成的闭合回路消耗的总电功率

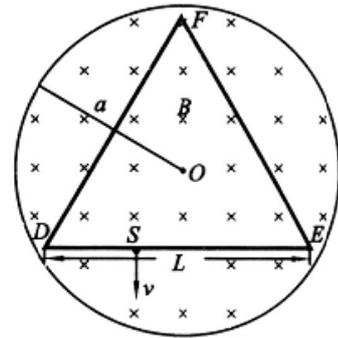


13. 如图所示，在光滑的水平面上，有边长  $l=0.8\text{m}$  的正方形导线框  $abcd$ ，其质量  $m=100\text{g}$ ，自感  $L=10^{-3}\text{H}$ ，电阻可忽略不计。该导线框的  $bc$  边在  $t=0$  时，从  $X=0$  处以初速度  $v_0=4\text{m/s}$  进入磁感应强度为  $B$  的有界匀强磁场区域。磁场区域的宽度  $s=0.2\text{m}$ ， $B$  的方向与导线框垂直（图中指向纸内）， $B$  的大小为  $0.5\text{T}$ 。忽略空气阻力。试求：



- (1)  $t = \frac{\pi}{36}s$  时刻导线框  $bc$  边的位置；
- (2) 若初速度为  $\frac{4v_0}{\sqrt{3}}$ ，求  $t = \frac{\pi}{36}s$  时刻导线框  $bc$  边的位置。

14. 如图所示，在半径为  $a$  的圆柱空间中（图中圆为其横截面）充满磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场，其方向平行于轴线远离读者。在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为  $L=1.6a$  的刚性等边三角形框架  $\triangle DEF$ ，其中心  $O$  位于圆柱的轴线上。  $DE$  边上  $S$  点 ( $\overline{DS} = \frac{1}{4}L$ ) 处有一发射带电粒子的源，发射粒子的方向皆在图中截面内且垂直于  $DE$  边向下。发射粒子的电量皆为  $q$  ( $>0$ )，质量皆为  $m$ ，但速度  $v$  有各种不同的数值。若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞，并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰的边。试问：



1. 带电粒子速度  $v$  的大小取哪些数值时可使  $S$  点发出的粒子最终又回到  $S$  点？

2. 这些粒子中，回到  $S$  点所用的最短时间是多少？

## 参考答案

1. D
2.  $\frac{5}{4}F$

3. 解：物体碰挡板后在磁场中做匀速运动，可判断物体带的是正电荷，电场方向向右。  
 (1) 物体进入磁场前，在水平方向上受到电场力和摩擦力的作用，由静止匀加速至  $V_1$ 。

$$(qE - \mu mg) \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m V_1^2 \dots\dots\dots ①$$

物体进入磁场后，做匀速直线运动，电场力与摩擦力相等

$$\mu(mg + qV_1B) = qE \dots\dots\dots ②$$

在碰撞的瞬间，电场撤去，此后物体仍做匀速直线运动，速度为  $V_2$ ，不再受摩擦力，在竖直方向上磁场力与重力平衡。

$$qV_2B = mg \dots\dots\dots ③$$

离开磁场后，物体在摩擦力的作用下做匀减速直线运动

$$-\mu mg \times \frac{1}{4}L = 0 - \frac{1}{2}mV_2^2 \dots\dots\dots ④$$

由④式可得：
$$V_2 = \frac{\sqrt{2\mu gL}}{2}$$

代入③式可得：
$$qB = \frac{m}{\sqrt{2g/\mu}L} \dots\dots\dots ⑤$$

解以上各方程可得：
$$V_1 = \sqrt{2\mu gL}$$

(2) 由③式得：
$$B = \frac{mg}{qV_2} = \frac{m\sqrt{2\mu gL}}{q\mu L}$$

(3) 由②式可得：

$$E = \frac{\mu mg}{q} + \mu V_1 B = \frac{\mu mg}{q} + \mu \times \sqrt{2\mu gL} \times \frac{m\sqrt{2\mu gL}}{q\mu L} = \frac{3\mu mg}{q}$$

4. 解析：

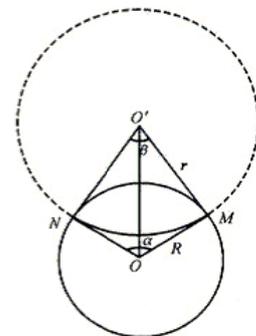
(1) 如图所示，设筒内磁场的方向垂直纸面指向纸外，带电粒子 P 带正电，其速率为  $v$ 。P 从小孔射入圆筒中因受到磁场的作用力而偏离入射方向，若与筒壁只发生一次碰撞，是不可能从小孔射出圆筒的。但与筒壁碰撞两次，它就有可能从小孔射出。在此情形中，P 在筒内的路径由三段等长、等半径的圆弧 HM、MN 和 NH 组成。现考察其中一段圆弧 MN，如图 8-35 所示。由于 P 沿筒的半径方向入射，OM 和 ON 均与轨道相切，两者的夹角  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$  (1)

设圆弧的圆半径为  $r$ ，则有  $qvB = m\frac{v^2}{r}$  (2)

圆弧对轨道圆心  $O'$  所张的圆心角  $\beta = \frac{\pi}{3}$  (3)

由几何关系得  $r = R \cot \frac{\beta}{2}$  (4)

解(2)、(3)、(4)式得  $v = \frac{\sqrt{3}qBR}{m}$  (5)



(2) P 由小孔射入到第一次与筒壁碰撞所通过的路径为  $s = \beta r$  (6)

经历时间为  $t_1 = \frac{s}{v}$  (7)

P 从射入小孔到射出小孔经历的时间为  $t=3t_1$  (8)

由以上有关各式得  $t = \frac{\pi m}{qB}$  (9)

5.解: (1) 对于电子通过加速电场的过程, 根据动能定理, 有  $eU_0 = \frac{1}{2}mv^2$

解得  $U_0=728 \text{ V}$ .

(2) 设偏转电场电压为  $U_1$  时, 电子刚好飞出偏转电场, 则此时电子沿电场方向的位移恰为  $d/2$ ,

$$\text{即 } \frac{d}{2} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU_1}{md} \cdot t^2$$

电子通过偏转电场的时间  $t = \frac{l}{v}$

$$\text{解得 } U_1 = \frac{d^2 m}{et^2} = 91 \text{ V}$$

所以, 为使电子束不打在偏转电极上, 加在偏转电极上的电压  $U$  应小于  $91 \text{ V}$ .

(3) 由  $u=40 \sin 100\pi t \text{ V}$  可知  $\omega=100\pi$ ,  $U_m=40 \text{ V}$

偏转电场变化的周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.02 \text{ s}$ , 而  $t = \frac{l}{v} = 2.5 \times 10^{-9} \text{ s}$ .  $T \gg t$ , 可见每个电子通过偏转电场的过程中, 电场可视为稳定的匀强电场.

当极板间加最大电压时, 电子有最大偏转量  $y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU_m}{md} \cdot t^2 = 0.20 \text{ cm}$ .

电子飞出偏转电场时平行极板方向分速度  $v_x=v$

垂直极板方向的分速度  $v_y = a_y t = \frac{eU_m}{md} \cdot t$

电子离开偏转电场到达荧光屏的时间  $t' = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v}$

电子离开偏转电场后在竖直方向的位移为  $y_2 = v_y t' = 2.0 \text{ cm}$

电子打在荧光屏上的总偏移量  $Y_m = y_m + y_2 = 2.2 \text{ cm}$

电子打在荧光屏产生亮线的长度为  $2Y_m = 4.4 \text{ cm}$

用下面的方法也正确:

设电子在偏转电场有最大电压时射出偏转电场的速度与初速度方向的夹角为  $\theta$ ,

则  $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = 0.01$

电子打在荧光屏上的总偏移量  $Y_m = \left(\frac{l}{2} + L\right) \tan \theta = 2.2 \text{ cm}$

电子打在荧光屏产生亮线的长度为  $2Y_m = 4.4 \text{ cm}$ .

6.解: 设想沿距  $z$  轴为  $r$  的平行线运动的带电粒子进入磁场区, 带电粒子受到指向  $z$  轴的径向洛伦兹力  $f$  向轴偏转,  $f=qvB$ 。因粒子速度很快, 粒子经过磁场区的时间  $\Delta t$  很短,

$\Delta t = L/v$ ；粒子经磁场区所受的冲量  $P_r$  为： $P_r = f\Delta t = qBL = qKLr$ 。

粒子逸出磁场区后将沿直线方向运动。运动的直线与  $z$  轴交于  $M$  点，令  $M$  点到磁场区的距离为  $d$ ，因粒子沿轴向运动的动量  $P$  经过磁场区域发生的改变可以忽略，则有：

$$\frac{P}{P_r} = \frac{d}{r}；综合以上关系有：d = \frac{P}{P_r} r = \frac{mv}{qKL}$$

点  $M$  的位置与粒子距轴的距离无关，因所有粒子均以速度  $v$  平行于  $z$  轴进入磁场区，受到洛伦兹力后，都折向  $M$  点，但平行  $z$  轴的速度分量基本不改变，所以粒子束经磁场区后，均会同时会聚于  $M$  点。

7.解：

(1)由题意知  $qE = mg$  场强转为竖直向下时，由动能定理，有  $(mg + qE) L \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2$

$$\text{即 } 2mgL \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{①} \quad \text{当滑块刚离开斜面时有 } qvB = (mg + qE) \cos \theta$$

$$\text{即 } v = \frac{2mg \cos \theta}{qB} \quad \text{②} \quad \text{由①②解，得 } L = \frac{m^2 g \cos^2 \theta}{q^2 B^2 \sin \theta}$$

$$\text{根据动量定理，有 } t - \frac{mv}{2mg \sin \theta} = \frac{m}{qB} \cot \theta$$

(2)两不物体先后运动，设在  $C$  点处碰撞前滑块的速度为  $v$ ，则  $2mg \cdot \frac{L}{4} \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2$  ③

$$\text{碰撞过程有 } mv = 2mu \quad \text{④}$$

$$\text{当黏合体将要离开斜面时有 } qv'B = (2mg + qE) \cos \theta = 3mg \cos \theta \quad \text{⑤}$$

由动能定理，碰后两物体共同下滑的过程中，有  $3mg \sin \theta \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2m v'^2 - \frac{1}{2} \cdot 2mu^2$  ⑥

$$\text{联立③④⑤⑥解，得 } s = \frac{3m^2 g \cos^2 \theta}{q^2 B^2 \sin \theta} - \frac{L}{12} \quad \text{⑦} \quad \text{将 } L \text{ 结果代入⑦式得 } s = \frac{35m^2 g \cos^2 \theta}{12q^2 B^2 \sin \theta}$$

$$\text{碰后两物体在斜面上还能滑行的时间可由动量定理求得 } t' = \frac{2m v' - 2mu}{3mg \sin \theta} = \frac{5m}{3qB} \cot \theta$$

8. 解：(1)设线圈向右移动一距离  $\Delta S$ ，则通过线圈的磁通量变化为：

$$\Delta \phi = h \Delta S \frac{\Delta B}{\Delta x} L, \text{ 而所需时间为 } \Delta t = \frac{\Delta S}{v},$$

$$\text{根据法拉第电磁感应定律可感应电动势为 } E = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = hvL \frac{\Delta B}{\Delta x} = 4 \times 10^{-5} \text{ V.}$$

$$(2)\text{根据欧姆定律可得感应电流 } I = \frac{E}{R} = 2 \times 10^{-8} \text{ A,}$$

$$\text{电功率 } P = IE = 8 \times 10^{-8} \text{ W}$$

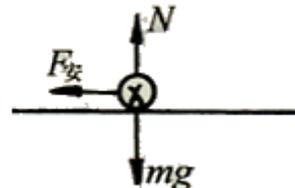
(3)电流方向是沿逆时针方向的，导线  $dc$  受到向左的力，导线  $ab$  受到向右的力。线圈做

匀速运动，所受合力应为零。根据能量守恒得机械功率  $P_{机}=P=8 \times 10^{-8} \text{ W}$ 。

9.解：设杆在减速中的某一时刻速度为  $v$ ，取一极短时间  $\Delta t$ ，发生了一段极小的位移  $\Delta x$ ，在  $\Delta t$  时间内，磁通量的变化为  $\Delta \Phi$

$$\Delta \Phi = BL\Delta x \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t R} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t R}$$

金属杆受到安培力为  $F_{安} = ILB = \frac{B^2 L^2 \Delta x}{\Delta t R}$



由于时间极短，可以认为  $F_{安}$  为恒力，选向右为正方向，在  $\Delta t$  时间内，

安培力  $F_{安}$  的冲量为： $\Delta I = -F_{安} \cdot \Delta t = -\frac{B^2 L^2 \Delta x}{R}$

对所有的位移求和，可得安培力的总冲量为

$$I = \sum \left( -\frac{B^2 L^2 \Delta x}{R} \right) = -\frac{B^2 L^2}{R} x \quad \text{①} \quad \text{其中 } x \text{ 为杆运动的最大距离,}$$

对金属杆用动量定理可得  $I = 0 - mv \quad \text{②}$

由①、②两式得： $x = \frac{mV_0 R}{B^2 L^2}$

10.分析：电阻  $R_0$  与电源  $u_i$  串联，有分压作用，二极管与电源  $\varepsilon$  串联后，跨接在输出端，与负载形成并联关系，这样的连接特点使电路具有削减波幅的功能。

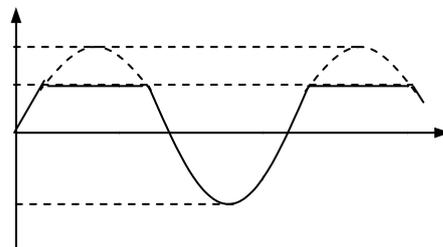
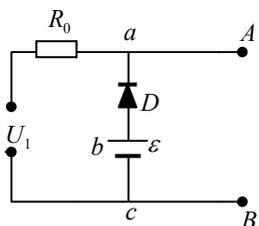


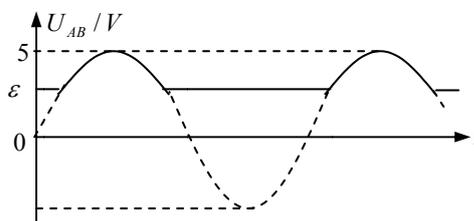
图 1

解 (1)  $u_i < \varepsilon$  时，电势  $u_a < u_b$ ， $D$  处于反向截止， $ab$  相当于断路， $u_{AB} = u_i$ ， $u_i > \varepsilon$  时，电势  $u_a > u_b$ ， $D$  处于正向导通状态， $ab$  间相当于短路，输出电压  $u_{ab} = u_{ac} = u_{bc} = \varepsilon$ ， $u_i$  的顶部 ( $> \varepsilon$ ) 被削去，如图 1 所示。

(2) 当  $D$  反接时，如图 2 所示，当  $u_i \geq \varepsilon$  时， $D$  截止， $u_{AB} = u_i$ ；当  $u_i < \varepsilon$  时， $D$  被导通， $u_{AB} = \varepsilon$ ， $u_i$  低于  $\varepsilon$  的部分全部被削去，输出波形  $u_{AB}$  成为底部在  $u = \varepsilon$  处的正脉动电压，如图 3 所示



www.qbxt.cn 图 2



北京清北学堂教育科技有限公司

图 3

11.解：由于圆柱形区域内存在变化磁场，在圆柱形区域内外空间中产生涡旋电场，电场线为圆，圆心在圆柱轴线上，圆面与轴线垂直，如图中虚点线所示。在这样的电场中，沿任意半径方向移动电荷时，由于电场力与移动方向垂直，涡旋电场力做功为零，因此沿半径方向任意一段路径上的电动势均为零。

(1). 任意点在磁场区域内：令  $P$  为任意点（如图1所示） $x \leq \sqrt{2}R$ ，在图中连直线  $OA$  与  $OP$ 。取闭合回路  $APOA$ ，可得回路电动势  $E_1 = E_{AP} + E_{PO} + E_{OA}$ ，式中  $E_{AP}$ 、 $E_{PO}$ 、 $E_{OA}$  分别为从  $A$  到  $P$ 、从  $P$  到  $O$ 、从  $O$  到  $A$  的电动势。由前面的分析可知  $E_{PO} = 0$ ， $E_{OA} = 0$ ，故

$$E_{AP} = E_1 \quad (1)$$

令  $\Delta AOP$  的面积为  $S_1$ ，此面积上磁通量  $\phi_1 = BS_1$ ，由电磁感应定律，回路的电动势大小为

$$E_1 = \frac{\Delta \phi_1}{\Delta t} = S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

根据题给的条件有

$$E_1 = S_1 k \quad (2)$$

由图1可知

$$S_1 = \frac{1}{2} xR \sin \alpha = \frac{xR}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 式可得沿  $AP$  线段的电动势大小为

$$E_{AP} = \frac{kR}{2\sqrt{2}} x \quad (4)$$

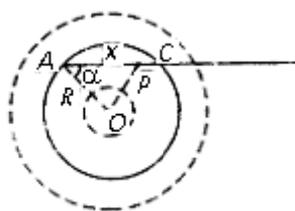


图 1

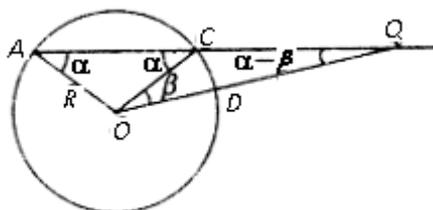


图 2

(2). 任意点在磁场区域外: 令  $Q$  为任意点 (见图2),  $x > \sqrt{2}R$ 。在图中连  $OA$ 、 $OQ$ 。

取闭合回路  $AQOA$ , 设回路中电动势为  $E_2$ , 根据类似上面的讨论有

$$E_{AQ} = E_2 \quad (5)$$

对于回路  $AQOA$ , 回路中磁通量等于回路所包围的磁场区的面积的磁通量, 此面积为  $S_2$ , 通过它的磁通量  $\phi_2 = BS_2$ 。根据电磁感应定律可知回路中电动势的大小

$$E_2 = S_2 k \quad (6)$$

在图中连  $OC$ , 令  $\angle COQ = \beta$ , 则  $\angle OQC = \alpha - \beta$ , 于是

$$\begin{aligned} S_2 &= \Delta AOC \text{ 的面积} + \text{扇形} OCD \text{ 的面积} \\ &= \left(\frac{1}{2} R \sin \alpha\right) \cdot 2R \cos \alpha + \frac{\beta}{2\pi} \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \beta) \end{aligned}$$

当  $\alpha = \pi/4$  时,  $S_2 = \frac{1}{2} R^2 (1 + \beta)$ ,  $\Delta OCQ$  中有

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{2}R}{\sin \beta} &= \frac{R}{\sin[(\pi/4) - \beta]} \\ R \sin \beta &= (x - \sqrt{2}R) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \\ &= (x - \sqrt{2}R) \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \beta - \sin \beta) \\ \left(R + \frac{x - \sqrt{2}R}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta &= \frac{x - \sqrt{2}R}{\sqrt{2}} \cos \beta \\ \tan \beta &= \frac{x - \sqrt{2}R}{x} \end{aligned}$$

于是得 
$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \left(1 + \arctan \frac{x - \sqrt{2}R}{x}\right) \quad (7)$$

由 (5)、(6)、(7) 式可得沿  $AQ$  线的电动势的大小为

$$E_{AQ} = \frac{kR^2}{2} \left(1 + \arctan \frac{x - \sqrt{2}R}{x}\right) \quad (8)$$

12. 解: (1) 根据法拉第电磁感应定律,  $t$  时刻回路的感应电动势

$$E = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = BL(v_1 - v_2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{回路中感应电流: } I = \frac{E}{2R} = \frac{BL(v_1 - v_2)}{2R} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

a 棒产生的电动势:  $E_a = BLv_1 \dots\dots\dots ③$

a 棒两端电压:  $U = E_a - IR \dots\dots\dots ④$

联立②③④解得:  $U = \frac{BL(v_1 + v_2)}{2} \dots\dots\dots$

(2) 对 a 有,  $T - BIL = ma \dots\dots\dots ⑤$

对 C 有,  $Mg - T = Ma \dots\dots\dots ⑥$

联立②⑤⑥以上各式解得:  $a = \frac{2MgR - B^2L^2(v_1 - v_2)}{2R(M + m)} \dots\dots\dots$

(3)  $P = I^2 \cdot 2R = \frac{B^2l^2(v_1 - v_2)^2}{2R}$

(4) 解法一: 单位时间内, 通过 a 棒克服安培力做功, 把 C 物体的一部分重力势能转化为闭合回路的电能, 而闭合回路电能的一部分以焦耳热的形式消耗掉, 另一部分则转化为 b 棒的动能, 所以, t 时刻闭合回路的电功率等于 a 棒克服安培力做功的功率, 即

$P = BILv_1 \dots\dots\dots ⑦$

联立②⑦解得:  $P = \frac{B^2L^2(v_1 - v_2)v_1}{2R} \dots\dots\dots$

解法二: a 棒可等效为发电机, b 棒等效为电动机, 则

A 棒的感应电动势为:  $E_a = BLv_1 \dots\dots\dots ⑧$

闭合回路消耗的总电功率为:  $P = IE_a \dots\dots\dots ⑨$

联立②⑧⑨解得:  $P = BILv_1 = \frac{B^2L^2(v_1 - v_2)v_1}{2R} \dots\dots\dots$

解法三: 闭合回路消耗的热功率为:  $P = I^2 \cdot 2R = \frac{B^2L^2(v_1 - v_2)^2}{2R} \dots\dots ⑩$

B 棒的机械功率为:  $P_{机} = BILv_2 = \frac{B^2L^2(v_1 - v_2)v_2}{2R} \dots\dots\dots (11)$

故闭合回路消耗的总电功率为:  $P = P_{热} + P_{机} = \frac{B^2L^2(v_1 - v_2)v_1}{2R} \dots\dots\dots$

13.解: 导线框 bc 边进入磁场 (ad 边仍在磁场外) 后, bc 边中的动生电动势与自感电动势

平衡，即：

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv \Rightarrow L \Delta I = Blv \Delta t = Bl \Delta x \Rightarrow LI = Blx ;$$

导线框 bc 边在磁场中受到安培力作用产生加速度 a,  $F = -Bil = ma ;$

$$\text{故有: } ma = -Bl(Blx/L) \Rightarrow a = -[B^2 l^2 / (mL)]x .$$

令  $\omega = Bl / \sqrt{mL}$  , 则有:  $a = -\omega^2 x$  。这式说明 bc 边进入磁场后导线框做简谐运动, 振动周期 T 为:  $T = 2\pi / \omega = \frac{\pi}{20} (s)$  。

借助于振动学中参考圆可知:  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ ;  $v = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$ ;

由初始条件 t=0 时, x=0, v=v<sub>0</sub> 可得:  $\alpha = -\pi/2$ ;  $A = v_0 / \omega = v_0 \sqrt{mL} / (Bl)$ ;

(1)若初速度 v<sub>0</sub>=4m/s, 则 A=0.1m 。在这种情形中, 线框 bc 边可达 s/2 处, 然后返回。当经过 t<sub>1</sub>=T/2 的时间, bc 边回到 x=0 处, 此时速度 v=-v<sub>0</sub>, 从此, 线框沿 x 轴负方向以速度 v 做匀速直线运动, 在  $t = \frac{\pi}{36} s$  时, bc 边的位置 x<sub>1</sub> 为:  $x_1 = v(t - t_1) \approx -0.035 m$  。

(2)若初速度为  $\frac{4v_0}{\sqrt{3}}$ , 则  $A' \approx 0.231 m$  ; 故在此情况下, bc 边的振幅大于 0.2m, 这表

明 bc 边可越过磁场区。设 bc 边达到 x=s=0.2m 处的时间为 t<sub>2</sub>, 则有:

$$s = A' \sin(\omega t_2) \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{120} (s), \text{ 在 } t_2 \text{ 时刻, bc 边的速度 } v_2 \text{ 为: } v_2 = \frac{4v_0}{\sqrt{3}} \cos(\omega t_2) = \frac{2v_0}{\sqrt{3}} .$$

bc 边离开磁场后, 直至 ad 边进入磁场时为止, bc 边将以 v<sub>2</sub> 沿 x 轴正方向做匀速直线运动, 在  $t = \frac{\pi}{36} s$  时, bc 边的位置 x<sub>2</sub> 为:  $x_2 = s + v_2(t - t_2) = 0.483 m$  ; 因 x<sub>2</sub><l, 故

此时线框 ad 边尚未进入磁场区, 因此以上解法正确。

14.解: 带电粒子(以下简称粒子)从 S 点垂直于 DE 边以速度 v 射出后, 在洛伦兹力作用下做匀速圆周运动, 其圆心一定位于 DE 边上, 其半径 R 可由下式

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

求得, 为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

1. 要求此粒子每次与  $\triangle DEF$  的三条边碰撞时都与边垂直, 且能回到 S 点, 则 R 和 v 应满足以下条件:

(i) 与边垂直的条件.

由于碰撞时速度 v 与边垂直, 粒子运动轨迹圆的圆心一定位于  $\triangle$  的边上, 粒子绕过  $\triangle$  顶点 D、E、F 时的圆弧的圆心就一定要在相邻边的交点(即 D、E、F)上. 粒子从 S 点

开始向右作圆周运动，其轨迹为一系列半径为  $R$  的半圆，在  $SE$  边上最后一的碰撞点与  $E$  点的距离应为  $R$ ，所以  $\overline{SE}$  的长度应是  $R$  的奇数倍。粒子从  $FD$  边绕过  $D$  点转回到  $S$  点时，情况类似，即  $\overline{DS}$  的长度也应是轨道半径的奇数倍。取  $\overline{DS} = R_1$ ，则当  $\overline{DS}$  的长度被奇数除所得的  $R$  也满足要求，即

$$R = R_n = \frac{\overline{DS}}{(2n-1)} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

因此为使粒子与  $\Delta$  各边发生垂直碰撞， $R$  必须满足下面的条件

$$R = R_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{L}{4} = \frac{2a}{5(2n-1)} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

此时  $\overline{SE} = 3\overline{DS} = (6n-3)R_n \quad n=1, 2, 3, \dots$

$\overline{SE}$  为  $R_n$  的奇数倍的条件自然满足。只要粒子绕过  $E$  点与  $EF$  边相碰，由对称关系可知，以后的碰撞都能与  $\Delta$  的边垂直。

(ii) 粒子能绕过顶点与  $\Delta$  的边相碰的条件。

由于磁场局限于半径为  $a$  的圆柱范围内，如果粒子在绕  $E$  点运动时圆轨迹与磁场边界相交，它将在相交点处以此时的速度方向沿直线运动而不能返回。所以粒子作圆周运动的半径  $R$  不能太大，由图可见，必须  $R \leq \overline{DM}$  ( $\Delta$  的顶点沿圆柱半径到磁场边界的距离， $R = \overline{DM}$  时，粒子圆运动轨迹与圆柱磁场边界相切)，由给定的数据可算得

$$\overline{DM} = a - \frac{8\sqrt{3}}{15}a \cong 0.076a \quad (3)$$

将  $n=1, 2, 3, \dots$ ，分别代入 (2) 式，得

$$\begin{aligned} n=1, \quad R_1 &= \frac{2a}{5} = 0.400a \\ n=2, \quad R_2 &= \frac{2a}{15} = 0.133a \\ n=3, \quad R_3 &= \frac{2a}{25} = 0.080a \\ n=4, \quad R_4 &= \frac{2a}{35} = 0.057a \end{aligned}$$

由于  $R_1, R_2, R_3 \geq \overline{DM}$ ，这些粒子在绕过  $\Delta$  的顶点  $E$  时，将从磁场边界逸出，只有  $n \geq 4$  的粒子能经多次碰撞绕过  $E, F, D$  点，最终回到  $S$  点。由此结论及 (1)、(2) 两式可得与之相应的速度

$$v_n = \frac{qB}{m} R_n = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2a}{5(2n-1)} \quad n=4, 5, 6, \dots \quad (4)$$

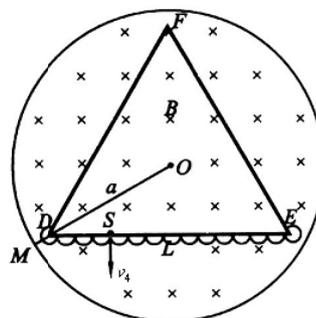
这就是由  $S$  点发出的粒子与  $\Delta$  的三条边垂直碰撞并最终又回到  $S$  点时，其速度大小必须满足的条件。

2. 这些粒子在磁场中做圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

将 (1) 式代入，得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (5)$$



可见在  $B$  及  $q/m$  给定时  $T$  与  $v$  无关。粒子从  $S$  点出发最后回到  $S$  点的过程中，与  $\Delta$  的边碰撞次数愈少，所经历的时间就愈少，所以应取  $n=4$ ，如图所示（图中只画出在边框  $DE$  的碰撞情况），此时粒子的速度为  $v_4$ ，由图可看出该粒子的轨迹包括  $3 \times 13$  个半圆和 3 个圆心角为  $300^\circ$  的圆弧，所需时间为

$$t = 3 \times 13 \times \frac{T}{2} + 3 \times \frac{5}{6} T = 22T \quad (6)$$

以 (5) 式代入得

$$t = 44 \frac{\pi m}{qB} \quad (7)$$