2003年北京市中学生数学竞赛高一年级复赛试题及参考答案

试　题

一、填空题(满分40分)

1. x,y 是正整数,且满足 $xy+x+y=71$, $x^2y+xy^2=880$. 则 $x^2+y^2=$______.

2. 如图1,两圆交于 A、B 两点,S 为两圆外一点,直线 SA 交第一圆于 C,交第二圆于 D;直线 SB 交第一圆于 E,交第二圆于 F. $CE=a$, $DF=b$,四边形 $ABEC$ 的面积与四边形 $ABFD$ 的面积相等,则 $AB=$______.

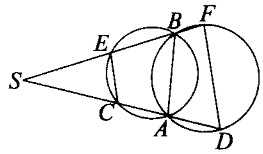


图1

3. 定义在正整数集合上的函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1 & (x\text{ 为奇数})\\ \dfrac{x}{2} & (x\text{ 为偶数}).\end{cases}$ 令 $x_1=12$, $x_{n+1}=f(x_n)$,其中 $n\in Z^+$,则集合 $\{x\mid x=x_n, n\in Z^+\}$ 中的元素共有______个.

4. 已知一个各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 和一个等差数列 $\{a_n\}$,满足 $b_3-b_1=9$, $b_5-b_3=36$, $b_1=a_1$ 且 $b_2=a_3$. 记该等比数列前6项的和为 B_6,该等差数列前12项的和为 A_{12},则 $B_6+A_{12}=$______.

5. $M=\{-2,0,1\}$, $N=\{1,2,3,4,5\}$. 映射 $f:M\to N$,使得对任意 $x\in M$,都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数. 则这样的不同映射共有______个.

二、(满分15分)如果 a,b,c 是正数,求证:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

三、(满分15分)如图2,动点 P 在以 $AB=1$ 为弦,含弓形角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弓形弧(含端点)上. 设 $AP=x$, $BP=y$,试确定 $k=3x+2y$ 的最大值和最小值.

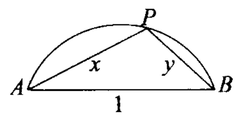


图2

四、(满分15分)已知半径分别为 R,r 的两个圆外切于点 P,点 P 到这两圆的一条外公切线的距离等于 d. 求证:$\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{2}{d}$.

五、(满分15分)设有两两不等的 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则在形如 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$(其中 t_i 取1或-1, $i=1,2,\cdots,n$)的整数中,存在 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数,要么同时为奇数,要么同时为偶数. □

参考答案

一、填空题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	146	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	7	324	45

二、由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,得 $a^2+ab+b^2\geqslant 3ab$,所以

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}&=\frac{a^3+a^2b+ab^2-(a^2b+ab^2)}{a^2+ab+b^2}\\&=a-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\\&\geqslant a-\frac{ab(a+b)}{3ab}\\&=a-\frac{a+b}{3}\qquad①\end{aligned}$$

同法可证 $\quad\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geqslant b-\frac{b+c}{3}\qquad②$

$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant c-\frac{c+a}{3} \qquad ③$$

①、②、③三式相加得

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\geqslant(a+b+c)-\frac{2(a+b+c)}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

三、在$\triangle APB$中，$AB=1$，$\angle APB=\frac{2\pi}{3}$，设$AP=x$，$BP=y$，则由余弦定理可得$x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}=1$，即　$x^2+y^2+xy=1$　①

由$k=3x+2y$知　$y=\frac{k-3x}{2}$　②

将②代入①得$7x^2-4kx+k^2-4=0$.

因为x是正实数，故此方程必有实根，所以$\Delta=4k^2-7(k^2-4)\geqslant 0$.

解得$k^2\leqslant\frac{28}{3}$，进而$k\leqslant\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

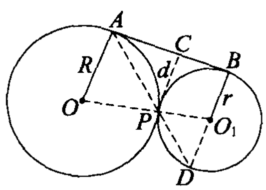
又知　$k=3x+2y=x+2(x+y)$
$\geqslant x+2\geqslant 2$，

所以　$2\leqslant k\leqslant\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

当$x=\frac{4\sqrt{21}}{21}$时，$k=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. 而当P点与A点重合时，$k=2$.

所以$k=3x+2y$的最大值为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$，最小值为2.

四、设半径为R的$\odot O$与半径为r的$\odot O_1$外切于点P，AB是两圆的一条外公切线，$PC\perp AB$于C，连接OP，PO_1，则O,P,O_1共线.



延长BO_1交$\odot O_1$于D，则BD是$\odot O_1$的直径. 连接AP，PD，由于$OA/\!/BD$，所以$\angle AOP=\angle PO_1D$，再由$\triangle AOP$，$\triangle PO_1D$都是等腰三角形，则有$\angle OPA=\angle O_1PD$，所以A,P,D三点共线.

因为$PC/\!/DB$，所以$\frac{AP}{AD}=\frac{PC}{DB}=\frac{d}{2r}$，

又由$\triangle AOP\backsim\triangle DO_1P$，

则有　$\frac{AP}{DP}=\frac{OP}{O_1P}=\frac{R}{r}$，

于是　$\frac{AP}{AP+DP}=\frac{R}{R+r}$，

即　$\frac{AP}{AD}=\frac{R}{R+r}$.

因此　$\frac{R}{R+r}=\frac{d}{2r}$，即　$\frac{R+r}{Rr}=\frac{2}{d}$.

所以　$\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{2}{d}$.

五、将两两不等的n个正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，从小到大排列，不妨设为$a_1<a_2<\cdots<a_n$，则$a=-a_1-a_2-\cdots-a_n$是形如$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$的整数中的最小数.

$a+2a_1=a_1-a_2-a_3-\cdots-a_{n-1}-a_n$也是形如$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$的整数. $a+2a_1+2a_2$也是形如$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$的整数，……，依次类推，则

a（有1个）

$<a+2a_1<a+2a_2<\cdots<a+2a_n$（有$n$个）

$<a+2a_n+2a_1<a+2a_n+2a_2<\cdots<a+2a_n+2a_{n-1}$（有$n-1$个）

$<a+2a_n+2a_{n-1}+2a_1<a+2a_n+2a_{n-1}+2a_2<\cdots<a+2a_n+2a_{n-1}+2a_{n-2}$（有$n-2$个）

$<\cdots<a+2a_n+2a_{n-1}+\cdots+2a_3+2a_1<a+2a_n+2a_{n-1}+\cdots+2a_3+2a_2$（有2个）

$<a+2a_n+2a_{n-1}+\cdots+2a_2+2a_1$（有1个）

$=a+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

上式中的每一个整数都是形如$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$（其中$t_i$取1或$-1$，$i=1,2,\cdots,n$）的整数中的不同的数.

它们共有$1+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n^2+n+2}{2}$个彼此不同的数.

且易见：当a是偶数时，这$\frac{n^2+n+2}{2}$个不同的整数都是偶数；当a是奇数时，这$\frac{n^2+n+2}{2}$个不同的整数都是奇数.　□