2002年北京市中学生数学竞赛复赛高一年级试题及参考答案

2002年5月19日 8:30～10:30

一、填空题(满分40分)

1. n 是正整数,若不超过 n 的正整数中质数的个数与合数的个数相等,这样的 n 称为“怪异数”,则“怪异数”的集合是______.

2. 已知 $0\leqslant x,y<\pi$,且 $\begin{cases}2^{\sin x+\cos y}=1\\(0.25)^{\sin^2 x+\cos^2 y}=0.5\end{cases}$,则 $\sin(x+y)=$______.

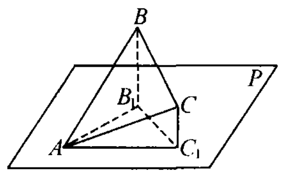
3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,G 是棱 CC_1 的中点,则异面直线 AG 与 BD_1 所成角的余弦值等于______.

4. 已知 $f(x+1)=|x-1|-|x+1|$ 且 $f(f(x))=f(2002)+1$,则 $x=$______.

5. 四面体 $SABC$ 中,面 ABC 为等腰直角三角形,其中 $\angle ABC=90^\circ$,$SC=AB=a$,$SC\perp$ 面 ABC,则棱 SB 与 AC 之间的距离等于______.

二、(满分15分)是否存在函数 $f:R\to R$,使得对所有的 $x\in R$,都有 $f(x^2)-f^2(x)\geqslant\frac{1}{4}$,且对任意的 $x_1\neq x_2$,$f(x_1)\neq f(x_2)$ 总成立?如果存在,试举一例;如果不存在,请说明理由.

三、(满分15分)如右图,$\triangle ABC$ 在平面 P 上的射影是正 $\triangle AB_1C_1$. 已知 $AB=\sqrt{14}$,$AC=3$,$\cos\angle BAC=\frac{17\sqrt{14}}{84}$,请你计算异面直线 AB 与 CC_1 所成角的正切值.



四、(满分15分)已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$ 都是实数,在集合

$$\left\{a_1,\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\cdots,\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}}{100}\right\}$$

中至少有51个元素的数值相等,求证:$a_1,,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$ 中有两个数相等.

五、(满分15分)在平面上放置着 n 条线段,其中任两条都不平行也不共线,它们的长度之和等于1.请你证明:在这平面上存在这样的直线 l,使得这 n 条线段在 l 上射影长的和小于 $\frac{2}{\pi}$.

参考答案

一、填空题

题号	1	2	3	4	5
答案	$\{1,9,11,13\}$	$\frac{1}{2}$ 或 -1	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$

二、不存在这样的函数 $f:R\to R$,理由如下:

如果存在这样的函数 $f:R\to R$,则对任意的实数 x,都有 $f(x^2)-f^2(x)\geqslant\frac{1}{4}$,那么,当 $x=0$ 时,有 $f^2(0)-2\times f(0)\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2\leqslant 0$,所以 $\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]^2\leqslant 0$,但 $\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]^2\geqslant 0$,所以 $\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]^2=0$,也就是 $f(0)=\frac{1}{2}$ ①

同理,当 $x=1$ 时,有 $f(1)=\frac{1}{2}$ ②

①、②的结果与“对任意的 $x_1\neq x_2$,$f(x_1)\neq f(x_2)$ 总成立”的条件矛盾.因此,满足题设条件的函数 $f:R\to R$ 不存在.

三、因为 $BB_1/\!/CC_1$,所以,$\angle ABB_1$ 即是异面直线 AB 与 CC_1 所成角,因此,只须计算 $\angle ABB_1$ 的正切值.

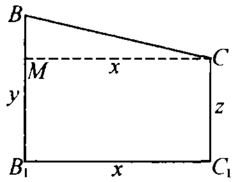


图1

已知 $AB=\sqrt{14}$,

$AC=3$,$\cos\angle BAC=\frac{17\sqrt{14}}{84}$,由余弦定理得

$$BC^2=14+9-2\sqrt{14}\times 3\times\frac{17\sqrt{14}}{84}=6,$$

$\therefore\ BC=\sqrt{6}$.

如图1,过C作$CM\perp BB_1$于M,设$B_1C_1=x$,$BB_1=y$,$CC_1=z$,则

$AC_1=AB=B_1C_1=MC=x$,$BM=y-z$.

在Rt△ABB_1中,有$x^2+y^2=14$　①

在Rt△ACC_1中,有$x^2+z^2=9$　②

在Rt△BCM中,有$x^2+(y-z)^2=6$　③

由①、②得$y^2-z^2=5$　④

将③展开得$x^2+y^2-2yz+z^2=6$　⑤

以①代入⑤得$2yz-z^2=8\Rightarrow y=\frac{8+z^2}{2z}$　⑥

以⑥代入⑤整理得$3z^4+4z^2-64=0$.

注意到z为正数,解得$z=2$,进一步求得

$$y=3,\quad x=\sqrt{5}.$$

因为$BB_1/\!/CC_1$,所以,$\angle ABB_1$即是异面直线AB与CC_1所成的角,

$$\tan\angle ABB_1=\frac{AB_1}{BB_1}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

所以异面直线AB与CC_1所成角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$.

四、令$b_i=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i}$,$i=1,2,3,\cdots,100$,已知其中至少有51个元素的数值相等,设这个数值为p.

易知,若$b_i=b_{i+1}=p$,则$a_{i+1}=p$.　(＊)

事实上,$b_i=b_{i+1}$,即$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1}$,化简得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i+a_{i+1}=(i+1)a_{i+1},$$

即　$$a_{i+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1}=p.$$

当$b_1=p$时,则$a_1=p$.将$b_1,b_2,\cdots,b_{99},b_{100}$分成如下50组:

$$\{b_1,b_2\},\{b_3,b_4\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$$

因为在$b_i(i=1,2,3,\cdots,100)$这100个元素中至少有51个的数值相等,根据抽屉原则,必有一组的两个数相等.设$b_{2k+1}=b_{2k+2}=p$,由(＊),则$a_{2k+2}=p$.

于是$a_1=a_{2k+2}$.

当$b_1\neq p$时,则将$b_2,\cdots,b_{99},b_{100}$这99个元素分成如下50组:

$$\{b_2,b_3\},\{b_4,b_5\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$$

因为在$b_i(i=2,3,\cdots,100)$这99个元素中至少有51个的数值相等,根据抽屉原则,必有一组的两个数相等.设$b_{2m}=b_{2m+1}=p$,由(＊),则$a_{2m+1}=p$.

再将$b_2,\cdots,b_{99},b_{100}$这99个元素分成如下50组:

$$\{b_2\},\{b_3,b_4\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$$

因为在$b_i(i=2,3,\cdots,100)$这99个元素中至少有51个的数值相等,根据抽屉原则,必有一组的两个数相等.设$b_{2n+1}=b_{2n+2}=p$,由(＊),则$a_{2n+2}=p$.

于是$a_{2m+1}=a_{2n+2}$.

综上所述,$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$中必有两个数相等.

五、已知n条线段记作A_1B_1,A_2B_2,$\cdots$,A_nB_n,在平面上任取一点M,将这n条线段平移,使各线段的中点都过点M.

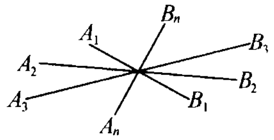


图2

再任取平面上的点P,作$PP_1\underline{\underline{/\!/}}MA_1$,$P_1P_2\underline{\underline{/\!/}}MA_2$,$\cdots$,$P_{n-1}P_n\underline{\underline{/\!/}}MA_n$,$P_nQ_1\underline{\underline{/\!/}}MB_1$,$\cdots$,$Q_{n-1}P\underline{\underline{/\!/}}MB_n$,这样,得到一个凸$2n$边形Γ.Γ的对边平行且相等,是个中心对称图形,设Γ的对称中心为O.

选择Γ的n组平行且相等的对边中距离最小的一组,不失一般性,设这组对边就是P_1P_2和Q_1Q_2,其距离为d.以O为圆心,d为直径的圆,这个圆含于Γ的内部,与P_1P_2和Q_1Q_2分别切于点S和点T,易知:$\pi d<$Γ的周长$=1$,即$d<\frac{1}{\pi}$.

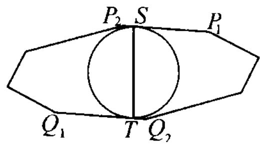


图3

注意到,多边形Γ的各边在直线ST上的射影长的和等于已知的n条线段在ST上的射影长的和,等于$2d$,所以$2d<\frac{2}{\pi}$.

令直线ST为直线l,这表明,在这平面上存在这样的直线l,使得这n条线段在l上射影长的和小于$\frac{2}{\pi}$.　□