数学竞赛中的指数和对数函数问题

赵小云

(杭州师院数学教育研究所,浙江　杭州　310036)

函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$ 叫做指数函数,定义域是 R.

函数 $f(x)=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 叫做对数函数,定义域是 R^+,指数函数与对数函数互为反函数,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

指数函数和对数函数是两个重要的基本初等函数,也是中学代数的重点内容,熟练掌握指数和对数的有关概念、运算法则和性质,并能灵活地进行指数和对数运算是解决有关指数和对数函数问题的基础.

1　化简与求值

例 1　已知 $\log_6 27=a$,试求 $\log_{18}16$ 之值.

分析:由于所求对数与已知的对数底数不同,为此可考虑应用换底公式.

由二个对数式的特征,我们将所求对数式及已知条件中对数的底数都换成 2,得

$$\log_{18}16=\frac{\log_2 16}{\log_2 18}=\frac{4}{1+2\log_2 3} \qquad (1)$$

$$\log_6 27=\frac{\log_2 27}{\log_2 6}=\frac{3\log_2 3}{1+\log_2 3}=a,$$

于是　$a(1+\log_2 3)=3\log_2 3$,解之得

$\log_2 3=\frac{a}{3-a}$,

将之代入(1)得 $\log_{18}16=\frac{4}{1+\frac{2a}{3-a}}=\frac{4(3-a)}{3+a}$.

例 2　已知 $a>0, a\neq 1$,试化简

$$\log_a\sqrt{3a+2\sqrt{2a^2}}+\log_a\sqrt{(3-\sqrt{8})a}.$$

解　由于 $\log_a\sqrt{3a+2\sqrt{2a^2}}$

$=\log_a\sqrt{a}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$=\log_a\sqrt{a}+\log_a\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2}+\log_a(1+\sqrt{2})$,

而　$\log_a\sqrt{(3-\sqrt{8})a}$

$=\log_a\sqrt{a}+\log_a\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2}+\log_a(\sqrt{2}-1)$,

所以,有

$$\log_a\sqrt{3a+2\sqrt{2a^2}}+\log_a\sqrt{(3-\sqrt{8})a}$$

$=\frac{1}{2}+\log_a(1+\sqrt{2})+\frac{1}{2}+\log_a(\sqrt{2}-1)$

$=1+\log_a(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$.

$=1+\log_a 1=1+0=1$

例 3　对于正整数 $a,b,c(a\leq b\leq c)$ 和实数 x,y,z,ω,若 $a^x=b^y=c^z=70^\omega$,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{\omega}$. 试求 $a^{\log_b(c-a)}$ 之值.

解　由 $a^x=b^y=c^z=70^\omega$,可得

$a^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{x}}, b^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{y}}, c^{\frac{1}{\omega}}=70^{\frac{1}{z}}$,

将上述各式相乘,得

$(abc)^{\frac{1}{\omega}}=70^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$.

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{\omega}$,故 $abc=70$.

注意到 x,y,z,ω 均为不等于零的实数,故

$$a^x=b^y=c^z=70^\omega\neq 1,$$

从而 a,b,c 均不为 1,即有 $1<a\leq b\leq c$.

再注意到　$70=2\times 5\times 7$,

于是依题设,有且仅有　$a=2, b=5, c$

$=7$.

$\therefore a^{\log_b(c-a)}=2^{\log_5 5}=2$.

紧扣指数和对数的定义、性质,往往成为解决有关指数和对数化简和求值问题的关键.

思考题 1 (1998 年全国高中数学联赛试题) 若 $a>1, b>1$, 且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$, 则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值 ( )

(A) 等于 lg2.

(B) 等于 1.

(C) 等于 0.

(D) 不是与 a, b 无关的常数.

思考题 2 (1986 年全国高中数学联赛试题) 设 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, 那么和式 $f\left(\dfrac{1}{1001}\right)+f\left(\dfrac{2}{1001}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1000}{1001}\right)$ 的值等于______.

2 图形和性质

例 4 已知 $a>1, m>p>0$, 且方程 $x+\log_a x=m$ 的解为 p, 试解方程 $x+a^x=m$.

分析: 方程 $x+\log_a x=m$ 可变形为

$$\log_a x=m-x \qquad (1)$$

而方程 $x+a^x=m$ 可变形为

$$a^x=m-x \qquad (2)$$

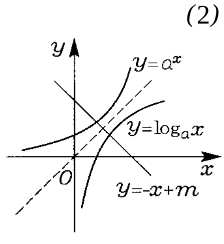

图 1 例 4 解答图

如图 1, 注意到方程(1)的解是函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=m-x$ 图象交点的横坐标, 方程(2)的解则是函数 $y=a^x$ 与函数 $y=m-x$ 图象交点的横坐标, 而函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=a^x$ 互为反函数, 必然有后一个交点的横坐标恰为前一个交点的纵坐标, 从而由 p 是方程(1)的解可知 $m-p$ 为方程(2)的解.

这里, 我们充分利用了函数图象的性质, 数形结合, 十分巧妙地解决了问题.

例 5 已知函数 $f(x)=\log_b(x+\sqrt{x^2-2})$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ (其中 $b>0, b\neq 1$).

1) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 并指出 $f^{-1}(x)$ 的定义域;

2) 设 $P(n)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_b\sqrt{2})$. 若 $P(n)<\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, 试求 b 的取值范围.

分析: 求 $f^{-1}(x)$ 的定义域可通过求 $f(x)$ 的值域得出.

解 1) 由 $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2}>0\\ x^2-2\geq 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{x^2-2}>-x\\ |x|\geq\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow x\geq\sqrt{2}$.

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $x\geq\sqrt{2}$.

易知, $u(x)=x+\sqrt{x^2-2}$ $(x\geq\sqrt{2})$ 为单调递增函数, 所以

$$u(x)\geq u(\sqrt{2})=\sqrt{2}.$$

故当 $b>1$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\log_b\sqrt{2}, +\infty)$; 当 $0<b<1$ 时, $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, \log_b\sqrt{2}]$.

即当 $b>1$ 时, $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[\log_b\sqrt{2}, +\infty)$; 当 $0<b<1$ 时, $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty, \log_b\sqrt{2}]$.

令 $y=\log_b(x+\sqrt{x^2-2})$,

则 $b^y=x+\sqrt{x^2-2}$,

$\therefore b^y-x=\sqrt{x^2-2}$.

上式两边平方, 整理得

$$(b^y)^2-2xb^y+2=0.$$

于是 $x=\dfrac{1}{2}(b^y+2b^{-y})$.

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(b^x+2b^{-x})$

2) $$P(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_b\sqrt{2})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(b^{n+\log_b\sqrt{2}}+2b^{-n-\log_b\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(b^n+b^{-n}).$$

由 $P(n) < \frac{3^n+3^{-n}}{2}$ 得 $\frac{1}{2}(b^n+b^{-n}) < \frac{1}{2}(3^n+3^{-n})$,

即 $(b^n-3^n)+(b^{-n}-3^{-n})<0$,

从而 $\frac{1}{3^n b^n}(3^n-b^n)[1-(3b)^n]<0$,

故 $\begin{cases}3^n-b^n>0\\1-(3b)^n<0\end{cases}$ (1)

或 $\begin{cases}3^n-b^n<0\\1-(3b)^n>0\end{cases}$ (2)

解(1)得 $\frac{1}{3}<b<3$ 且 $b\neq 1$, (2)则无解.

$\therefore$ b 的取值范围是 $(\frac{1}{3},1)\cup(1,3)$.

思考题3 设 a, b 分别是方程 $\log_2 x + x - 3 = 0$ 和 $2^x + x - 3 = 0$ 的根,求 $a+b$ 的值.

思考题4 已知 $f(x^2-3)=\log_a\frac{x^2}{6-x^2}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$,并且 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,若 $f^{-1}(x)<0$ 的解为 $x>0$,试求 a 的取值范围.

3. 方程和不等式

例6 设 x, y, z 为非负实数,且满足方程

$$4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times 2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0.$$

试求 $x+y+z$ 的最大值与最小值的乘积.

分析:观察方程的特征,我们不妨令 $u=2^{5x+9y+4z}$,则原方程变形为 $u^2-68u+256=0$,解之可得 $u_1=4$, $u_2=64$.

①若 $u=2^{\sqrt{5x+9y+4z}}=4$,则 $5x+9y+4z=4$.

注意到 $4(x+y+z)\leq 5x+9y+4z\leq 9(x+y+z)$,

故有 $x+y+z\leq 1$(当 $x=y=0$, $z=1$ 时取等号);

$x+y+z\geq\frac{4}{9}$(当 $x=z=0$, $y=\frac{4}{9}$ 时取等号).

此时 $x+y+z$ 的最小值是 $\frac{4}{9}$,最大值是1.

②若 $u=2^{\sqrt{5x+9y+4z}}=64$,则 $5x+9y+4z=36$.

同理,我们有 $x+y+z$ 的最小值为4,最大值为9.

综合①,②知, $x+y+z$ 的最小值为 $\frac{4}{9}$,最大值为9,故它们的乘积为4.

例7 (2001年全国高中数学联赛试题)不等式 $\left|\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2\right|>\frac{3}{2}$ 的解集为________.

解 $\left|\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2\right|>\frac{3}{2}$,等价于

$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2>\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2<-\frac{3}{2}$,

即 $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}>-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}<-\frac{7}{2}$.

此时 $\log_{\frac{1}{2}}x<-2$ 或 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$ 或 $-\frac{2}{7}<\log_{\frac{1}{2}}x<0$,

$\therefore$ $x>4$ 或 $0<x<1$ 或 $1<x<2^{\frac{2}{7}}$.

即解集为 $(0,1)\cup(1,2^{\frac{2}{7}})\cup(4,+\infty)$.

思考题5 (1995年全国高中数学联赛试题)用 $[x]$ 表示不大于实数 x 的最大整数,方程 $\lg^2 x-[\lg x]-2=0$ 的实根的个数是________.

思考题6 (1996年全国高中数学联赛试题)集合 $\{x \mid -1\leq\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}, x\in\mathbf{N}_+\}$ 的真子集的个数是________.

思考题答案和提示

1. (C). **2.** 500. **3.** 3.
4. $0<a<1$. **5.** 3. **6.** $2^{90}-1$.

(收稿日期:2002-09-29)