

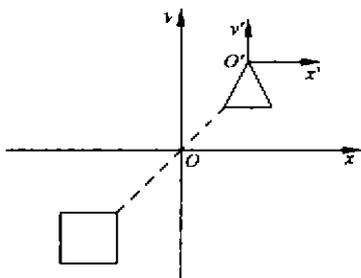
全国部分地区非物理类专业大学生物理竞赛题解

第十七届非物理类专业大学生物理竞赛试题及解答

终全部停止运动的过程中,系统的动能、动量和相对圆环中心的角动量中不守恒的量为_____。

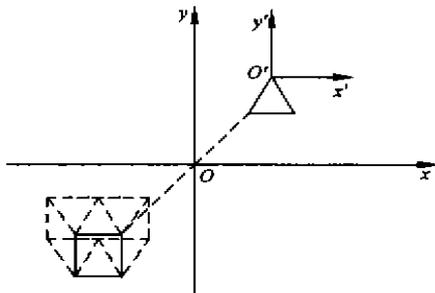
一、填空题(共 10 小题,每小题 5 分)

1. 在 Oxy 坐标平面上有一个正三角形和一个正方形,正三角形的每条边长和正方形的每条边长相同,它们的方位如图所示. 现在建立一个活动的 $O'-x'y'$ 坐标平面,它的坐标原点开始时位于正三角形的上顶点,而后 O' 点沿着正三角形的三条边绕行一周,绕行时 x' 轴始终与 x 轴平行, y' 轴始终与 y 轴平行. 试在图中清楚、准确地画出正方形相对 $O'-x'y'$ 坐标平面运动而形成的区域的边界线.

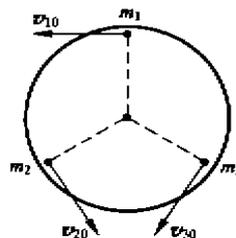


解:

当坐标平面 $O'-x'y'$ 沿正三角形的三边运动时,正方形便沿相反的方向相对于坐标平面 $O'-x'y'$ 运动,故正方形相对于 $O'-x'y'$ 坐标平面运动而形成的区域的边界线,应如下图所示.

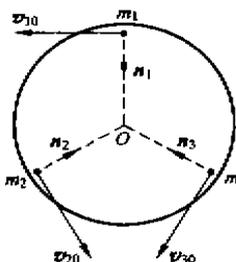


2. 在光滑水平面上有一内壁光滑的固定圆环,三个质量分别为 m_1, m_2, m_3 的小球沿着环的内壁作圆周运动,初始时刻各球的位置和运动方向如图所示,各自速度大小分别为 v_{10}, v_{20}, v_{30} . 而后,小球间发生的碰撞为非弹性碰撞,那么三个小球最终都会停止运动的条件是_____. 从初始状态到最



解:

在三个小球沿圆环内壁运动的过程中,三个小球都要受到内壁的正压力,但因这三个正压力 n_1, n_2, n_3 对圆环中心 O 的力矩都为零,故三个小球这个系统对圆环中心 O 的角动量守恒;因这三个正压力的矢量和不为零,故三个小球这个系统的动量不守恒;因是非弹性碰撞,故三个小球这个系统的动能不守恒.



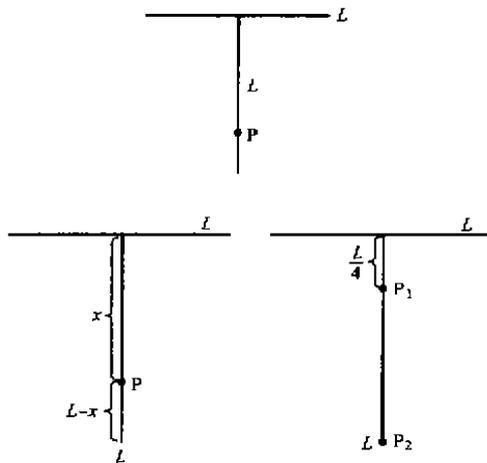
由三个小球最终都会停止运动知,三个小球这个系统对圆环中心 O 的角动量必恒为零. 因 m_1 的角动量垂直纸面朝外,其大小为 $Rm_1 v_{10}$; m_2 的角动量也垂直纸面朝外,其大小为 $Rm_2 v_{20}$; m_3 的角动量垂直纸面朝里,其大小为 $Rm_3 v_{30}$; 故有

$$0 = R(m_1 v_{10} + m_2 v_{20} - m_3 v_{30})$$

$$\therefore m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_3 v_{30}$$

此即三个小球最终都会停止运动的条件.

3. 用两根相同的匀质细杆对称地连接成图示的 T 字形尺,过 T 字形尺上的某一点 P 取垂直于 T 字形尺所在平面的转轴,将 T 字形尺相对该轴的转动惯量记为 $I(P)$. 已知每一根细杆的长度为 L ,试在图中准确标出 P 点的位置 P_1 ,使得 $I(P_1)$ 为所有 $I(P)$ 中的最小者. 再在图中准确标出 P 点的位置 P_2 ,使得 $I(P_2)$ 为所有 $I(P)$ 中的最大者.



解:

令均匀细杆的线密度为 λ , 则

$$\begin{aligned}
 I(P) &= \left(\frac{m_L}{12} L^2 + m_L x^2 \right) + \frac{m_L}{3} x^2 + \frac{m_L}{3} (L-x)^2 \\
 &= \left(\frac{\lambda}{12} L^3 + \lambda L x^2 \right) + \frac{\lambda}{3} x^3 + \frac{\lambda}{3} (L-x)^3 \\
 \therefore \frac{dI(P)}{dx} &= 2\lambda L x + \lambda x^2 - \lambda (L-x)^2 \\
 &= 2\lambda L x - \lambda L^2 + 2\lambda L x \\
 &= \lambda L (4x - L)
 \end{aligned}$$

令上式为零得

$$x = \frac{L}{4}$$

此为 $I(P)$ 的极小值的位置, 即 P_1 点的位置.

$I(P)$ 无极大值, 但由平行轴定理知, P_2 点必在竖杆的下端.

4. 一个弹簧振子的质量为 1.0kg , 自由振动的本征频率为 2Hz , 当存在某个大小与振子速率成正比的阻尼力时, 恰好处于临界阻尼振动状态, 则弹簧的劲度系数 $K = \underline{\hspace{2cm}}$ N/m , 阻尼力大小与速率的比例系数 $\gamma = \underline{\hspace{2cm}}$ kg/s .

解:

已知 $m = 1.0\text{kg}$, $\nu_0 = 2\text{Hz}$, 临界阻尼振动的条件为 $\beta = \omega_0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \omega_0^2 &= \frac{K}{m} \\
 \therefore K &= m\omega_0^2 = m(2\pi\nu_0)^2 = 1.0 \times (2\pi \times 2)^2 \\
 &= 16\pi^2 = 158(\text{N/m}) \\
 \therefore \frac{\gamma}{m} &= 2\beta = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \\
 \therefore \gamma &= 2\sqrt{Km} = 2\sqrt{16\pi^2 \times 1.0} = 8\pi = 25.1(\text{kg/s})
 \end{aligned}$$

5. 均匀物质静止时的体积为 V_0 , 密度为 ρ_0 , 当它以匀速度 v 运动时, 体积为 $V = \underline{\hspace{2cm}}$, 密度

为 $\rho = \underline{\hspace{2cm}}$.

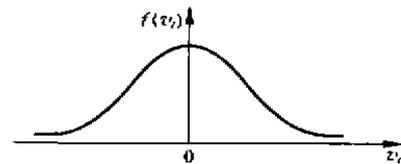
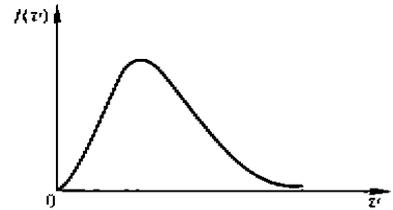
解:

由运动杆长收缩的公式知

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 \therefore m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{V_0 \rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 \therefore \rho &= \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}
 \end{aligned}$$

6. 处于平衡态的气体系统中, 分子运动的速率分布律可图示为 , 速度分布律可图示为 . 已知 0°C 温度下氮气分子的方均根速率大约为 493m/s , 则该温度下氧气分子的方均根速率为 , 25°C 下氧气分子的方均根速率为 , 一摩尔氧气的定体热容量为 .

解:



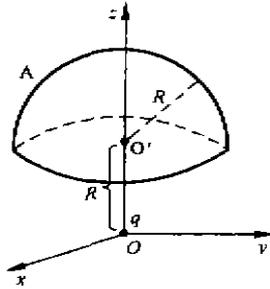
$$\begin{aligned}
 \therefore \sqrt{v^2}(\text{N}_2) &= \sqrt{\frac{3RT_0}{\mu(\text{N}_2)}} \\
 \sqrt{v^2}(\text{O}_2) &= \sqrt{\frac{3RT_0}{\mu(\text{O}_2)}} \\
 \therefore \frac{\sqrt{v^2}(\text{O}_2)}{\sqrt{v^2}(\text{N}_2)} &= \sqrt{\frac{\mu(\text{N}_2)}{\mu(\text{O}_2)}} \\
 \therefore \sqrt{v^2}(\text{O}_2) &= \sqrt{\frac{\mu(\text{N}_2)}{\mu(\text{O}_2)}} \sqrt{v^2}(\text{N}_2) \\
 &= \sqrt{\frac{28}{32}} \times 493 = 461(\text{m/s}) \\
 \therefore \sqrt{v^{*2}}(\text{O}_2) &= \sqrt{\frac{3RT_0}{\mu(\text{O}_2)}} \\
 \therefore \frac{\sqrt{v^{*2}}(\text{O}_2)}{\sqrt{v^2}(\text{O}_2)} &= \sqrt{\frac{T}{T_0}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{v_{*}^2(O_2)} &= \sqrt{\frac{T}{T_u}} \sqrt{v^2(O_2)} \\ &= \sqrt{\frac{273+25}{273}} \times 461 = 482(\text{m/s}) \end{aligned}$$

将氧气分子视为刚性的双原子分子,则其定容摩尔热容量为

$$C_v = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \times 8.31 = 20.78(\text{J}/(\text{K} \cdot \text{mol}))$$

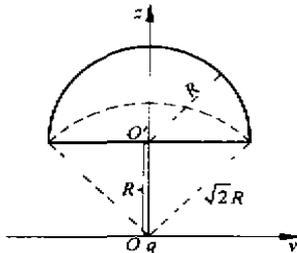
7. 如图所示,半径为 R 的半球面 A 的球心 O' 位于 Oz 轴上距 O 点 R 处,半球面横截面与 Oxy 面平行,坐标原点 O 处有一电量为 q 的点电荷,则半球面 A 的电通量 $\Phi_e =$ _____.



解:

以 $\sqrt{2}R$ 为半径作一球面,它被半径为 R 的半球面截下一球帽,球帽的高度为 $(\sqrt{2}R - R)$,球帽的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\sqrt{2}R(\sqrt{2}R - R) \\ &= 2\pi(2 - \sqrt{2})R^2 \end{aligned}$$



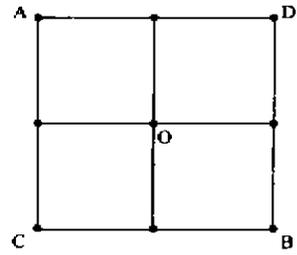
球帽对点电荷 q 张的立体角为

$$\Omega = \frac{S}{(\sqrt{2}R)^2} = \pi(2 - \sqrt{2})$$

已知点电荷 q 在 4π 立体角内的电通量为 $\frac{q}{\epsilon_0}$,故在球帽上的电通量为

$$\Phi_e(\text{球帽}) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{q}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2})$$

8. 如图电路,每两点间实线所示短导线的电阻为 1Ω ,则 A、B 两端点间的电阻为 _____.

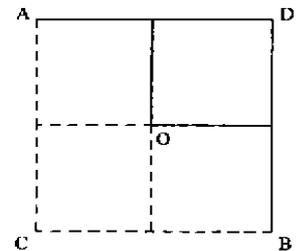


解:

已知短导线的电阻为 $r=1\Omega$.

可将本题的电路等效为图示的实线电路和虚线电路的并联,二支路各自的电阻相同,为

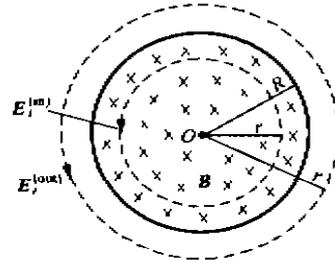
$$R = r + \frac{1}{\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}} + r = 3r$$



A、B 两端点之间的总电阻为

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{R}{2} = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2}(\Omega)$$

9. 一无限长密绕螺线管的半径为 R ,单位长度内的匝数为 n ,通以随时间变化的电流 $i=i(t)$,且 $\frac{di}{dt} = C$ (常量),则管内的感生电场强度 $E_i^{\text{in}} =$ _____,管外的感生电场强度 $E_i^{\text{out}} =$ _____.



解:

$$\text{已知 } B = \mu_0 n i, \frac{dB}{dt} = \mu_0 n \frac{di}{dt} = \mu_0 n C.$$

对管内的闭合电力线这个环路有

$$\oint_{(L)} E_i^{\text{in}} \cdot dl = - \iint_{(S)} \frac{dB}{dt} \cdot dS$$

$$\therefore 2\pi r E_{1r}^{in} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n C$$

$$\therefore E_{1r}^{in} = \frac{\mu_0 n C}{2} r$$

对管外的闭合电力线这个环路有

$$\oint_{(L)} E_{1r}^{out} \cdot dl = - \iint_{(S)} \frac{dB}{dt} \cdot dS$$

$$\therefore 2\pi r E_{1r}^{out} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \pi R^2 \mu_0 n C$$

$$\therefore E_{1r}^{out} = \frac{\mu_0 n C R^2}{2r}$$

10. 假定人眼睛的分辨本领主要受瞳孔衍射效应的限制,设瞳孔直径为2.0mm,光的波长为550nm,则20m远处人眼能分辨的最小线距离为_____。

解:

已知 $D=2.0\text{mm}, \lambda=550\text{nm}=550 \times 10^{-9}\text{mm}, L=20\text{m}=2 \times 10^4\text{mm}$.

最小分辨角为 $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{2.0} = 3.355 \times 10^{-4}$ (弧度).

最小分辨距离为 $l = \theta L = 3.355 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^4 = 6.71(\text{mm})$.

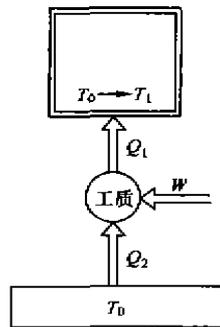
二、计算及证明题(共5题,55分)

11. (10分) 设有一刚性容器内装有温度为 T_0 的1摩尔氮气,在此气体和温度也为 T_0 的热源之间工作一个制冷机,它从热源吸收热量 Q_2 ,向容器中的气体放出热量 Q_1 . 经一段时间后,容器中氮气的温度升至 T_1 . 试证明该过程中制冷机必须消耗的功 $W \geq \frac{5}{2} RT_0 \left[\ln \frac{T_0}{T_1} + \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right]$.

解:

依题意,所讨论系统中制冷机的工作原理可示意为下图形式,则该过程中制冷机必须消耗的功为

$$W = Q_1 - Q_2 \quad (1)$$



因为氮气所处容器是刚性的,则其由 $T_0 \rightarrow T_1$ 的过程为等体过程,于是有

$$Q_1 = C_V^m (T_1 - T_0)$$

其中 C_V^m 为氮气的定体摩尔热容量. 由能均分定理知

$$C_V^m = \frac{5}{2} R$$

则

$$Q_1 = \frac{5}{2} R (T_1 - T_0) \quad (2)$$

又由题意知,该过程中热源、氮气和制冷机的工作物质的熵变分别为

$$\Delta S_{\text{热源}} = - \frac{Q_2}{T_0} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{氮气}} &= \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_V^m dT}{T} \\ &= C_V^m \ln \frac{T_1}{T_0} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_1}{T_0} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Delta S_{\text{制冷机}} = 0 \quad (5)$$

因为热源、氮气和制冷机组成的整体为一封闭孤立系统,则由熵增加原理知

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{热源}} + \Delta S_{\text{氮气}} + \Delta S_{\text{制冷机}} \\ = - \frac{Q_2}{T_0} + \frac{5}{2} R \ln \frac{T_1}{T_0} \geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

所以

$$Q_2 \leq \frac{5}{2} RT_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \quad (7)$$

那么

$$\begin{aligned} W &= Q_1 - Q_2 \\ &\geq \frac{5}{2} R (T_1 - T_0) - \frac{5}{2} RT_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \end{aligned}$$

整理化简即得

$$W \geq \frac{5}{2} RT_0 \left[\ln \frac{T_0}{T_1} + \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

故该过程中制冷机必须消耗的功为 $W \geq \frac{5}{2} RT_0 \left[\ln \frac{T_0}{T_1} + \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right]$

[原命题得证]

评分标准: 列出(1)式得1分; 给出(2)式再得1分; 列出(3)、(4)、(5)式再得3分; 列出(6)式再得2分; 得到(7)式再得1分; 解得(8)式再得2分;

12. (10分) 半径为 R 无限长半圆柱导体上均匀地流过电流 I , 求半圆柱轴线(原圆柱体的中心轴线)处的磁感应强度 B .

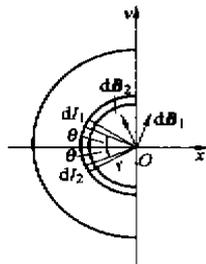
解:

依题意可知,该半圆柱导体中的电流密度为 $j =$

$\frac{I}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2I}{\pi R^2}$. 在半径为 r 处取厚度为 dr 的薄层(如

图示),在其中圆心角为 $d\theta$ 的窄条中流过的电流为

$$dI = j \cdot rd\theta \cdot dr = \frac{2I}{\pi R^2} r dr d\theta \quad (1)$$



在垂直于原圆柱体的中心轴的平面(即半圆柱体的横截面)内建立坐标系如图所示,则由毕奥-萨伐尔定律

知,关于 x 轴对称的小窄条电流 dI_1, dI_2 激发的磁场在半圆柱体中心轴上的磁感应强度分别为 dB_1, dB_2 . 由对称性知,相同大小的 dI_1, dI_2 分别激发的 dB_1, dB_2 的矢量和沿 Oy 方向,并且 dB_1, dB_2 的大小为

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dI_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2I}{\pi R^2} r dr d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2} dr d\theta \quad (2)$$

所以所求的磁感应强度 B 为

$$B = B_y = 2 \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2} \cos\theta dr d\theta \quad (3)$$

$$= 2 \int_0^R \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2} dr = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 R} \quad (4)$$

评分标准: 得到(1)式得 2 分; 给出(2)式再得 2 分; (1)式和(2)式之间关于 dB 方向的分析得 2 分; 得到(3)式得 3 分; 得到(4)式的结果再得 1 分. (未完待续)

(上接第 58 页)

$$\frac{\left[\int_a^b x\rho(x) dx \right]^2}{m^2} \leq \frac{\int_a^b x^2 \rho(x) dx}{m}$$

两边开方,得

$$\frac{\int_a^b x\rho(x) dx}{m} \leq \sqrt{\frac{\int_a^b x^2 \rho(x) dx}{m}} \leq l_R$$

将上式同(1)、(2)两式比较,得知式子左边为 l_C , 右边小于等于 l_R , 故

$$l_C \leq l_R \quad (5)$$

根据柯西不等式并考虑到实际物理模型, (5)式中等号成立的条件为

$$\sqrt{\rho(x)} = x\sqrt{\rho(x)} \text{ 或 } \sqrt{\rho(x)} = \sqrt{m\delta(x-x_0)}$$

即

$$x \equiv 1 \text{ 或 } \rho(x) = m\delta(x-x_0)$$

显然 $x \equiv 1$ 是没有意义的, 因此将其舍去. 而 $\rho(x) = m\delta(x-x_0)$ 即意味着刚体的质量全部集中在距转轴的距离为 x_0 处, 且平行于转轴的一个平面上, 取此条件和(2)式中等式成立条件的公共部分, 可知(5)式中等号成立的条件为刚体的质量全部集中在平行于转轴的一

条直线上.

最后来比较 l_R 和 l_C 的大小. 由(3)式得

$$l_C = \frac{I_0}{ml_C} = \left(\sqrt{\frac{I_0}{m}} \right)^2 \frac{1}{l_C}$$

将(2)式代入上式, 得

$$l_C = l_R^2 \frac{1}{l_C} = l_R \left(\frac{l_R}{l_C} \right)$$

根据(5)式, $\frac{l_R}{l_C} \geq 1$, 将此代入上式, 得

$$l_C \geq l_R \quad (6)$$

将(5)式与(6)式综合起来, 有

$$l_C \geq l_R \geq l_C \quad (7)$$

由以上的讨论可以看出, 不论刚体的形状如何, 也不论刚体的密度如何分布, (7)式总是成立的, 而且仅当刚体的质量全部集中在平行于转轴的一条直线上时, (7)式中的等号才成立.

参 考 文 献

- [1] 赵凯华, 罗荫茵. 新概念物理教程——力学. 北京: 高等教育出版社, 1995.