考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

**************密**************封**************线**************

考生类别____________

第 25 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　2008.12.14

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td>一</td><td colspan="4">二</td></tr>
<tr><td>1 ~ 12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>分数</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td colspan="3">三</td><td colspan="2" rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>分数</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

答题说明：前 16 题是必做题，满分是 100 分；文管组和农林医组只做必做题；非物理 B 组限做 17 题，满分 110 分；非物理 A 组限做 17、18 题，满分 120 分；物理组限做 17、19 题，满分 120 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一、填空题（必做，共 12 题，每题 2 空，每空 2 分，共 48 分）

1. 沿x轴运动的质点，速度$v = \alpha x$，$\alpha > 0$。$t = 0$ 时刻，质点位于$x_0 > 0$ 处，而后的运动过程中，质点加速度与所到位置x之间的函数关系为a =____________，加速度与时刻t之间的函数关系为a =____________。

2. 质量可忽略的圆台形薄壁容器内，盛满均匀液体。容器按图 1 所示方式平放在水平地面上时，因液体重力而使容器底面所受压强记为P_1，地面给容器底板向上的支持力记为N_1；容器按图 2 所示方式放置时，相应的力学参数记为P_2、N_2。那么，必定有P_1________P_2，N_1________N_2。（分别选填“小于”、“等于”或“大于”。）

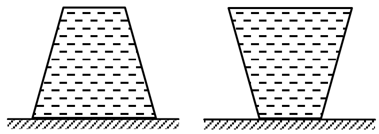
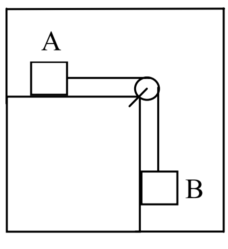


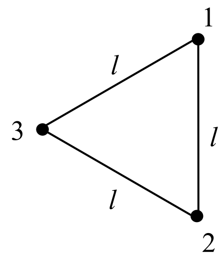
图 1　　图 2

3. 在一车厢内，有图示的水平桌面、质量分别为m_A和m_B的物块A和B、轻绳和质量可忽略的滑轮装置。（1）设系统处处无摩擦，车厢具有竖直向上的匀加速度a_0，则物块B相对车厢竖直向下的加速度a =_____________。（2）设B与水平桌子侧面间的摩擦因

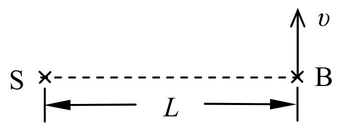


数$\mu \geq m_A / m_B$，系统其余部位均无摩擦，今使车厢具有水平朝右的匀加速度a_0，则a_0取值范围为____________时，能使物块B相对车厢不动。

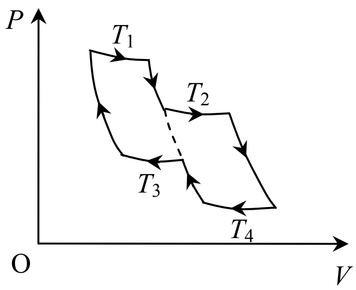
4. 三个质量同为m，电量同为$q>0$的小球 1、2、3，用长度同为l的轻绝缘线连成等边三角形后，静放在光滑水平面上，如图所示。将球 1、2 间的轻线剪断，三个小球开始运动。球 3 在运动过程中，相对其初始位置位移的最大值$l_{max}=$__________，运动的最大速度值$v_{max}=$__________。



5. 振动频率为ν_0的声波波源S静止于水平地面某处，骑车者B与S相距L。$t=0$开始，B沿着垂直于此时B、S连线方向以水平匀速度v运动，如图所示。已知声波在空气中的传播速度$u>v$，则而后t时刻B的接收频率$\nu(t)=$__________，从$t=0$到t时刻期间，B接收到的振动次数$N(t)=$__________。



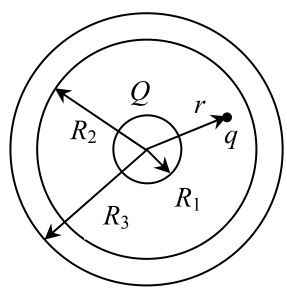
6. 四个恒温热源的温度之间关系为$T_1=\alpha T_2=\alpha^2 T_3=\alpha^3 T_4$，其中常数$\alpha>1$。工作于其中两个任选热源之间的可逆卡诺热机的循环效率最大可取值$\eta_{max}=$__________。由这四个热源共同参与的某个可逆循环如图所示，图中每一条实线或为T_1、T_2、T_3、T_4等温线，或为绝热线，中间两条实线与其间辅助虚线同属一条绝热线。此循环过程效率$\eta=$__________。



7. 热力学第二定律的开尔文表述为：____；

热力学第二定律的克劳修斯表述为：____。

8. 如图所示，带电量为Q，半径为R_1的导体球外，同心地放置一个内半径为R_2、外半径为R_3本不带电的导体球壳，两者间有一个电量为q、与球心相距r（$R_2>r>R_1$）的固定点电荷。静电平衡后，导体球电势$U_{球}=$__________，导体球壳电势$U_{壳}=$__________。



9. 图 1 所示的电阻丝网络，每一小段电阻同为r，两个端点A、B间等效电阻$R_1=$____________。若在图 1 网络中再引入 3 段斜电阻丝，每一段电阻也为r，如图 2 所示，此时A、B间等效电阻$R_2=$____________。

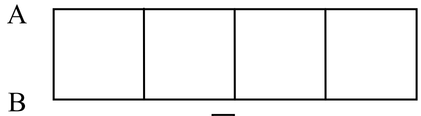


图 1

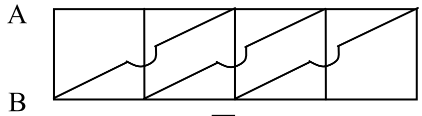
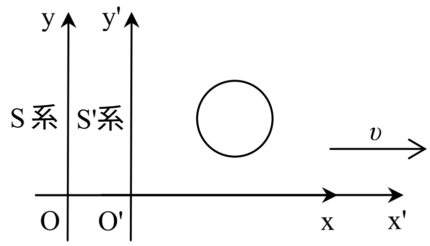


图 2

10. 对于波长为λ的线偏振光，用主折射率为n_o和n_e的负晶体制成的四分之一波片，其最小厚度为$d_0=$___________。将其厚度增加一倍，波长为λ的线偏振光通过这一新波片后将成为______偏振光。(填："线"、"圆"或"椭圆"。)

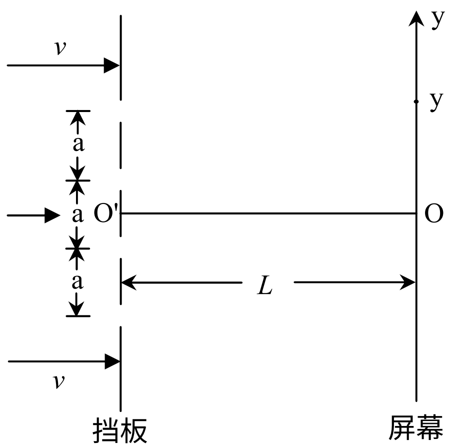
11. 核潜艇中U^{238}核的半衰期为 4.5×10^9年，衰变中有 0.7%的概率成为U^{234}核，同时放出一个高能光子，这些光子中的 93%被潜艇钢板吸收。1981 年，前苏联编号U137 的核潜艇透射到艇外的高能光子被距核源（处理为点状）1.5m处的探测仪测得。仪器正入射面积为 $22cm^2$，效率为 0.25%（每 400 个入射光子可产生一个脉冲讯号），每小时测得 125 个讯号。据上所述，可知U^{238}核的平均寿命$\tau=$___________年（ln2=0.693），该核潜艇中U^{238}的质量$m=$__________kg（给出 2 位数字）。

12. 惯性系S、S' 间的相对运动关系如图所示，相对速度大小为υ。一块匀质平板开始时静止地放在S' 系的x'y' 平面上，S' 系测得其质量面密度（单位面积质量）为σ_0，S系测得其质量面密度便为$\sigma_1=$____________σ_0。若平板相对S' 系沿x' 轴正方向以匀速度υ运动，S系测得其质量面密度则为$\sigma_2=$____________σ_0。



二、计算题（必做，共 4 题，每题 13 分，共 52 分）

13. **（13 分）**频率为ν的单色平行光正入射到挡板上，挡板上有四个相同的小圆孔以相同的间距a排列在一直线上。挡板前方相距$L>>d$处有一平行放置的屏幕，挡板中心O'与屏幕中心O的位置如图所示，屏幕上过O点放置的y坐标轴与四孔连线平行。



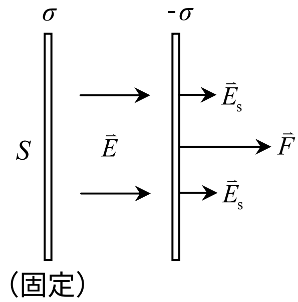
（1）写出（不必推导）两个相邻小圆孔出射光到图中 y 坐标点的光程差 δ；

（2）求出两个相邻小圆孔出射光到y轴上距O点最近暗点处的光程差δ_1；

（3）算出y轴上中央亮纹的线宽Δl_0；

（4）若小圆孔的直径为$d<$a，人站在屏幕位置观看这些小圆孔，试问a至少取何值时，人眼方能分辨出是四个小圆孔？

14. **（13 分）** 面积为S的平行板电容器，正、负极板上电荷面密度分别为σ、$-\sigma$，板间场强大小$E=\sigma/\varepsilon_0$，负极板上电场强度大小为$E_S=\sigma/2\varepsilon_0$。



（1）固定正极板，用图示方向外力$F=\sigma S\cdot E_S$作用于负极板，使其缓慢外移Δl距离，试求该力作功量A。

（2）A为外界通过力$\vec{F}$作功方式输入的能量，可以理解这一能量全部转化为平行板电容器内新建场区（体积为$S\cdot\Delta l$，场强大小也为$E=\sigma/\varepsilon_0$的匀场强区）的电场能量。假设匀强场区中场能密度（单位体积内的电场能量）ω_e为常量，试导出$\omega_e\sim E$关系式，关系式中不出现S、σ、E_S、F、Δl等量。

（3）假设（2）问所得$\omega_e\sim E$关系式适用于任何真空中的电场，试求电量为Q、半径为R的均匀带电球面在球面上的电场强度大小E_R。

15. **（13 分）** 长 L 的均匀软绳静止对称地挂在光滑固定的细钉上，如图 1 所示。后因扰动，软绳朝右侧滑下，某时刻左侧绳段长度记为 x，如图 2 所示。

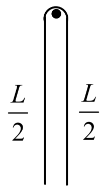


图 1

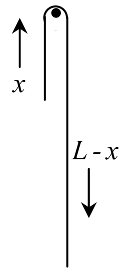


图 2

（1）x（$x<L/2$）达何值时，细钉为软绳提供的向上支持力N恰好为零？

（2）N 恰好为零时，突然将细钉撤去，再经过多长时间 t，软绳恰好处于伸直状态？

16. **（13 分）**在两端绝热封顶，半径$R_2 = 7.5\text{cm}$的长容器筒内，同轴地固定着半径$R_1 = 5\ \text{cm}$的长铀棒，两者之间夹着一层空气。铀因裂变在单位时间、单位体积内产生的热量为$\rho_Q = 5.5\times10^3\ \text{W/(m}^3\cdot\text{s)}$，热导率为$K_u = 46\text{W/(m·K)}$，空气的热导率为$K_A = 8.61\times10^{-3}\ \text{W/(m·K)}$。设整个装置与周围环境间已处于热平衡状态，筒壁与环境温度同为T_2=300K。

（1）计算单位时间内、单位长度铀棒因裂变产生的热量 Q；

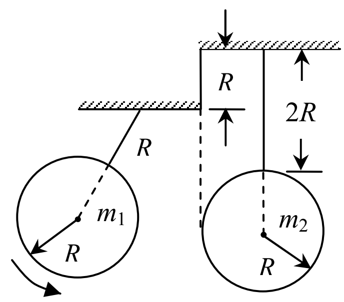
（2）计算铀棒外表面温度T_1；($\ln1.5 = 0.405$)

（3）计算铀棒中央轴处温度T_0；

（4）计算筒内R_1处空气密度ρ_1与R_2处空气密度ρ_2间的比值γ。

三．计算题（每题 10 分。文管组和农林医组不做；非物理 B 组限做第 17 题；非物理 A 组限做第 17、18 题；物理组限做第 17、19 题）

17. **（10 分，文管组和农林医组不做，其他组必做）**

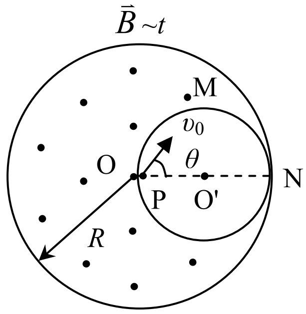


半径同为R，质量分别为$m_1 = m$和$m_2 = \frac{3}{2}m$的两个匀质圆盘，边缘部位分别用长R和 $2R$的轻杆固定地连接后，挂在高度差为R的两块天花板下，可以无摩擦地左右摆动。开始时两个摆盘静止在图示位置，质量为m_1的摆盘自由释放后，将以ω_0角速度与质量为m_2的静止摆盘发生弹性碰撞。试求碰后瞬间，两个摆盘的右向摆动角速度ω_1和ω_2（均带正负号）。

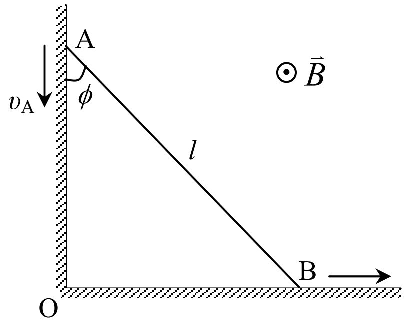
考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

********密********封********线********

18. **（10 分，非物理 A 组必做，其他组不做）**如图所示，半径 R 的圆柱形大区域内，划出一个半径为 $R/2$ 且与大区域边界相切的小圆柱形区域，在余下的区域内有变化的匀强磁场，磁感应强度 $\vec{B}$ 平行于圆柱的中央轴，且垂直于图平面朝外， $\vec{B}$ 随 t 的变化率 $K=\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 是正的常量。图中 O、O'分别为大、小圆的圆心，N为两圆切点。一个质量为m、电量$q>0$的粒子P，从O点进入小圆区域，初速大小为v_0，方向角θ如图所示。为使P能相切地经上半圆OMN中的某一点，而后又从N点离开小圆区域，试问v_0、θ各取何值？



19. **（10 分，物理组必做，其他组不做）** 长l、电阻R的匀质金属细杆，其A端约束在竖直光滑金属导轨上运动，B端约束在水平光滑金属导轨上运动，导轨电阻可忽略。设空间有图示方向的水平匀强磁场$\vec{B}$，开始时细杆方位角$\phi=0$，从静止状态自由释放后，方位角达到ϕ时，A端朝下速度大小记为v_A。



（1）试求细杆内从A端到B端的电动势ε_{AB}；

（2）导出安培力提供的负功率大小的计算式，进而验证此负功率大小恰好等于细杆电阻消耗的电功率大小；

（3）计算$\phi=45^\circ$时，细杆旋转角加速度β（本问答案中不可出现v_A）。

一.

1. $\underline{\alpha^2 x}$ ；$\underline{\alpha^2 x_0 \mathrm{e}^{\alpha t}}$

2. <u>等于</u> ；<u>等于</u>

3. $\underline{\dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left(g+\mathrm{a}_0\right)}$ ；$\underline{\mathrm{a}_0 \geq \dfrac{m_{\mathrm{B}}g}{\mu m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{A}}}}$

4. $\underline{\dfrac{4}{3}l}$ ；$\underline{\dfrac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ml}}}$

5. $\underline{(1-\dfrac{\upsilon}{u}\dfrac{\upsilon t}{\sqrt{L^2+\upsilon^2 t^2}})v_0}$ ；$\underline{(t-\dfrac{\sqrt{L^2+\upsilon^2 t^2}-L}{u})v_0}$

6. $\underline{1-\dfrac{1}{\alpha^3}}$ ；$\underline{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}$

7. <u>不可能从单一热源吸取热量，使之完全变化有用的功而不产生其它影响</u>；<u>不可能把热量从低温物体转移到高温物体，而不产生其它影响</u>

8. $\underline{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{Q}{R_1}+\dfrac{q}{r}-\dfrac{Q+q}{R_2}+\dfrac{Q+q}{R_3})}$ ；$\underline{\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}}$

9. $\underline{\dfrac{153}{209}r}$ ；$\underline{\dfrac{2}{3}r}$

10. $\underline{\dfrac{\lambda}{4(n_{\mathrm{o}}-n_{\mathrm{e}})}}$ ；<u>线</u>

11. $\underline{6.49\times10^9}$ ；$\underline{30}$

12. $\underline{(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2})^{-1}}$ ；$\underline{\dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^2}}$

二．13.

(1) $\delta = \mathrm{a}\sin\theta \approx \mathrm{a}\dfrac{y}{L}$ (3分)

(2) 第1、3小圆孔出射光相消处，也是第2、4小圆孔出射光相消处，
即为y轴上距O点最近暗点，故应有

$$2\delta_1 = \frac{\lambda}{2}$$

即 $$\delta_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4v} \qquad (3分)$$

(3) 第(2) 小问暗点坐标y_1(取正) 满足下述关系式：

$$\mathrm{a}\frac{y_1}{L} = \delta_1 = \frac{c}{4v}$$

得 $$y_1 = \frac{cL}{4\mathrm{a}v} \qquad (3分)$$

故中央亮纹线宽为

$$\Delta l_0 = 2y_1 = \frac{cL}{2\mathrm{a}v}$$

(4) 圆孔衍射爱里斑半角宽为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{d} = 1.22\frac{c}{vd}$$

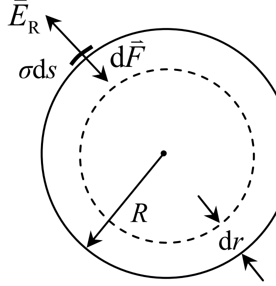
故可分辨四个小孔的最小a值应为

$$\mathrm{a}_{\min} = l\cdot\Delta\theta = 1.22\frac{cL}{vd} \qquad (4分)$$

二．14.

(1) $A = F\Delta l = \sigma E_S S\Delta l$, 或$A = \frac{1}{2}\sigma ES\Delta l$, 或$A = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\Delta l$

或$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot S\Delta l$ (3分)



14 题解图

(2) $\omega_e = \frac{A}{S\Delta l} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (2分)

(3) 用外力缓慢朝里推移球面电荷，参考题解图，有

$$dF = (\sigma ds)E_R\,, \sigma = Q/S,\ S = 4\pi R^2$$

设位移量为dr,则作功

$$dA = \iint_s dF dr = \iint_s \sigma E_R ds \cdot dr$$
$$= \sigma E_R s dr = QE_R dr \qquad (4分)$$

外界输入能量即为dA，全部转化为新建场区($dV = 4\pi R^2 dr$，$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$) 场能，

即有 $QE_R dr = dA = \omega_e dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 4\pi R^2 dr = \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

得 $E_R = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$ (4分)

二．15.

(1) 软绳质量记为M，参考题解图1，由能量守恒得

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2=\frac{\frac{L}{2}-x}{L}Mg(\frac{L}{2}-x)$$

$$\Rightarrow \upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x)$$

此时软绳向下动量为

$$P=\frac{(L-x)-x}{L}M\upsilon=\frac{M}{2L}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x)^2 \qquad (3分)$$

由质点系动量定理,(注意$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\upsilon$)得

$$N=Mg-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=Mg-\frac{2Mg}{L^2}(L-2x)^2$$

N恰好为零时，对应的x便为

$$x=x_0=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})L \qquad (3分)$$

(2) $x=x_0$时，有

$$\upsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{L}}(L-2x_0)=\frac{1}{2}\sqrt{gL} \qquad (1分)$$

取初速方向竖直向下，大小为υ的自由落体参考系S，S系中软绳右侧绳段初速为零，左侧绳段竖直向上初速为

$$\upsilon_0=2\upsilon=\sqrt{gL}$$

初态如题解图2所示。

解法1：动量法

S系中左侧绳段无论剩余多少，向上速度υ_0不变，右侧绳段增长ζ时，向上速度记为υ_ζ，过程态如题解图3所示，有

$$\left[\frac{(L-x_0)+\zeta}{L}M\right]\upsilon_\zeta=(\frac{\zeta}{L}M)\upsilon_0\Rightarrow \upsilon_\zeta=\frac{\zeta}{L-x_0+\zeta}\upsilon_0$$

得左、右速度差为

$$\upsilon_0-\upsilon_\zeta=\frac{L-x_0}{L-x_0+\zeta}\upsilon_0 \qquad (3分)$$

$\mathrm{d}t$ 时间内左侧向右侧输运绳段

$$\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2}(\upsilon_0-\upsilon_\zeta)\,\mathrm{d}t=\frac{L-x_0}{2(L-x_0+\zeta)}\upsilon_0\mathrm{d}t$$

得积分式：

$$\int_0^t\upsilon_0\mathrm{d}t=\int_0^{x_0}\frac{2(L-x_0+\zeta)}{L-x_0}\mathrm{d}\zeta=2x_0+\frac{x_0^2}{L-x_0}=x_0\frac{2L-x_0}{L-x_0}$$

解得 $$t=\frac{2L-x_0}{L-x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0}=\frac{14-9\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad(3分)$$

<u>解法2：质心法</u>

参见题解图2，初态软绳质心C在B端下方，可以算得间距

$$\overline{\mathrm{CB}}=\frac{L^2-4Lx_0+2x_0^2}{2L}$$

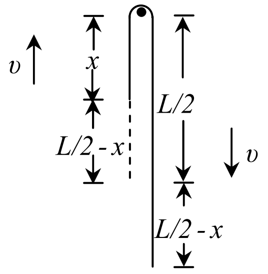
S系中此时B端上行速度为υ_0，质心C上行速度可算得为

$$\upsilon_{\mathrm{C}}=\frac{x_0}{L}\upsilon_0\qquad(3分)$$

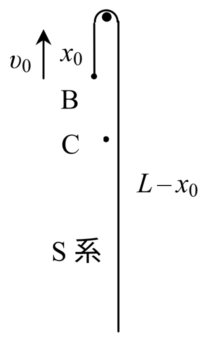
此后B、C在S系中一直作匀速直线运动，经时间t，两者间距增为

$$\overline{\mathrm{CB}}^*=\frac{L}{2}$$

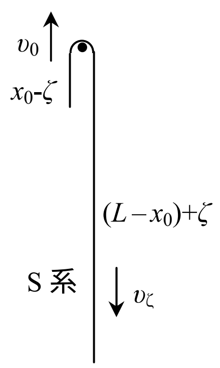
即得 $$t=\frac{(\overline{\mathrm{CB}}^*-\overline{\mathrm{CB}})}{\upsilon_0-\upsilon_{\mathrm{C}}}=\frac{2L-x_0}{L-x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0}=\frac{14-9\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}\qquad(3分)$$



15 题解图 1



15 题解图 2



15 题解图 3

二．16.

(1) $Q=\rho_{\mathrm{Q}}\cdot\pi R_1^2=5.5\times10^3\times\pi\times(0.05)^2=43.2\mathrm{J}$ (1分)

(2) 热平衡时，通过半径为r的单位长度空气柱面向外输送热量为Q，有

$$-K_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\cdot2\pi r=Q$$

$$\Rightarrow -\int_{T_0}^{T_1}\mathrm{d}T=\frac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

得 $T_1=T_2+\dfrac{Q}{2\pi K_{\mathrm{A}}}\ln\dfrac{R_2}{R_1}=300+\dfrac{43.2}{2\pi\times8.61\times10^{-3}}\ln\dfrac{7.5}{5}=624\mathrm{K}$ (3分)

(3) 取$r<R_1$的单位长度铀柱面，热平衡时有

$$\rho_{\mathrm{Q}}\pi r^2=-K_{\mathrm{u}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\cdot2\pi r$$

$$\Rightarrow -\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T=\frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{2K_{\mathrm{u}}}\int_0^{R_1}r\mathrm{d}r=\frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{4K_{\mathrm{u}}}R_1^2$$

得 $T_0=T_1+\dfrac{\rho_{\mathrm{Q}}R_1^2}{4K_{\mathrm{u}}}=624+\dfrac{5.5\times10^{-3}}{4\times46}\times(0.05)^2=624.07\mathrm{K}$

$$\Rightarrow T_0\approx T_1=624\mathrm{K}$$ (3分)

(4) 空气层各处压强P相同，由

$P=nkT$, n:分子数密度

得 $n(r)T(r)=$常量$\Rightarrow\rho(r)T(r)=$常量

因此 $\gamma=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{T_1}{T_2}=0.481$ (3分)

三．17.

(1) 参考题解图，碰撞过程中悬挂点O_1提供的水平右向力记为N_1(平均值)，两摆盘间水平碰撞力大小记为N(平均值)，碰撞时间记为Δt。

摆1的动量方程：

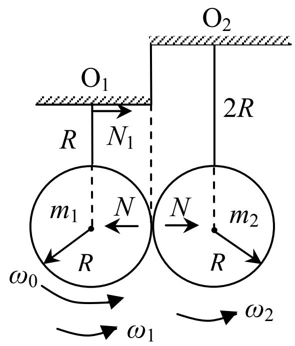
$$N_1\Delta t - N\Delta t = m_1\omega_1\cdot 2R - m_1\omega_0\cdot 2R = 2mR(\omega_1-\omega_0) \qquad (2分)$$

角动量方程(以O_2为参考点)：

摆1：$N_1\Delta t\cdot R - N\Delta t\cdot 3R = (3Rm_1\omega_1\cdot 2R + I_{C1}\omega_1) - (3Rm_1\omega_0\cdot 2R + I_{C1}\omega_0)$ (2分)

摆2：$N\Delta t\cdot 3R = I_2\omega_2$ (1分)

$$I_{C1}=\frac{1}{2}m_1R^2,\quad I_2=\frac{1}{2}m_2R^2+m_2\cdot(3R)^2$$



17 题解图

可简化为 $N_1\Delta t\cdot R - 3N\Delta t\cdot R = \frac{13}{2}m_1R^2(\omega_1-\omega_0)$

$$3N\Delta t\cdot R = \frac{57}{4}mR^2\omega_2$$

能量方程： $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}I_1\omega_0^2$ (2分)

$$I_1=\frac{1}{2}m_1R^2+m_1\cdot(2R)^2$$

上述四个动力学方程，含四个未知量：$N_1\Delta t/m$、$N\Delta t/m$、ω_1和ω_2，可解得

$$\omega_1=-\frac{11}{65}\omega_0,\quad \omega_2=-\frac{36}{65}\omega_0 \qquad (3分)$$

三．18.

同步变化的圆柱形匀强磁场区域如题解图1所示，圆内$\vec{r}$处感应电场$\vec{E}$可表述为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

本题所给磁场区域，可处理为全R圆柱形$\vec{B}$磁场区域与$r=R/2$小圆柱形$(-\vec{B})$磁场区域的叠合。小圆孔区域中任意点A处的感应电场场强便为

$$\vec{E}_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_1\times\vec{k}+\frac{1}{2}(-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t})\vec{r}_2\times\vec{k}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_0\times\vec{k}=\vec{E}_{\mathrm{O'}} \qquad (4分)$$

结论：如题解图2所示，$r=R/2$小圆孔区域内为匀强磁场区。将小圆孔匀强磁场区放大如题解图3所示，P作类斜抛运动，有

$$\mathrm{a}=\frac{qE}{m}，E=\frac{R}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}KR \qquad (2分)$$

水平”射程：$R=\upsilon_0^2\sin 2\theta/\mathrm{a}$ (1分)

射高：$\frac{R}{2}=\upsilon_0^2\sin^2\theta/2\mathrm{a}$ (1分)

得：

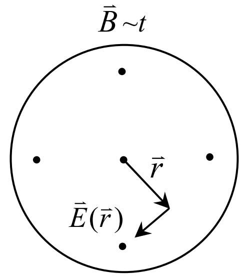
θ：$\sin2\theta=\sin^2\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta\Rightarrow\tan\theta=2$

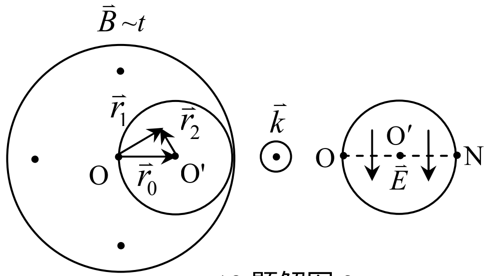
$\Rightarrow\theta=\arctan 2(=63.4°)$ (1分)

υ_0：$\upsilon_0^2=\mathrm{a}R/\sin^2\theta,\ \sin\theta=2/\sqrt{5}$

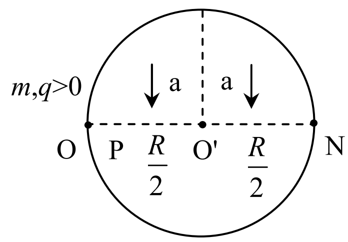
$\Rightarrow\upsilon_0=\frac{\sqrt{5}}{4}R\sqrt{\frac{Kq}{m}}$ (1分)



18 题解图 1



18 题解图 2



18 题解图 3

三．19.

(1) 取ABOA回路，垂直图平面向里的磁通量

$$\Phi=-B\cdot\frac{1}{2}(l\cos\phi)\ (l\sin\phi)=-\frac{1}{4}Bl^2\sin 2\phi$$

即有 $\varepsilon_{\mathrm{ABOA}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}Bl^2\cos 2\phi\cdot\omega$，$\omega=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

由刚体平面平行运动知识，可以导得

$$\upsilon_{\mathrm{A}}=(l\sin\phi)\omega\Rightarrow\omega=\frac{\upsilon_{\mathrm{A}}}{l\sin\phi}$$

即有 $\varepsilon_{\mathrm{AB}}=\varepsilon_{\mathrm{ABOA}}=\frac{1}{2}Bl\upsilon_{\mathrm{A}}\cos 2\phi\Big/\sin\phi$ (1.5分)

(2) A到B的电流 $I_{\mathrm{AB}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{AB}}}{R}=\frac{Bl}{2R}\upsilon_{\mathrm{A}}\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$

AB杆所受安培力$\vec{F}$，其正方向的方向矢量$\vec{e}$如题解图所示，有

$$\vec{F}=F\vec{e},\ F=I_{\mathrm{AB}}Bl=\frac{B^2l^2}{2R}\upsilon_{\mathrm{A}}\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$$

$$F_{\mathrm{x}}=-F\cos\phi,\ F_{\mathrm{y}}=-F\sin\phi$$

AB杆中$\mathrm{d}\vec{l}$段所受安培力为

$$\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}F\cdot\vec{e}=I_{\mathrm{AB}}B\mathrm{d}l\cdot\vec{e}$$

$\mathrm{d}\vec{l}$段的速度记为$\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$，则$\mathrm{d}\vec{F}$提供的功率为

$$\mathrm{d}P=\mathrm{d}\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}=I_{\mathrm{AB}}B\mathrm{d}l\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$$

引入质量线密度常量λ，$\mathrm{d}l$段质量$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$，则有

$$\mathrm{d}P=\frac{1}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot(\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l})$$

安培力$\vec{F}$为AB杆提供的总功率为

$$P_{\mathrm{F}}=\int_l\mathrm{d}P=\frac{1}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\int_0^l\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}$$

因 $\int_0^l\mathrm{d}m\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{d}l}=m\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}$ $\quad\begin{cases}m=\lambda l:\text{细杆质量}\\ \vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}:\text{细杆质心速度}\end{cases}$

便得 $P_{\mathrm{F}}=\frac{m}{\lambda}I_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=lI_{\mathrm{AB}}B\vec{e}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}$

即安培力提供的功率等效于安培力全部作用于质心C处，为质心运动提供的功率。

因 $\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=\upsilon_{\mathrm{cx}}\vec{i}+\upsilon_{\mathrm{cy}}\vec{j}$ $\quad\begin{cases}\upsilon_{\mathrm{cx}}=\frac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\\ \upsilon_{\mathrm{cy}}=-\frac{1}{2}\upsilon_{\mathrm{A}}\ \ (\text{注意}\,\upsilon_{\mathrm{A}}>0)\end{cases}$

得 $$P_F = F_x \upsilon_{cx} + F_y \upsilon_{cy} = -\frac{1}{2} F\upsilon_A \left(\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} - \sin\phi\right) = -\frac{1}{2} F\upsilon_A \frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow -P_F = \frac{B^2 l^2}{4R}\upsilon_A^2 \frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi} \qquad (6分)$$

又，细杆电阻消耗的电功率为

$$P_I = I_{AB}^2 R = \frac{B^2 l^2}{4R}\upsilon_A^2 \frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi} \qquad (0.5分)$$

即 $$-P_F = P_I$$

(3) ϕ角位置时，细杆动能

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \omega^2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2$$

$t \to t + \mathrm{d}t$时间间隔对应$\phi \to \phi + \mathrm{d}\phi$，有

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{3} m l^2 \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{3} m l^2 \beta \mathrm{d}\phi$$

重力势能减少量

$$-\mathrm{d}E_P = \mathrm{d}\left[mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)\right] = mg\frac{l}{2}\sin\phi \mathrm{d}\phi$$

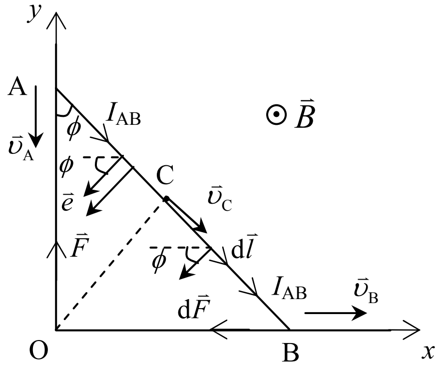
电阻上消耗能量

$$\mathrm{d}W_I = P_I \mathrm{d}t，\ \phi = 45° 时 P_I = 0$$

由功能关系 $\mathrm{d}E_k = -\mathrm{d}E_P - \mathrm{d}W_I$

$\phi = 45°$时，得 $\mathrm{d}E_k = -\mathrm{d}E_P \Rightarrow \frac{1}{3} m l^2 \beta \mathrm{d}\phi = mg\frac{l}{2}\sin\phi \mathrm{d}\phi$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3g}{2l}\sin\phi = \frac{3\sqrt{2}}{4l} g \qquad (2分)$$



19 题解图