



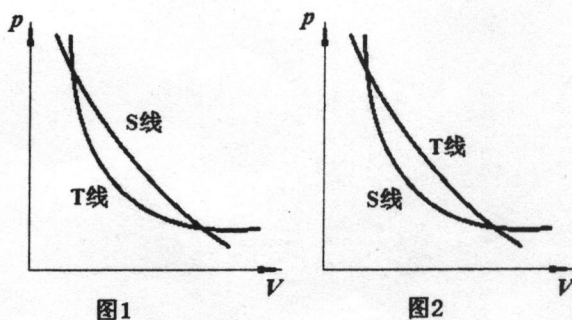
3. 多普勒效应示意图见右，波源 S 的振动频率为  $\nu_0$ ，S 朝着接收者 B 的运动速度为  $\nu_s$ 。机械波在介质中的传播速度为  $u$ ，B 朝着 S 运动的速度为

$\nu_B$ 。则当  $u > \nu_s > 0, \nu_B = 0$  时，B 的接收频率  $\nu_1 =$  \_\_\_\_\_；当  $\nu_s = 0, \nu_B > 0$  时，B 的接收频率  $\nu_2 =$  \_\_\_\_\_。



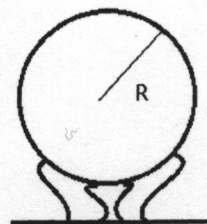
4. 已知  $40^\circ\text{C}$  和  $0^\circ\text{C}$  的饱和水蒸气压强分别为  $55\text{mmHg}$  和  $5\text{mmHg}$ 。处于  $40^\circ\text{C}$  的某高温作业区大气相对湿度为 75%（即其中水气分压强等于饱和水蒸气压强的 0.75 倍），压强为  $760\text{mmHg}$ 。在一试管中充满此种大气后封口，再将其温度降至  $0^\circ\text{C}$ ，此时试管内 \_\_\_\_\_（填写“会”或“不会”）出现小水珠，试管内气体压强为 \_\_\_\_\_  $\text{mmHg}$ 。

5. 将系统的等温线简称为 T 线，绝热线简称为 S 线。图 1、2 中 T 线与 S 线都有两个交点，这两幅图中违反热力学第一定律的是 \_\_\_\_\_（填“图 1”或“图 2”或“图 1 和图 2”），违反热力学第二定律的是 \_\_\_\_\_（同上）。



6. 真空中一正点电荷  $q$  处于一立方体内中心处，则通过该立方体表面的总电通量为 \_\_\_\_\_；通过该立方体的上表面的电通量为 \_\_\_\_\_。

7. 已知空气的击穿场强为  $E_0$ ，则置于空气中的半径为  $R$  的球形高压起电器（可看作图示导体球壳置于绝缘底座上）最高电压为 \_\_\_\_\_；若此高压起电器置于真空中，导体球壳上所带电量有无上限（回答有、无、不确定），并说明原因 \_\_\_\_\_

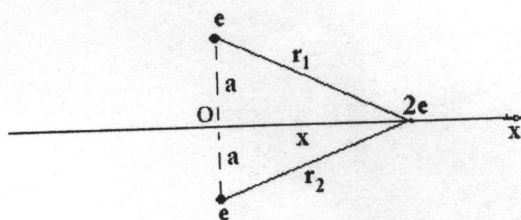






二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

11. (15分) 如图所示，水平面上两个带有电量  $+e$  的点电荷，距离为  $2a$ ，有一  $\alpha$  粒子（所带电量为  $+2e$ ），很快地从这两个点电荷中间穿过，其路径恰好在两点电荷连线的中垂线上。如果  $\alpha$  粒子的速度很快，以致于两点电荷在  $\alpha$  粒子穿过时仍保持静止，试求



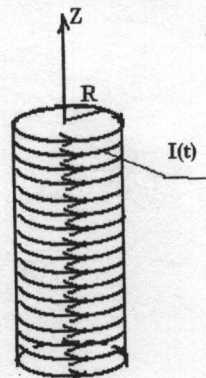
- 1) 当  $\alpha$  粒子处在位置  $x$  处时，两点电荷构成的体系与  $\alpha$  粒子之间的相互作用能；
- 2)  $\alpha$  粒子在哪些位置时受作用力最大。





13. (15分) 等离子体是部分或完全电离的气体, 即由大量自由电子和正离子及中性原子、分子组成, 所含正负电荷数处处相等, 宏观上近似电中性。电离了的正离子和自由电子的数密度相等, 但离子质量  $m_{\text{离子}} \gg$  电子质量  $m_e$ 。图示的半径为  $R$  的载流长直螺线管, 单位长度绕有  $N$  匝线圈。若在螺线管内沿轴向放置一个半径为  $R_0$  的圆柱形长直玻璃管, 半径  $R_0$  略小于  $R$  (可视为  $R_0 \approx R$ ), 管内充满等离子体气体, 电子和离子数密度均为  $n_0$ , 令  $t=0$  时刻, 螺线管接通电流  $I(t) = kt$  ( $k$  为正常数, 电流方向如图所示)。

- 1) 求通电以后某  $t > 0$  时刻管内的磁感应强度的大小和方向以及管内外涡旋电场的大小和方向;
- 2) 上述玻璃管内产生涡旋电场后, 求出  $t$  时刻等离子体中距中心轴  $r$  处的感应电流密度及其方向;
- 3) 忽略感应电流所产生的轴向磁场, 说明正离子和自由电子在螺线管产生的磁场中受到的洛伦兹力的方向, 并讨论通电后管内气体的运动状况, 并说明理由。







三. 计算题 (每题 20 分。文管组和农林医组不做; 非物理 B 组限做第 15 题; 非物理 A 组限做第 15、16 题; 物理组限做第 15、17 题)

15. (20 分, 文管组和农林医组不做, 其他组必做)

四块面积同为  $S$ 、原不带电的导体薄平板 A、B、C、D, 依次平行放置, 相邻间距很小, 分别记为  $d_1$ 、 $d_0$ 、 $d_2$ , 如图 1 所示。给 B 充以电量  $q > 0$ , 再用图 1 中虚直线所示的细导线连接 B、C, 最终达到静电平衡。

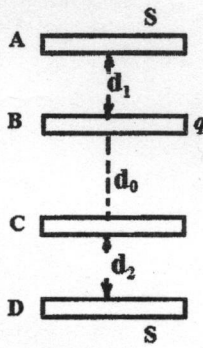


图 1

(1) 试求 A 到 D 的电势降  $U_{AD}$ ;

现将图 1 所示系统达到静电平衡后, 通过理想导线, 电键  $K_1$  和  $K_2$ , 电动势为  $\varepsilon$  的直流电源以及

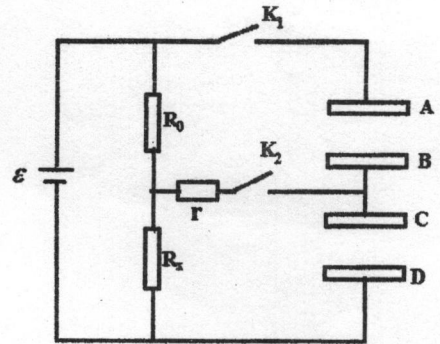


图 2

电阻分别为  $R_0$ 、 $R_x$  和  $r$  的电阻器连接成图 2 所示电路。开始时  $K_1$ 、 $K_2$  均断开, 而后接通  $K_1$ , 直到电路达到稳定状态。

(2) 试求该过程中从电源正极朝平板 A 流去的电量  $Q$ , 并判断  $Q$  的正负号;

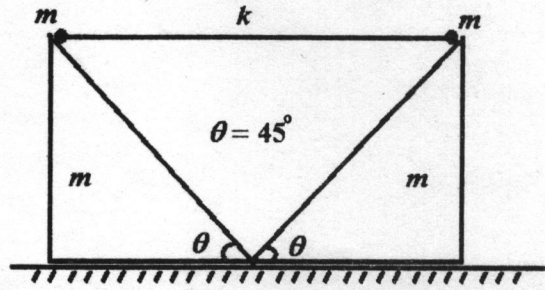
最后再接通  $K_2$ , 测得流过电阻器  $r$  的电流强度始终为零。

(3) 设  $R_x$  为未知量, 试求  $R_x$ , 并给出  $\varepsilon$  的取值范围。



17. (20分, 物理组必做, 其他组不做)

如图所示, 质量同为  $m$  的两个相等等腰直角三角形斜木块平放在光滑水平地面上, 且已通过某种约束使其始终不会翻转, 斜面底端相互接触。一根劲度系数为  $k$ , 自由长度恰好等于每个斜木块底面长度两倍的弹性轻杆, 两端分别连接质量同为  $m$  的小球, 开始时两个小球静止在两个斜木块的顶端。自由释放后, 两个小球可以无摩擦地



沿斜面滑动, 斜木块底面作水平运动, 弹性杆随之在竖直方向上运动, 过程中假设杆始终处于水平状态。将斜木块给小球支持力大小记为  $N$ , 已知小球开始运动后  $N$  第二次达到极小值时, 杆刚好落地, 试求  $N$  第二次达到极大值时杆的长度。



## 第 27 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷参考答案

一、填空题 (必做, 共 10 题, 每题 2 空, 每空 3 分, 共 60 分)

1.  $v_1 = \sqrt{gR}$  ;  $v_2 = \sqrt{2gR}$  .      2.  $\omega_{3\max}$  ;  $\frac{1}{3}(7+2\sqrt{2})qE$
3.  $v_1 = \frac{u}{u-v_s}v_0$  ;  $v_2 = \frac{u+v_s}{u}v_0$  .      4. 会; 632 mmHg
5. 图 1 ; 图 1 和图 2 .      6.  $\frac{q}{\epsilon_0}$  ;  $\frac{q}{6\epsilon_0}$
7.  $U_M = RE_0$  ; 有, 表面受扩张力, 电量太大扩张力大, 导致导体壳撑破
8.  $L = (n-1)d = 3 \times 10^{-4}$  cm,  $N = L/\lambda = 6$  条
9.  $d = 12.2$  cm;  $N = 400$  线/mm .      10.  $t = 4s$ ;  $\frac{140}{37}$  cs (光秒)

二、计算题 (必做, 共 4 题, 每题 15 分, 共 60 分)

11. 解: 设  $\alpha$  粒子在轨道上任一点的位置为  $x$ , 两个正电荷之间的距离为  $2a$ , 则两正电荷在  $\alpha$  粒子处的总电势为:

$$U_P = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (3 \text{ 分})$$

两正电荷构成的系统与  $\alpha$  粒子之间的相互作用能为

$$W_{\text{互}} = q_i U_i = 2e \cdot \frac{e}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (3 \text{ 分})$$

2) 求  $\alpha$  粒子所受的作用力:

方法一: 用库仑力做, 两正电荷与  $\alpha$  之间的库仑力为

$$F_x = 2F_e \cos\theta = 2 \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \frac{e^2 x}{\pi\epsilon_0 \sqrt{(x^2 + a^2)^3}}, \text{ 方向 } \rightarrow \quad (3 \text{ 分})$$

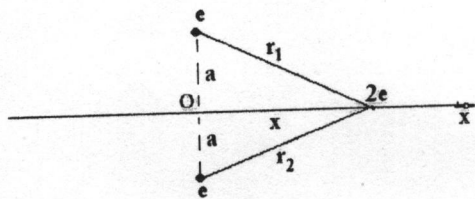
方法二: 用虚功原理做  $\vec{F} = -\frac{dW_{\text{互}}}{dx} = \frac{e^2 x}{\pi\epsilon_0 \sqrt{(x^2 + a^2)^3}} \vec{i}$

求  $\alpha$  粒子所受的作用力的极值, 即求力  $\vec{F}$  模  $|\vec{F}|$  的极值,

$$\frac{d|\vec{F}|}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^2 |x|}{\pi\epsilon_0 \sqrt{(x^2 + a^2)^3}} \right\} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + a^2) - 3x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^5}} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^5}} = 0$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dx} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^5}} = 0 \rightarrow a^2 - 2x^2 = 0, x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad (3 \text{ 分})$$

所以在  $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$  处,  $\alpha$  受力取极值, 极值可能极大, 可能极小, 再由



$$\frac{d^2|\vec{F}|}{dx^2} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left[ \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^5}} \right] = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{2|x|(3x^2 - 2a^2)}{\sqrt{(x^2 + a^2)^7}}$$

因为在  $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$  处,  $3x^2 - 2a^2 = -\frac{a^2}{2} < 0$ , 所以,

$$\frac{d^2|\vec{F}|}{dx^2} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{2|x|(3x^2 - 2a^2)}{\sqrt{(x^2 + a^2)^7}} < 0, \text{ 即在 } x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ 处, } \alpha \text{ 受作用力达到极大值. (3分)}$$

12解:  $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR} = T_0, \quad T_B = T_C = \frac{4p_0 V_0}{nR} = 4T_0 \quad (3分)$

$$(1) W_{AB} = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = \frac{3}{2}p_0 V_0$$

$$W_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = 4p_0 V_0 \ln 2$$

$$W_{CA} = -3p_0 V_0$$

(3分)

$$(2) \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A) = \frac{9}{2}nRT_0 = \frac{9}{2}p_0 V_0$$

$$\Delta U_{BC} = 0$$

$$\Delta U_{CA} = \frac{3}{2}nR(T_A - T_C) = -\frac{9}{2}p_0 V_0$$

(3分)

$$(3) Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 6p_0 V_0$$

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta U_{BC} = 4p_0 V_0 \ln 2$$

(3分)

$$Q_{CA} = W_{CA} + \Delta U_{CA} = -\frac{15}{2}p_0 V_0$$

$$(4) \eta = 1 - \frac{-Q_{CA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 1 - \frac{15}{12 + 8 \ln 2} = \frac{8 \ln 2 - 3}{12 + 8 \ln 2} = 14.5\% \quad (3分)$$

13.解: 1)  $t=0$  时刻, 螺线管接通电流, 则由于电流变化, 管内磁场也将随时间变化, 对长直螺线管

管内, 有

$$B = \mu_0 N I(t) = \mu_0 N k t$$

(2分),

因为 B 变化, 在管内外会产生涡旋电场,

$$2\pi r E_{\text{旋内}} = -\frac{dB}{dt} \pi r^2 = -\mu_0 N k \pi r^2; \quad E_{\text{旋内}} = -\frac{\mu_0 N k r}{2} \quad r < R$$

方向与螺线管的电流反向 (2分)

$$2\pi r E_{\text{旋外}} = -\frac{dB}{dt} \pi R^2 = -\mu_0 N k \pi R^2; \quad E_{\text{旋外}} = -\frac{\mu_0 N k R^2}{2r} \quad r > R$$

方向与螺线管的电流反向 (2分)

2) 求感应电流密度及其方向

由 1) 可见, 管内涡旋电场的大小取决于  $r$  的大小, 越靠近螺线管壁处, 涡旋电场越大。等离子体中, 正、负离子在涡旋电场的作用下作环绕轴线的圆周运动, 正负离子均受涡旋电场力作用, 电子和离子受到大小相等方向相反的切向力而获得相反方向的切向加速度: 就其大小而言,



对于电子:  $eE_{\text{旋}} = m_e \frac{dv_e}{dt}$ , 对于离子:  $eE_{\text{旋}} = (m_{\text{离子}}) \frac{dv_{\text{离}}}{dt}$

由于  $m_{\text{离子}} \gg m_e$ , 因此电子在切向获得加速度  $\gg$  离子所获得的加速度, 因而使等离子体内形成以电子流动为主的与涡旋电场方向相反的电子流, 略去离子流贡献。 (3分)

距中心为  $r$  处的电流密度的大小便为  $j(r, t) = n_0 e u(r, t)$   
其中  $u(r, t)$  是  $t$  时刻,  $r$  处电子在涡旋电场作用下获得的切向运动速度 (与电流密度方向相反)。对  
对上式两边求导得

$$\frac{\partial j(r, t)}{\partial t} = n_0 e \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = n_0 e a(r, t) = n_0 e \frac{F}{m_e} \quad F = eE_{\text{旋}}$$

于是有 
$$\frac{\partial j(r, t)}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m_e} E_{\text{旋}} = \frac{\mu_0 N k \rho e^2 r}{m_e}$$

所以, 当  $r$  一定时, 
$$j(r, t) = \int_0^t \frac{\mu_0 N n_0 e^2 k r}{m_e} dt = \frac{\mu_0 N n_0 e^2 k r}{m_e} t \quad (3分)$$

电流密度是正电荷流动的方向, 因此应该和涡旋电场方向相同。

3) 感应电流方向与螺线管中通有的电流方向相反。忽略感应电流产生的轴向磁场, 则电离了的正负离子由于有运动, 它们均受到轴线磁场的洛伦兹力, 正离子与涡旋电场同方向运动, 电子反方向运动, 轴向磁场向上, 两者受到的洛伦兹力均指向轴线, 洛伦兹力使正负离子均向轴线运动, 因此除了切向运动外, 正负离子还有向轴线运动的趋势。又由于外层涡旋电场大, 正负离子获得的切向速度大于内层, 所以外层等离子体薄层会向轴线迅速压缩, (3分)

14. 解: (1) 参考题解图 1  $T_1$  的计算:

球 1 从 A 到  $B_1$  所经时间记为  $t_{11}$ , 到达  $B_1$  的速度大小记为  $v_{10}$

有

$$3L = \frac{1}{2} g \sin \phi \cdot t_{11}^2 \Rightarrow t_{11} = \sqrt{10L/g}$$

$$v_{10} = g \sin \phi \cdot t_{11} = \frac{3}{5} \sqrt{10gL}$$

将球 1 从  $B_1$  到 C 时间记为  $t_{12}$ , 有

$$4L = v_{10} t_{12} + \frac{1}{2} g \cos \phi \cdot t_{12}^2 = \frac{3}{5} \sqrt{10gL} \cdot t_{12} + \frac{1}{2} g t_{12}^2$$

取其解为 
$$t_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{10L/g}$$

合成, 得 
$$T_1 = t_{11} + t_{12} = \frac{3}{2} \sqrt{10L/g} \quad (4分)$$

$T_2$  的计算:

仿照球 1 所引参量, 有

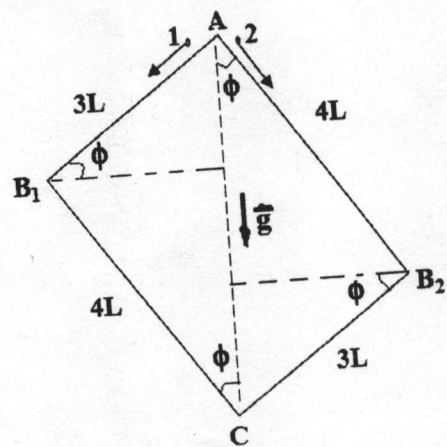
$$4L = \frac{1}{2} g \cos \phi \cdot t_{21}^2 \Rightarrow t_{21} = \sqrt{10L/g} (= t_{11})$$

$$3L = v_{20} t_{22} + \frac{1}{2} g \sin \phi \cdot t_{22}^2 = \frac{4}{5} \sqrt{10gL} \cdot t_{22} + \frac{1}{2} g t_{22}^2$$

$$T_2 = t_{21} + t_{22} = \frac{4}{3} \sqrt{10L/g} \quad (3分)$$

(2) 由 (1) 问解答可知

$$T_0 = T_2 = \frac{4}{3} \sqrt{10L/g}$$



题解图 1

$$v_{20} = g \cos \phi \cdot t_{21} = \frac{4}{5} \sqrt{10gL}$$

$$t_{22} = \frac{1}{3} \sqrt{10L/g}$$



球 1、2 于  $t_{11} = t_{21} = \sqrt{10L/g} = t_1$   
 分别同时到达  $B_1$ 、 $B_2$ 。据此将讨论的时间范围分为两段： $0 \leq t < t_1$  和  $t_1 < t < T_0$

$0 \leq t < t_1$  时间段  $\vec{F}$  的求解：

此时间段内， $t$  时刻球 1、2 所在位置到竖直线 AC 的水平距离分别为

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} g \sin \phi \cdot t^2\right) \cdot \cos \phi, \quad x_2 = \left(\frac{1}{2} g \cos \phi \cdot t^2\right) \cdot \sin \phi$$

即有  $x_1 = x_2$

重力  $m_1 \vec{g} = m \vec{g}$ 、 $m_2 \vec{g} = m \vec{g}$  相对 A 点力矩之和为零，故有解

$$\vec{F} = 0 \quad (4 \text{分})$$

$t_1 < t < T_0$  时间段  $\vec{F}$  的求解：

参考题解图 2，球 1、2 朝 AC 线水平加速度分别为

$$(g \cos \phi) \cdot \sin \phi = \frac{12}{25} g, \quad (g \sin \phi) \cos \phi = \frac{12}{25} g$$

即相同。 $t$  时刻重力矩之和为

$$\Delta \vec{M} \begin{cases} \text{方向: 水平朝外} \\ \text{大小: } \Delta M = m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \end{cases}$$

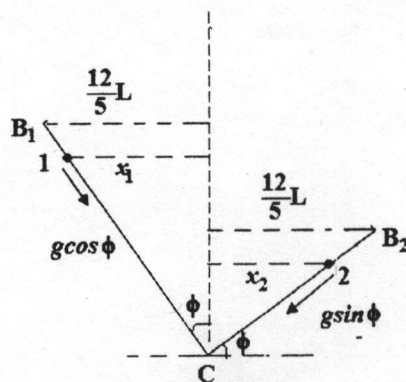
$$x_1 = \frac{12}{5} L - \left[ v_{10} \sin \phi \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} \times \frac{12}{25} g (t - t_1)^2 \right]$$

$$x_2 = \frac{12}{5} L - \left[ v_{20} \cos \phi \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} \times \frac{12}{25} g (t - t_1)^2 \right]$$

$$x_1 - x_2 = (v_{20} \cos \phi - v_{10} \sin \phi)(t - t_1) = \frac{7}{25} \sqrt{10gL} (t - t_1)$$

为平衡此力矩，要求

$$\vec{F} \begin{cases} \text{方向: 水平朝左} \\ \text{大小: } F = \Delta M / 5L = \frac{7}{125} \sqrt{10} mg \sqrt{\frac{g}{L}} (t - t_1), \quad t_1 = \sqrt{10L/g} \end{cases} \quad (4 \text{分})$$



题解图 2

三. 15. (20 分, 文管组和农林医组不做, 其他组必做)

解: (1) 参考题图 1。静电平衡后, 各导体板内场强为零, 由高斯定理得 A 板下表面与 B 板上表面电荷等量异号

C 板下表面与 D 板上表面电荷等量异号

B、C 板连成一个导体, 等势, B 板下表面和 C 板上表面若有电荷, 均应处理为无穷大均匀带电平面, 其间电场线必定与板面垂直, 使 B、C 间有电势差, 与 B、C 等势矛盾。因此, 要求

B 板下表面电量为零, C 板上表面电量为零,

各导体板内场强为零, 又要求

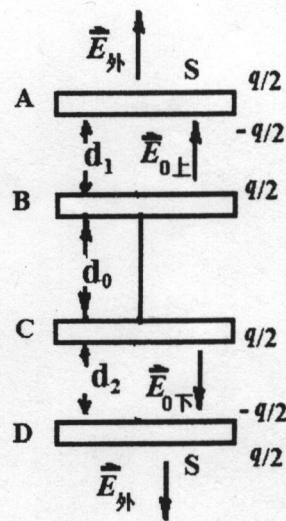
A 板下表面与 B 板上表面电荷等量异号

由电荷守恒要求

A 板总电量为零, B、C 板电量之和为零, D 板总电量为零

根据上述要求建立 8 个方程, 可解 (过程略) 得 A、B、C、D 板上、下表面电量分布如题图 1 所示。各区域场强方向也已在图中示出, 且有

$$E_{0上} = E_{0下} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$$



题解图 1

便得  $U_{AD} = -E_{0\perp}d_1 + E_{0\perp}d_2 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(d_2 - d_1)$  (8分)

(2) 电量  $Q$  从电源正极流到 A 板达到平衡后, A、B、C、D 板的电荷分布及板间场强分布如题解图 2 所示。图中  $\vec{E}_\perp$ 、 $\vec{E}_\perp$  的方向均以向下为正, 带有正、负号的  $E_\perp$ 、 $E_\perp$  分别为

$$E_\perp = \frac{2Q - q}{2\varepsilon_0 S}, \quad E_\perp = \frac{2Q + q}{2\varepsilon_0 S}$$

继而得

$$U_{AB} = E_\perp d_1 = \frac{2Q - q}{2\varepsilon_0 S} d_1, \quad U_{CD} = E_\perp d_2 = \frac{2Q + q}{2\varepsilon_0 S} d_2$$

$$\varepsilon = U_{AB} + U_{CD} = \frac{2Q(d_1 + d_2) + q(d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S}$$

可解得  $Q = \frac{2\varepsilon_0 S \varepsilon + q(d_1 - d_2)}{2(d_1 + d_2)}$

对  $Q$  的正负号判断如下:

$$Q \leq 0 \quad \text{当} \quad \frac{q(d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S} \geq \varepsilon \quad \text{时}$$

$$Q > 0 \begin{cases} 0 < Q \leq \frac{q}{2} & \text{当} \quad \frac{q(d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S} < \varepsilon \leq \frac{qd_2}{\varepsilon_0 S} \quad \text{时} \\ Q > \frac{q}{2} & \text{当} \quad \varepsilon > \frac{qd_2}{\varepsilon_0 S} \quad \text{时} \end{cases} \quad (7分)$$

(3)  $R_0$ 、 $R_x$  分压之比为

$$\frac{U_0}{U_x} = \frac{R_0}{R_x}$$

$k_1$  接通稳定后,  $k_2$  未接通时, 有

$$2Q - q = \frac{2\varepsilon_0 S \varepsilon - 2qd_2}{d_1 + d_2}, \quad 2Q + q = \frac{2\varepsilon_0 S \varepsilon + 2qd_1}{d_1 + d_2}$$

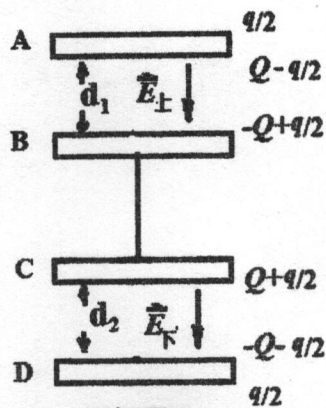
$k_2$  接通后, 流过  $r$  的电流若是始终为零, 则  $k_2$  接通前便应有

$$\frac{R_0}{R_x} = \frac{U_0}{U_x} = \frac{U_{AB}}{U_{CD}} = \frac{(2Q - q)d_1}{(2Q + q)d_2} = \frac{(2\varepsilon_0 S \varepsilon - 2qd_2)d_1}{(2\varepsilon_0 S \varepsilon + 2qd_1)d_2}$$

解得  $R_x = \frac{(\varepsilon_0 S \varepsilon + qd_1)d_2}{(\varepsilon_0 S \varepsilon - qd_2)d_1} R_0$  (4分)

出现此种情况的  $\varepsilon$  取值范围为

$$\varepsilon > \frac{qd_2}{\varepsilon_0 S} \quad (1分)$$



题解图 2



16. (20分, 非物理A组必做, 其他组不做)

(提示: 平面极坐标系中无限小曲线段长度  $dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2}$ ,

$$\text{积分参考公式 } \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C)$$

解:  $T_k$  的计算:

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} = \frac{r_0}{\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$L_K = \int_0^{2k\pi} dl = \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2k\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$= \frac{r_0}{\pi} \left[ \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_0^{2k\pi} = \dots$$

$$T_k = \frac{L_K}{v_0} = \frac{r_0}{\pi v_0} \left[ k\pi \sqrt{1 + 4k^2\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2}) \right] \quad (5分)$$

小球速度方向转角  $\Delta\phi_k$  的计算:

参考题解图1, 小球到  $r, \theta$  位置时螺线切线方向线与矢径方向线夹角记为  $\beta$ , 有

$$\tan \beta = \frac{(r+dr)d\theta}{dr} = \frac{rd\theta}{dr} = \theta$$

得  $\theta=0$  时,  $\beta_0=0$ ;  $\theta=2k\pi$  时,  $\beta_k = \arctan(2k\pi)$

小球速度方向转角便为

$$\Delta\phi_k = 2k\pi + (\beta_k - \beta_0) = 2k\pi + \arctan(2k\pi) \quad (5分)$$

$\bar{N}$  的计算:

$dt$  时间段内小球运动和受力情况, 如题解图2所示, 有

$$N = m \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow Ndt = mv \frac{vdt}{\rho} = mv \frac{dl}{\rho} = m v d\phi$$

$$\text{得 } \int_0^{T_k} Ndt = \int_0^{T_k} m v d\phi = m v_0 \Delta\phi_k$$

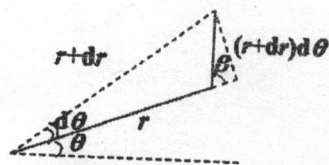
$$\bar{N} = \frac{\int_0^{T_k} Ndt}{T_k} = \frac{\pi m v_0^2}{r_0} \frac{2k\pi + \arctan(2k\pi)}{k\pi \sqrt{1 + 4k^2\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2})} \quad (8分)$$

$k$  很大时  $\bar{N}$  的近似表达式:

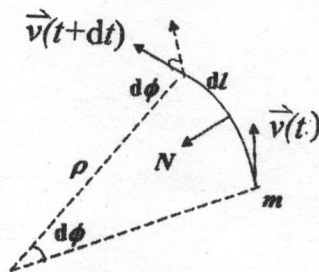
$$2k\pi + \arctan(2k\pi) \approx 2k\pi + \frac{\pi}{2} \approx 2k\pi$$

$$k\pi \sqrt{1 + 4k^2\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2}) \approx 2k^2\pi^2 + \frac{1}{2} \ln 4k\pi \approx 2k^2\pi^2$$

$$\Rightarrow \bar{N} \approx \frac{m v_0^2}{k r_0} \quad (2分)$$



题解图1

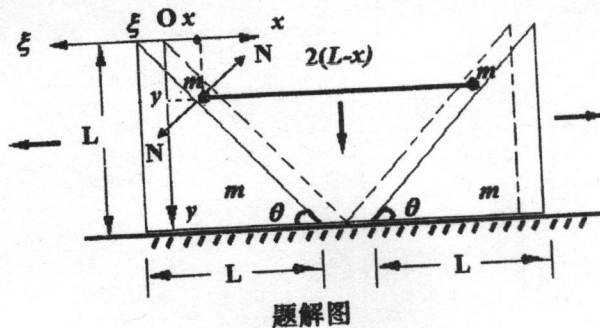


题解图2



17. (20分, 物理组必做, 其他组不做)

解: 参考题解图, 图中虚线所示为两个斜木块初始位置, 顶端取为坐标原点  $O$ , 为左侧小球朝右、朝下运动设置  $x$ 、 $y$  坐标轴, 为左侧斜木块朝左运动设置  $\xi$  坐标。每一个斜木块底面长记为  $L$  则高也为  $L$ 。建立下述方程:



球: 
$$N \cdot \sin \theta - k \cdot 2x = m \ddot{x},$$

$$mg - N \cos \theta = m \ddot{y}$$

木块: 
$$N \cdot \sin \theta = m \ddot{\xi}$$

运动关联: 
$$y = (x + \xi) \tan \theta$$

将其中木块方程所得

$$N = \frac{m \ddot{\xi}}{\sin \theta}$$

代入小球方程, 并将  $\theta = 45^\circ$  代入, 经数学处理后, 可得

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} + \frac{2k}{m} x \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \ddot{\xi} = g \quad (2) \quad (6分)$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} + \ddot{\xi} \quad (3)$$

1:  $\ddot{x}$  方程的建立和求解

(2) (3) 式联立, 消去  $\ddot{y}$ , 得 
$$\ddot{x} + 2\ddot{\xi} = g \quad (4)$$

将 (1) 式代入 (4) 式, 得 
$$\ddot{x} + \frac{4m}{3m} x = \frac{g}{3}$$

通解为 
$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{4k}, & \omega = \sqrt{\frac{4k}{3m}} \\ \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

由初条件  $t=0$  时,  $x=0, \dot{x}=0$

得 
$$A \cos \phi + \frac{mg}{4k} = 0$$

$$-\sqrt{\frac{4k}{3m}} A \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ 或 } \pi$$

取  $\phi = 0$ , 则  $A = -\frac{mg}{4k} \Rightarrow x = [1 - \cos \omega t] \frac{mg}{4k}$

取  $\phi = \pi$ , 则  $A = \frac{mg}{4k} \Rightarrow x = [1 + \cos(\omega t + \pi)] \frac{mg}{4k}$

可统一为 
$$x = (1 - \cos \omega t) \frac{mg}{4k}$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{3} \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{4k}{3m}} \quad (5分)$$

II:  $\ddot{\xi}$  方程的建立和求解

由 (1) 式, 得 
$$\ddot{\xi} = x + \frac{2k}{m}x = \frac{g}{3}\cos\omega t + \frac{2k}{m}(1 - \cos\omega t)\frac{mg}{4k}$$

$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{6}\cos\omega t + \frac{g}{2}$$

积分, 得 
$$\dot{\xi} = -\frac{g}{6\omega}\sin\omega t + \frac{1}{2}gt + C_1, \quad t=0 \text{ 时}, \dot{\xi} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{g}{6\omega^2}\cos\omega t + \frac{1}{4}gt^2 + C_2, \quad t=0 \text{ 时}, \xi = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{6\omega^2}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{g}{6\omega^2}(\cos\omega t - 1) + \frac{1}{4}gt^2$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{mg}{8k}(\cos\omega t - 1) + \frac{1}{4}gt^2 \quad (4\text{分})$$

讨论: 
$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{6}\cos\omega t + \frac{g}{2}, \Rightarrow \frac{2}{3}g \geq \ddot{\xi} \geq \frac{g}{3} > 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{m\ddot{\xi}}{\sin\theta} > 0, \text{ 故弹性杆落地前, 小球不会离开斜面.}$$

III:  $y \sim t$  的求解: 由  $y = (x + \xi)\tan\theta = x + \xi$ , 得

$$y = \frac{mg}{8k}(1 - \cos\omega t) + \frac{1}{4}gt^2 \quad (1\text{分})$$

IV: 斜木块底面长度  $L$

$$N = \frac{m\ddot{\xi}}{\sin\theta} = \sqrt{2}m\left(-\frac{g}{6}\cos\omega t + \frac{g}{2}\right)$$

$$N \text{ 第二次极小值, 对应 } t = 2T = 2\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

此时有 
$$L = y(t = 2T) = \frac{1}{4}gt^2 \Big|_{t=2\pi\sqrt{3m/k}}$$

得 
$$L = \frac{3\pi^2 mg}{k} \quad (2\text{分})$$

V:  $N$  第二次达到极大值时杆的长度  $l$

$$N \text{ 第二次极大值, 对应 } t = \frac{3}{2}T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

此时杆长为

$$l = (2L - 2x) \Big|_{t=\frac{3}{2}T} = \left[ 2L - 2(1 - \cos\omega t)\frac{mg}{4k} \right]_{\cos\omega t = -1} = 2L - \frac{mg}{k}$$

得 
$$l = \frac{(6\pi^2 - 1)mg}{k} \quad (2\text{分})$$