

竞赛之窗

2014 年北京市中学生数学竞赛预赛(高一)

中国分类号: C424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2014)08-0022-03

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设 P 是素数集合, H 是合数集合. 定义

$$I(n) = \begin{cases} 1, & n \in P; \\ 0, & n \in H. \end{cases}$$

下面三个命题:

- ①对任意 $x, y \in P$, 均有 $I(x+y) = 0$;
- ②对任意 $x, y \in H$, 均有 $I(x+y) = 0$;
- ③对 $x \in P, y \in H$, 均有 $I(x+y) = 0$

中, 真命题有()个.

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{1}{2x}$ 图像上的动点 P 与坐标原点 O 的距离的最小值为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)1 (D) $\sqrt{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, D 是 AC 上一点, 且 $AD = BD = BC$. 则 $\cos \angle BAC =$ ().

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

4. 一串数

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

的构成规律是: 第一个数和第二个数均是 1, 从第三个数起, 每一个数均等于其前面紧邻的两个数之和. 则这串数中的第 2 014 个数被 7 除的余数为().

- (A)0 (B)2 (C)4 (D)6

5. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$. 若对任意实数 x, y , 均满足方程

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy,$$

则 $f(201) =$ ().

- (A)40 400 (B)40 401

- (C)40 402 (D)40 403

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}$. 则 $f(x)$ 的值为().

- (A) $[-1, \frac{5}{3}]$ (B) $[-\frac{1}{3}, 5]$
(C) $[-\frac{5}{3}, 1]$ (D) $[-5, \frac{1}{3}]$

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 下面是我国著名数学家王元院士的题词:

数学竞赛好

若不同的汉字代表 0~9 中的不同数字, 假设“数学竞赛好”表示的是不同数字组成的五位数中最大的平方数. 则此五位数为_____.

2. 若实数 x 满足 $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 x$, 则 $x =$ _____.

3. 如图 1, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 5, E, F 为正方形外的两点, $BE = DF = 4, AE = CF =$

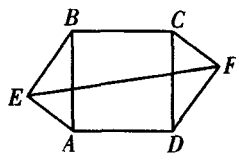


图 1

3. 则 $EF =$ _____.

4. 试确定不超过 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$ 的最大整数为_____.

5. 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, AC 与 BD 交于点 $E, AC = BC, AD =$

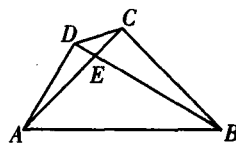


图 2

4, $BD = 7$. 则 $S_{\triangle AEB} =$ _____.

6. 在立方体的每个面上各写一个正整数, 在每个顶点处写该顶点所在的三个面上的正整数的乘积. 若八个顶点写的数之和为 2 014, 则六个面

上写的数之和为_____.

7. 已知 A, B 为集合 $\{0, 1, \dots, 9\}$ 中的数字, r 为两位整数 \overline{AB} , s 为两位整数 \overline{BA} , $r, s \in \{00, 01, \dots, 99\}$. 当 $|r - s| = k^2$ (k 为整数) 时, 有序数对 (A, B) 的个数为_____.

8. 已知 P 是边长为 $6\sqrt{3}$ 的正 $\triangle ABC$ 的内切圆上的一个动点. 则 $BP + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____.

参 考 答 案

一、1. A.

若 $x=2, y=5$, 得 $x+y=7$, 则

$$I(x+y) = I(7) = 1 \neq 0,$$

故命题①不真;

若 $x=4, y=9$, 得 $x+y=13$, 则

$$I(x+y) = I(13) = 1 \neq 0,$$

故命题②不真;

若 $x=3, y=8$, 得 $x+y=11$, 则

$$I(x+y) = I(11) = 1 \neq 0,$$

故命题③不真.

综上, 真命题有 0 个.

2. C.

根据对称性, 只需考虑 $x > 0$ 的情形即可.

设动点为 $P(x, y)$. 则 $xy = \frac{1}{2}$.

又 $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + 1$, 于

是, 当 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $x^2 + y^2$ 取得最小值 1, 此时, OP

$= \sqrt{x^2 + y^2}$ 的最小值为 1.

3. C.

如图 3, 设 $AB = AC = 1$,

$AD = BD = BC = a$. 则

$$CD = 1 - a.$$

易知,

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (负值舍去).}$$

作 $BH \perp CD$ 于点 H . 则

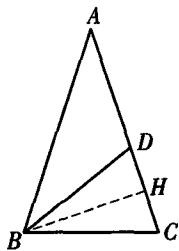


图 3

$$CH = DH = \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{又 } AH = 1 - CH = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \text{ 故}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

4. D.

设这串数为 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 其构成规律为

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3).$$

考虑这些数被 7 除的余数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \dots$$

观察余数列第 17 个数和第 18 个数分别与第 1 个数和第 2 个数相同, 循环出现.

注意到, $2014 = 125 \times 16 + 14$.

从而, 所求结果为 6.

5. B.

在题给方程中令 $x = y$, 得

$$f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{a}{2}(f(0) = a).$$

再取 $x = y = 0$, 得

$$a = 2a \Rightarrow a = 0.$$

经检验, $f(x) = x^2$ 满足方程.

因此, $f(201) = 40401$.

6. B.

注意到, $x^2 - x + 1 > 0$.

于是, $f(x)$ 的定义域为全体实数.

记 $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}$. 则

$$y(x^2 - x + 1) = x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow (y - 1)x^2 - (y + 3)x + (y - 1) = 0.$$

若二次项系数 $y - 1 = 0$, 则 $x = 0$.

若二次项系数 $y - 1 \neq 0$, 则

$$\Delta = (y + 3)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 14y - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{3}, 5\right].$$

所以, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{3}, 5\right]$.

二、1. 96 721.

注意到, $300^2 = 90\ 000, 310^2 = 96\ 100,$

$$320^2 = 102\ 400 > 100\ 000.$$

于是, 这个不同数字的五位数可能在 $310^2 \sim 320^2$ 之间的九个平方数中.

又 $311^2 = 96\ 721$, $312^2 = 97\ 344$, $313^2 = 97\ 969$,
 $314^2 = 98\ 596$, $315^2 = 99\ 225$, $316^2 = 99\ 856$,
 $317^2 = 100\ 489 > 100\ 000$,

故不同数字的五位数中最大的平方数为 96 721.

2. $\sqrt{2}$.

设 $y = \log_a \log_a x$. 则 $a^{a^y} = x$.

令 $a = 2$ 和 $a = 4$. 由题意知

$$2^{2^y} = 4^{4^y} = (2^2)^{(2^2)^y} = 2^{2^{2y+1}}$$

$$\Rightarrow y = 2y + 1 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

3. $7\sqrt{2}$.

易知, $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$.

延长 EA, FD 交于点 G .

由 $\angle ADG = 90^\circ - \angle CDF = \angle DCF = \angle BAE$,

$\angle DAG = 90^\circ - \angle BAE = \angle ABE$,

知 $\triangle AGD \cong \triangle BEA$.

于是, $EG = FG = 7$.

从而, $EF = 7\sqrt{2}$.

4. 3.

注意到,

$$\frac{\sqrt{14} + 2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{(\sqrt{14} + 2)^2}{(\sqrt{14} - 2)(\sqrt{14} + 2)}$$

$$= \frac{14 + 4 + 4\sqrt{14}}{14 - 4} = \frac{18 + 4\sqrt{14}}{10}.$$

而 $3 < \sqrt{14} < 4$, 于是, $30 < 18 + 4\sqrt{14} < 34$.

从而, $3 < \frac{18 + 4\sqrt{14}}{10} < 3.4$.

因此, 不超过 $\frac{\sqrt{14} + 2}{\sqrt{14} - 2}$ 的最大整数为 3.

5. $11\frac{9}{11}$.

由题意知 A, B, C, D 四点共圆, 且

$\angle CBD = \angle CAD$,

$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle CBA = 45^\circ$.

以 C 为中心旋转 $\triangle BCD$, 使点 B 与 A 重合, 则 BD 落在 AD 上, 得 $\triangle ACF$.

于是, $AF = 7, DF = 7 - 4 = 3$,

$\angle FDC = \angle ABC = 45^\circ$.

过点 C 作 $CH \perp DF$ 于点 H . 则

$$CH = \frac{1}{2}DF = \frac{3}{2}.$$

从而, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$.

而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \times (4^2 + 7^2) = \frac{65}{4}$, 故

$$\frac{DE}{EB} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{\frac{65}{4}} = \frac{12}{65} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{DB}{EB} = \frac{77}{65}.$$

又 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14$, 于是,

$$S_{\triangle ABE} = \frac{14 \times 65}{77} = \frac{910}{77} = 11\frac{9}{11}.$$

6. 74.

如图 4, 设在立方体相对的两个面上写的正整数对分别为 $(a, b), (c, d), (e, f)$.

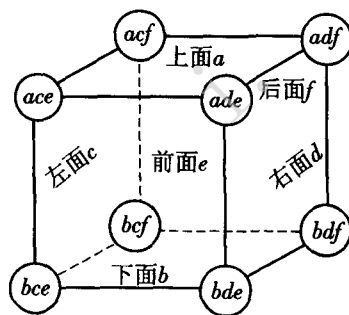


图 4

则在各顶点处写的数之和为

$$acf + afd + ace + ade + bcf + bce + bdf + bde$$

$$= (a + b)(c + d)(e + f)$$

$$= 2\ 014 = 2 \times 19 \times 53.$$

从而, 在各面上写的数之和为

$$(a + b) + (c + d) + (e + f)$$

$$= 2 + 19 + 53 = 74.$$

7. 42.

注意到,

$$|(10A + B) - (10B + A)| = 9|A - B| = k^2.$$

则 $|A - B|$ 为完全平方数.

当 $|A - B| = 0$ 时, 有 10 个整数对:

$$(A, B) = (0, 0), (1, 1), \dots, (9, 9);$$

当 $|A - B| = 1$ 时, 有 18 个整数对:

$$(A, B) = (0, 1), (1, 2), \dots, (8, 9),$$

及它们的逆序数;

当 $|A - B| = 4$ 时, 有 12 个整数对:

$$(A, B) = (0, 4), (1, 5), \dots, (5, 9),$$

及它们的逆序数;

当 $|A - B| = 9$ 时, 有 2 个整数对:

$$(A, B) = (0, 9),$$

及其逆序数.

2014 年全国高中数学联赛四川赛区预赛

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2014)08-0025-05

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 复数 $z = a + 4i$, 且 $\frac{z}{z+b} = 4i$.

则 $b =$ ().

- (A) -16 (B) 1 (C) 16 (D) 17

2. 过椭圆的左焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线 l 与该椭圆交于 A, B 两点. 若 $|BF| = 2|AF|$, 则该椭圆的离心率为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $d > 0$, 且 a_2 是 a_1, a_4 的等比中项. 记 $b_n = a_{2^n} (n \in \mathbf{Z}_+)$, 对任意的正整数 n 均有

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} < 2.$$

则公差 d 的取值范围是().

- (A) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ (B) $(\frac{1}{2}, +\infty)$

- (C) $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (D) $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

4. 已知 a, b 为正实数, 记

$$P = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}, Q = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab},$$

$$R = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}.$$

则下列判断正确的是().

- (A) $P \geq Q \geq R$ (B) $Q \geq P \geq R$

- (C) $Q \geq R \geq P$

- (D) P, Q, R 的大小关系不能确定

5. 已知一个半径为 6 的球. 则该球内接正三棱锥的体积的最大值为().

从而, 满足条件的有序数对个数为
 $10 + 18 + 12 + 2 = 42.$

8. $\frac{3\sqrt{21}}{2}.$

如图 5, 设 $\triangle ABC$ 内切圆为 $\odot O$, 取 OC 上的点 M , 使 $OM = \frac{1}{4}OC$.

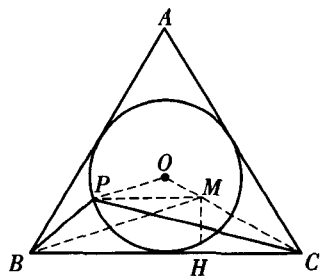


图 5

由正 $\triangle ABC$ 的边长为 $6\sqrt{3}$, 知

$$OC = 6, OP = 3, OM = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle OPM \sim \triangle OCP$$

$$\Rightarrow \frac{PM}{PC} = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{2} \Rightarrow PM = \frac{1}{2}PC.$$

注意到, $PB + \frac{1}{2}PC = PB + PM \geq BM.$

过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H . 则

$$MH = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}(OC - OM) = \frac{9}{4},$$

$$BH = BC - CH = 6\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{故 } BM = \sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{756}}{4} = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{因此, } BP + \frac{1}{2}PC = PB + PM \geq BM = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

当动点 P 为 BM 与内切圆的交点时, 得到最小值 $\frac{3\sqrt{21}}{2}.$

(李廷林 提供)