2015年浙江省高中数学竞赛试卷参考答案

一、选择题（本大题共有8小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题6分，共48分）

1．“*a* =2， ”是“曲线C：经过点”的( A )．

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

答案：A.

解答：当*a* =2， 曲线C：经过；当曲线C：经过点时，即有，显然也满足上式。所以“*a* =2， ”是“曲线C：经过点”的充分不必要条件。

2．已知一个角大于120º的三角形的三边长分别为，则实数的取值范围为( B )．

A．  B．  C． D．

答案：B.

第3题图



解答：由题意可知：

解得。

3． 如图，在正方体*ABCD*-*A*1*B*1*C*1*D*1中，*M*为*BB*1的中点，

则二面角*M*-*CD*1-*A*的余弦值为( C )．

A．  B．  C．  D．

答案：C.

解答：以为坐标原点，所在的直线分别为轴建立空间直角坐标系，则，且平面的法向量为，平面法向量为。因此，即二面角*M*-*CD*1-*A*的余弦值为。

4．若实数满足，则的最大值为 ( C )．

A．  B．  C．  D． 2

答案：C.

解答：由满足的条件知，所以，当取等号。

5． 已知等腰直角△*PQR*的三个顶点分别在等腰直角△*ABC*的三条边上，记△*PQR*，△*ABC*的面积分别为*S*△*PQR*，*S*△*ABC*，则的最小值为( D )．

A．  B．  C．  D． 

参考答案：D.

解答：如图5-1所示，

*A*

*B*

*C*

*P*

*Q*

*R*

*H*

*A*

*B*

*C*

*P*

*R*

*Q*

图5-1 图5-2

（1）当的直角顶点在的斜边上，则四点共圆，所以在中分别应用正弦定理得.又故,故即为的中点.

过作于，则,所以,此时的最大值为.

（2）当的直角顶点在的直角边上，如图5-2所示，设,则

在中，

在中，,

由正弦定理, 

，因此.

这样，，当且仅当取等号，此时的最小值为.

6. 已知数列的通项 ，，若，则实数等于（ D )．

A． B． C． D．

答案：D.



则，所以

，经检验只有符合题意。

7． 若过点*P*（1，0），*Q*（2，0），*R*（4，0），*S*（8，0）作四条直线构成一个正方形，则该正方形的面积**不可能**等于 ( C )．

A． B．  C．  D． 

答案：C.

解答：不妨设四条直线交成的正方形在第一象限，且边长为，面积为过的直线的倾斜角为。

当过点的直线为正方形的对边所在的直线时，，此时正方形的面积。

同理，当过点的直线为正方形的对边所在的直线时，；当过点的直线为正方形的对边所在的直线时，.

8．若集合，则集合中的元素个数为( B )．

A．4030 B．4032 C． 20152 D． 20162

答案：B.

解答：由已知得，因为一奇一偶，所以两者之一为偶数，即为共有2016种情况，交换顺序又得到2016种情形，所以集合共有4032个元素.

二、填空题（本大题共有7小题，将正确答案填入题干后的横线上，9-14每题7分，15题8分，共50分）

9．已知函数满足，，且，则 ．

答案：.

解答：，所以

10．若数列的前项和，，则= ．

答案：.

解答：又，故,

.

11． 已知*F*为抛物线的焦点，点*A* (3，1)， *M*是抛物线上的动点．当取最小值时，点*M*的坐标为 ．

答案：.

解答：设抛物线的准线为.过*M*作的垂线，垂足为则

,当三点共线时取等号，此时*M*的坐标为。

12．若，则 .

答案：.

解答:设，则，代入方程得或，即

或，所以。

13. 设函数，其中表示中的最小者．若，则实数的取值范围为 ．

答案：.

解答：当时，此时有；

当时，此时有；

当时，此时有；

当时，此时有；

当时，此时有。

14． 已知向量的夹角为， ，向量，的夹角为，，则的最大值为 ．

答案：24.

解答：，则又

此时共圆，由正弦定理得，则。在中，,由余弦定理得,即，所以，当时取“=”，因此的最大值为24.

15．设，若对任意，都有，则

答案：.

解答：首先令知.其次考虑过定点（0,2）的直线，与开口向上的抛物线，满足对任意所对应图象上的点不在轴同侧，因此.又，故.

**三、解答题（本大题共有3小题，16题16分，17、18每题18分，共52分）**

16． 设，函数．若对任意实数，方程有两个相异的实根，求实数的取值范围．

参考答案：

因为方程有两个相异的实根，即方程有两个相异的实数根，所以 ………………………………4分

即对任意实数恒成立，所以

，…………………………………………………12分

解得.…………………………………………………………………………16分

17．已知椭圆的离心率为，右焦点为圆的圆心．

(I)求椭圆的方程；

(II)若直线*l*与曲线*C*1，*C*2都只有一个公共点，记直线*l*与圆*C*2的公共点为*A*，求点*A*的坐标．

参考答案：（Ⅰ）设椭圆的半焦距长为，则，解得，所以椭圆方程为.………………………………………………………………………………4分

（Ⅱ）当直线的斜率不存在时，显然不满足题意.当直线的率存在时，可设直线的方程为，点的坐标为，其中.

联立方程，消去得…………（1）

所以即

……………………（2）……………………………………………8分

联立方程消去得

………………（3）

所以即

……………………………（4）…………………………12分

（2）-（4）得……………………………… （5）

（5）代入（3）得………………（6）…………………………16分

（6）代入得.

经检验或符合题意，这样点的坐标为.…………18分

18．已知数列满足．证明:．

参考答案：

证明：因为， 所以



……………………8分

又，

所以.……………………16分

所以.因此……18分

**四、附加题（本大题共有2小题，每题25分，共50分）**

**附加1**已知数列满足，，．

(I) 证明：是正整数数列；

(II) 是否存在，使得，并说明理由．

参考答案：（Ⅰ）由得

，……………………………… （1）

同理可得 ，………………（2）……………………5分

由（1）（2）可知，为方程的两根，又，即有，即

因为所以为正整数.……………………………………………………10分

（Ⅱ）不存在，使得.…………………………………………………15分

假设存在，使得，则.

一方面，，所以,即

，所以.

由费马小定理知，所以…………………………20分

另一方面，.事实上，假设，则，即，所以，而，这样得到.矛盾.

所以，由费马小定理得.

这样得到.矛盾.所以不存在，使得.………………25分

**附加2** 设*k*为正整数，称数字的排列为“*N*型”的，如果这些数满足

（1）； （2）；（3）．

记为所有“*N*型”排列的个数．

(I)求，的值； (II)证明：对任意正整数*k*，均为奇数．

参考答案：

首先注意到的值只能取这些数字，因为必须有2k个值比它小，而的值只能取这些数字，因为必须有2k个值比它大。

记（）时的N型排列个数为，则

，.

化简得

.………………………………………………………10分

(1) 计算可得 ………………………………………………………………15分

(2) 易知 ， （），.

当时，对于所有，是偶数。事实上对于，（）时的任何一个N型排列，此时数字只能放在的位置，数字只能放在

上（字母N的两头），和的数字可以互换得到一个新的N型排列，于是是偶数（）.……25分

（也可以从表达式说明是偶数（），它的组合意义就是将m个白球，n个红球，n个蓝球排成一行的排列数。于是任何一种排列，交换红蓝球可对应另一种排列。

于是 为奇数！………………………25分）