

## 8 狭义相对论

### A 组

8-1 在惯性系  $S$  中观察到两事件同时发生,空间间距为 1 m. 惯性系  $S'$  沿两事件联线的方向相对于  $S$  系运动,在  $S'$  系中观察到两事件之间的距离为 3 m. 试求  $S'$  系相对  $S$  系的速度大小和在  $S'$  系中测得的两事件之间的时间间隔.

解  $S$  系:  $t_1 = t_2; \quad x_1 - x_2 = 1 \text{ m},$

$S'$  系:  $t'_1, t'_2; \quad x'_1 - x'_2 = 3 \text{ m}.$

由洛伦兹变换得

$$x'_1 - x'_2 = \frac{(x_1 - x_2) \pm v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

解得  $\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{3}, \quad \text{即} \quad v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c.$

$S'$  系中两事件之间的时间间隔为

$$t'_1 - t'_2 = \frac{(t_1 - t_2) \pm \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pm \frac{v}{c^2} \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

即得  $t'_1 - t'_2 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{c} \text{ m}.$

8-2 如图 8-1 所示,在相对地面沿水平方向以匀速度  $v$  高速运动的车厢内,有一个由劲度系数为  $k$  的轻弹簧和质量为  $m$  的小物块构成的水平弹簧振子.小物块从平衡位置开始,以  $u \parallel v$  的初速度在车厢内形成无摩擦的往返运动.设  $u \ll c$ ,车厢中仍可用牛顿力学将振子的运动处理成简谐振动.试用洛伦兹时空变换,在地面系中计算振子在车厢中第一个四分之一

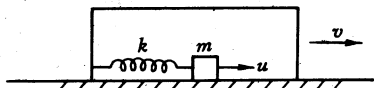


图 8-1

一振动周期内的运动过程经历的时间  $\Delta t_1$  和第一个二分之一周期内的运动过程中经历的时间  $\Delta t_2$ .

**解** 车厢系中小物块在平衡位置的坐标设为  $x'_0=0$ , 开始运动的时刻记为  $t'_0=0$ ; 经过四分之一振动周期小物块到达的位置  $x'_1=\sqrt{\frac{m}{k}}u$ , 时刻为  $t'_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ ; 经过二分之一振动周期小物块到达的位置  $x'_2=x'_0=0$ , 时刻为  $t'_2=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . 这三个点事件在地面系的时刻分别记为  $t_0=0, t_1=\Delta t_1, t_2=\Delta t_2$ . 据洛伦兹时空变换式, 可得

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{(t'_1 - t'_0) + \frac{v}{c^2}(x'_1 - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{v}{c^2}\sqrt{\frac{m}{k}}u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_0 = \frac{(t'_2 - t'_0) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{m}{k}} / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

**8-3** 在以恒定速度  $v$  沿平直轨道高速行驶的车厢中央有一旅客, 已知他到车厢两端  $A$  和  $B$  的距离都是  $L_0$ . 今旅客点燃一根火柴, 光脉冲向各个方向传播, 并到达车厢两端  $A$  和  $B$ . 设沿着车厢行驶方向,  $A$  端在前,  $B$  端在后, 试在地面系用洛伦兹变换式计算光脉冲到达  $A, B$  的时差  $\Delta t_{BA}=t_A-t_B$  以及光脉冲到达  $A$  端时车厢  $B$  端和  $A$  端之间的距离  $l_{BA}$ .

**解** 车厢系中旅客所在位置取为  $x'_0=0$ , 点燃火柴时刻记为  $t'_0=0$ , 此时旅客在地面系中的位置记为  $x_0=0$ , 时刻也记为  $t_0=0$ . 车厢系中,  $x'_A=L_0, x'_B=-L_0$ , 光脉冲到达  $A, B$  端时刻  $t'_A=t'_B=L_0/c$ . 地面系中光脉冲到达  $A, B$  端时刻分别为

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$t_B = \frac{t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c},$$

其间时差

$$\Delta t_{BA} = t_A - t_B = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c}.$$

地面系在上述  $t_A$  时刻光脉冲到达  $A$  端, 此时  $A$  端、 $B$  端在地面系的坐标分别记为  $x_A, x_B$ . 据洛伦兹变换式, 有

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_B = \frac{x_B - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

得

$$x'_A - x'_B = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

即有

$$l_{BA} = x_A - x_B = \sqrt{1-\beta^2}(x'_A - x'_B) = \sqrt{1-\beta^2} \cdot 2L_0.$$

**8-4** 地面中的水平隧道  $AB$  长  $L_0$ , 一列火车  $A'B'$  静长  $L > L_0$ . 今使火车如图 8-2 所示, 以匀速度  $v$  高速驶入隧道, 地面系中观察到  $A'$  与  $A$  相遇时恰好  $B'$  与  $B$  相遇. 试据洛伦兹变换式计算  $v$  值, 并在列车系中计算从  $A, A'$  相遇到  $B, B'$  相遇之间经过的时间  $\Delta t'$ .

**解** 地面系中  $A$  与  $A'$  相遇

的空时坐标记为  $x_A, t_A$ ,  $B$  与  $B'$

相遇的空时坐标记为  $x_B, t_B = t_A$ ,

且有  $x_A - x_B = L_0$ . 火车系中这两

个事件的空时坐标记为  $x'_A, t'_A$  和  $x'_B, t'_B$ , 且有  $x'_A - x'_B = L$ . 据洛伦兹变换式, 有

$$x'_A - x'_B = \frac{(x_A - x_B) - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

得

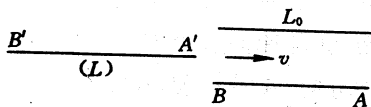


图 8-2

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{L}, \quad \text{即} \quad v = \sqrt{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2} c.$$

$$\text{又据 } t'_A = \frac{t_A - \frac{v}{c^2}x_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, t'_B = \frac{t_B - \frac{v}{c^2}x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ 得}$$

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) + \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v}{c^2} L_0 / \frac{L_0}{L},$$

即有

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2} \frac{L}{c}.$$

8-5 静长同为  $L_0$  的两把直尺  $AB, A'B'$  沿长度方向相向而行, 速度为  $v$ , 如图 8-3 所示. 试据洛伦兹变换式在直尺  $AB$  系中计算两尺相擦而过(从  $A'$  与  $B$  相遇到  $B'$  与  $A$  相遇)所经时间  $\Delta t$ .

解  $A'$  与  $B$  相遇事件在  $AB$  系和  $A'B'$  系中的空时坐标分别记为  $x_B, t_1$  和  $x'_A, t'_1$ ,  $B'$  与  $A$  相遇事件在  $AB$  系和  $A'B'$  系中的空时坐标分别记为  $x_A, t_2$  和  $x'_B, t'_2$ , 且有

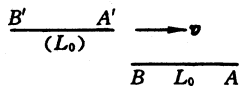


图 8-3

$$x_A - x_B = L_0, \quad x'_A - x'_B = L_0.$$

据洛伦兹变换式, 有

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{(t'_2 - t'_1) - \frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}$$

可解得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \frac{v}{c^2} L_0 / (1 - \sqrt{1 - \beta^2}),$$

即有

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) \frac{L_0}{v}.$$

8-6 一粒子在  $S'$  系的  $x'y'$  平面内以  $\frac{c}{2}$  的恒定速度作直线运动, 运动方向与  $x'$  轴的夹角  $\theta' = 60^\circ$ . 已知  $S'$  系相对  $S$  系以速度  $v = 0.6c$  沿  $x$  轴运动, 试据洛伦兹变换式求出粒子在  $S$  系  $xy$  平面上的运动轨迹, 若为直线, 再求出此直线的斜率.

解 粒子在  $S'$  系中的运动方程为

$$x' = \frac{ct'}{2} \cos \theta', \quad y' = \frac{ct'}{2} \sin \theta',$$

据洛伦兹变换式, 有

$$x' = (x - vt) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad y' = y,$$

$$t' = \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

联立上述诸式, 可得

$$x = \frac{c}{2} \cos \theta' \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) + vt,$$

$$y = \frac{c}{2} \sin \theta' \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

计算后, 即得粒子在  $xy$  平面上的运动方程:

$$x = 0.74ct, \quad y = 0.30ct,$$

运动轨迹方程为

$$y = \frac{15}{37}x,$$

是一条直线, 其斜率为

$$\tan \theta = \frac{15}{37} = 0.405 \quad (\theta = 22^\circ).$$

8-7  $S$  系中有一静止时各边长为  $a$  的正方形面板, 如图 8-4 所示. 今使面板沿其对角线方向匀速运动, 速度大小为  $v$ . 某学生将  $v$  沿面板静止时的两条直角边方向分解, 每一个方向上的分速度大小

均为  $v' = v/\sqrt{2}$ . 考虑到每一直角边的长度收缩, 他认为  $S$  系中运动面板的形状将如图 8-5 所示, 是一个各边长为  $a' = \sqrt{1-\beta'^2}a$  ( $\beta' = v'/c$ ) 的正方形.

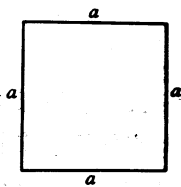


图 8-4

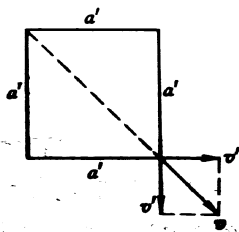


图 8-5

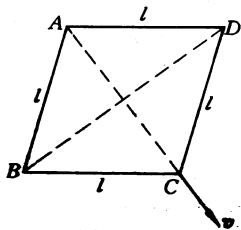


图 8-6

试分析地判定该学生的结论是否正确, 并给出运动面板的正确形状及各边长度和面积.

**解** 该学生的结论不正确, 因为运动物体沿运动方向上线度的收缩不可分解为沿分运动方向的线度收缩.

运动面板的正确形状如图 8-6 所示, 与运动方向垂直的对角线  $BD$  长度仍为  $\sqrt{2}a$ , 沿运动方向的对角线  $AC$  长度将收缩为  $\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{2}a$ , 其中  $\beta = v/c$ . 运动面板成菱形, 各边长为

$$l = \left[ \left( \frac{1}{2} \sqrt{2}a \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{2}a \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2-\beta^2}a.$$

菱形面积为

$$S = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{2}a \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot \sqrt{2}a$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}a^2,$$

可见运动面板的面积确实收缩为静止面积的  $\sqrt{1-\beta^2}$  倍.

**8-8**  $\pi$  介子静止时的平均寿命为  $2.5 \times 10^{-8}$  s, 在实验室中测得  $\pi$  介子的平均运动距离为 375 m, 试求  $\pi$  介子相对实验室的速度.

**解**  $\pi$  介子运动时的平均寿命  $\tau$  与静止时的平均寿命  $\tau_0$  以及运动速度  $v$  的关系为

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

它的平均运动距离为

$$l = v\tau = v\tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2},$$

由此可解得

$$v = \frac{l}{\tau_0} / \sqrt{1 + \left(\frac{l}{\tau_0 c}\right)^2} = 2.9994 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.9998c.$$

**8-9** 静长为  $l$  的飞船以恒定速度  $v$  相对惯性系  $S$  运动, 某时刻从飞船头部发出无线电信号, 试问飞船观察者认为信号经过多长时间到达飞船尾部? 再问  $S$  系中的观察者认为信号经过多长时间到达飞船尾部?

**解** 飞船观察者认为信号经

$$\Delta t' = l/c$$

时间, 到达飞船尾部.  $S$  系中的观察者认为飞船动长为  $\sqrt{1 - \beta^2}l$ , 无线电信号相对飞船尾部的传播速度为  $c + v$ , 信号经

$$\Delta t = \sqrt{1 - \beta^2}l / (c + v) = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \frac{l}{c}$$

时间, 到达飞船尾部.

需要注意的是

$$\Delta t' \neq \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t,$$

因为  $\Delta t'$  是飞船系中两个观察者合作测得的时间间隔. 同样需要注意,

$$\Delta t \neq \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t',$$

因为  $\Delta t$  是  $S$  系中两个观察者合作测得的时间间隔.

**8-10** 一艘宇宙飞船以  $0.8c$  的速度于中午飞经地球, 此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点.

(1) 按飞船上的时钟于午后 12 点 30 分飞船飞经一星际宇航站, 该站相对地球固定, 其时钟指示的是地球时间, 试问按宇航站的时钟飞船何时到达该站?

(2) 试问按地球上的坐标测量, 宇航站离地球多远?

(3) 于飞船时间午后 12 点 30 分从飞船向地球发送无线电信

号,试问地球上的观察者何时(按地球时间)接收到信号?

(4) 若地球上的观察者在接收到信号后立即发出应答信号,试问飞船何时(按飞船时间)接收到应答信号?

解 (1) 飞船测得的  $\tau_0 = 30 \text{ min}$  为本征时间,据运动时钟计时率变慢公式,可得地球系测得的时间间隔为

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2} = 50 \text{ min},$$

即宇航站时钟读数为 12 点 50 分时,飞船到达该站.

(2) 地球系测得宇航站与地球相距

$$l = v\tau = 7.2 \times 10^{11} \text{ m}.$$

(3) 对地球观察者来说,无线电信号发自宇航站所在地,故传至地球需时

$$l/c = 40 \text{ min}.$$

飞船飞行时间加信号传播时间,共计  $(50+40)\text{min}$ ,因此地球观察者于 1 点 30 分接收到信号.

(4) 有两种解法.

方法一:从地球参考系来考察.设飞船向地球发出信号至接收到地球应答信号共需时间(地球时间) $t$ ,在这段时间内飞船信号传播了  $l$  距离,应答信号传播了  $l+0.8ct$  距离,故有

$$t = \frac{0.8ct + 2l}{c} = \frac{2l}{0.2c} = 400 \text{ min}.$$

将上述时间变换到飞船系,对应的飞船时间(本征时间)为

$$t' = \sqrt{1 - \beta^2}t = 240 \text{ min},$$

考虑到飞船发信号时刻为 12 点 30 分,故飞船于

午后 4 点 30 分

接收到应答信号.

方法二:从飞船参考系来考察.飞船系认为发出的信号需经时

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \beta^2}l/(c - 0.8c) = 120 \text{ min}$$

方被地球接收,地球应答信号也需经时  $\Delta t'$  被飞船接收,共计经时

$$t' = 2\Delta t' = 240 \text{ min}.$$

与第一种解法结果相同.

8-11 在某惯性系的一个平面上有两条相距  $H$  的平行直线,另



有一静长为  $L_0 = \alpha H > H$  的细杆, 今使细杆在该平面上作匀速运动, 速度  $v$  的方向与两直线平行, 细杆与平行直线夹角为  $\phi$ , 而细杆恰好能在这两条平行直线之间运动, 即细杆两个端点分别靠近两条平行直线, 如图 8-7 所示.

- (1) 若  $\alpha$  为定值, 试求  $\phi$  与  $v$  之间的函数关系;
- (2) 确定  $\phi$  的极小值  $\phi_{\min}$  和极大值  $\phi_{\max}$ .

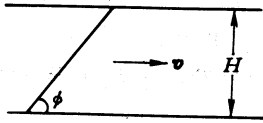


图 8-7

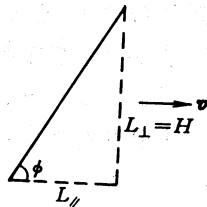


图 8-8

解 (1) 对运动细杆, 参照图 8-8, 有

$$L_{\perp} = H, \quad L_{\parallel} = H \cot \phi.$$

考虑到运动方向的长度收缩,  $L_{\parallel}$  的静长应为

$$L_{\parallel,0} = L_{\parallel} / \sqrt{1 - \beta^2} = H \cot \phi / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c.$$

细杆静长为

$$L_0 = (L_{\perp}^2 + L_{0,\parallel}^2)^{\frac{1}{2}} = \left( 1 + \frac{\cot^2 \phi}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} H,$$

因  $L_0 = \alpha H$ , 可解得

$$\tan \phi = 1 / \sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)},$$

即有  $\phi = \arctan(1 / \sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)})$ ,  $\beta = v/c$ .

(2)  $\phi$  的极小值在  $\beta=0$  时取得, 即有

$$v = 0 \text{ 时, } \phi = \phi_{\min} = \arctan(1 / \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

$\phi$  的极大值在  $\beta \rightarrow 1$  时逼近, 即有

$$v \rightarrow c \text{ 时, } \phi = \phi_{\max} \rightarrow \pi/2.$$

8-12 氢原子静止时发出的一条光谱线  $H_{\beta}$  的波长为  $\lambda_0 = 410.1 \text{ nm}$ . 在极隧直射管中, 氢原子速率可达  $v = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$ , 试求此时在射线管前方的实验室观察者测得的谱线  $H_{\beta}$  的波长  $\lambda$ .

解 由多普勒效应公式

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_0,$$

可得  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{c}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \lambda_0 \approx (1-\beta)\lambda_0,$

将数据代入后,可得

$$\lambda = 409.4 \text{ nm}.$$

8-13 静止的钾原子光谱中有一对容易辨认的吸收线(K线和H线),其谱线的波长在395.0nm附近.来自牧夫星座一个星云的光中,在波长为447.0nm处发现了这两条谱线,试求该星云远离地球的“退行速度”.

解 由多普勒效应公式

$$\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_0,$$

可得  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{c}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_0,$

将数据代入后,可得

$$\beta = 0.123, \quad \text{即} \quad v = 0.123c.$$

8-14 如图8-9所示,实验室中粒子A以 $\frac{4}{5}c$ 速度朝右运动,粒子B以 $\frac{4}{5}c$ 速度朝左运动.试求随粒子A运动的参考系测得的粒子B运动速度大小.



实验室

图 8-9

解 随粒子A运动的参考系相对实验室参考系的速度记为 $v = \frac{4}{5}c$ ,

粒子B相对实验室参考系的速度记为 $u_x = -\frac{4}{5}c$ ,粒子B相对随A运动的参考系的运动速度大小便是

$$|u'_x| = \left| (u_x - v) / \left( 1 - \frac{v}{c^2} u_x \right) \right| = 0.976c.$$

8-15 惯性系 $S'$ , $S$ 间的关系如常所设,某光子在 $S'$ 系中沿 $y'$

轴运动,试由相对论速度变换式计算此光子在  $S$  系中的速度分量  $u_x, u_y$  以及速度大小  $u$ , 以此验证相对论速度变换式符合光速不变原理.

**解** 如常所设,  $S'$  系相对  $S$  系沿  $x$  轴运动, 速度为  $v$ , 则由

$$u'_x = 0, \quad u'_y = c,$$

可得

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = v,$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}u'_y}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \sqrt{1 - \beta^2}c,$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c.$$

**8-16** 如图 8-10 所示,  $S$  系中静止时的等腰直角三角板  $ABC$  沿其直角边  $BC$  方向匀速运动, 成为  $\angle C = 60^\circ$  的直角三角板.

(1) 计算此三角板运动速度  $v$ .

(2) 设某质点相对三角板以恒定的速率  $u$  沿  $AC$  边运动:

(2.A) 若  $AB$  边长为  $l$ , 试求  $S$  系测得的此质点从  $A$  运动到  $C$  的时间间隔  $\Delta t$ ;

(2.B) 再求  $S$  系测得的此质点运动方向与  $BC$  边延长线的夹角  $\phi$ , 证明  $\phi < 45^\circ$ ; 再以  $u \rightarrow 0$ 、 $u = v$ 、 $u \rightarrow c$ , 分别计算  $\phi$  值.

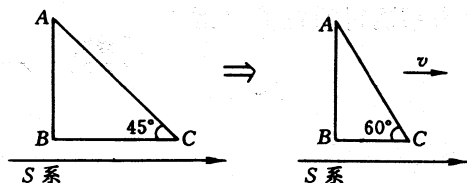


图 8-10

**解** (1) 对  $BC$  边, 有

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l_{\text{动}}}{l_{\text{静}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

即得 
$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}}c.$$

(2) 质点运动速度在三角板参考系中的分解,参考图 8-11,有

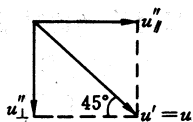
$$u' = u, \quad u'_{//} = \frac{\sqrt{2}}{2}u, \quad u'_{\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2}u;$$

在 S 系中的分解,参考图 8-12,有

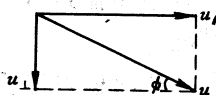
$$u_{//} = \frac{u'_{//} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{//}}, \quad u_{\perp} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_{\perp}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{//}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

(2.A) 质点从 A 到 C 的时间,可通过  $u_{\perp}$  分运动计算,可得

$$\Delta t = l/u_{\perp} = \sqrt{2} \left( \sqrt{3} + \frac{u}{c} \right) \frac{l}{u}.$$



三角板系



S 系

图 8-11

图 8-12

(2.B) 参考图 8-12,有

$$\tan \phi = u_{\perp} / u_{//} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_{\perp}}{u'_{//} + v} = \frac{u}{\sqrt{3}u + 2c},$$

得 
$$\phi = \arctan \frac{u}{\sqrt{3}u + 2c} < 45^\circ,$$

进而得

$$\begin{aligned} u \rightarrow 0 \text{ 时, } \phi &\rightarrow 0; \\ u = v \text{ 时, } \phi &= 13.46^\circ; \\ u \rightarrow c \text{ 时, } \phi &\rightarrow 15^\circ. \end{aligned}$$

**8-17** 光在流动的水中传播,在相对水静止的参考系中,光的传播速度为  $c/n$ ,已知水在实验室中的流速为  $v \ll c$ ,试求实验室中沿着水流方向和逆着水流方向分别测得的光速  $c_+$  和  $c_-$ .

**解** 在相对水静止的参考系中光速  $u' = c/n$ ,在实验室参考系

中,顺着水流方向的光速为

$$u_+ = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} = \frac{c + nv}{n + \beta} \approx \left( \frac{c}{n} + v \right) \left( 1 - \frac{\beta}{n} \right) \approx \frac{c}{n} + v - \frac{\beta c}{n^2},$$

即有 
$$c_+ = u_+ = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

在实验室参考系中,逆着水流方向的光速为

$$c_- = u_- = \frac{u' - v}{1 - \frac{v}{c^2}u'} \approx \frac{c}{n} - v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

**8-18** 如图 8-13 所示,一块玻璃板以速度  $v$  向右运动. 在  $A$  点有一闪光灯,它发出的光通过玻璃板后到达  $B$  点. 已知  $A, B$  之间的距离为  $L$ ,玻璃板在其静止的坐标系中的厚度为  $D$ ,玻璃的折射率为  $n$ ,试求光从  $A$  点传播到  $B$  点所需时间  $\Delta t$ . (只讨论光比玻璃板先到达  $B$  点的情况.)

**解** 光在玻璃板内传播时相对本题背景参考系的速度为

$$c^* = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{c}{n}} = \frac{c + nv}{n + \beta}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

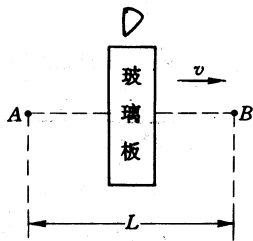


图 8-13

光通过玻璃板的时间记为  $\Delta t_1$ , 则有

$$\Delta t_1 = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} D}{c^* - v} = \sqrt{1 - \beta^2} D \frac{n + \beta}{c(1 - \beta^2)} = \frac{(n + \beta) D}{c \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

光通过真空的时间记为  $\Delta t_2$ , 则有

$$\begin{aligned} \Delta t_2 &= \frac{L - c^* \Delta t_1}{c} = \frac{L}{c} - \frac{1}{c} \frac{c + nv}{n + \beta} \frac{(n + \beta) D}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{L}{c} - \frac{(1 + n\beta) D}{c \sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

光从  $A$  点到  $B$  点共需时间

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c} + \frac{D}{c \sqrt{1 - \beta^2}} [(n + \beta) - (1 + n\beta)]$$

$$t_1 = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{(t'_1 - t'_2) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{D}{n} + \frac{v}{c^2} D}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{Dn + \beta D}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{D(n + \beta)}{c \sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$= \frac{L}{c} + \frac{D}{c\sqrt{1-\beta^2}}(n-1)(1-\beta).$$

**8-19 惯性系  $S'$  中在  $t'_1=t'_2$  时刻, 质点 1 和 2 分别位于  $x'_1, y'_1$  和  $x'_2=x'_1, y'_2 \neq y'_1$  位置, 速度分别为  $u'_1=0$  和  $u'_2=u'_2 j$ , 受力分别为  $F'_1=F'_{1y} j$  和  $F'_2=F'_{2y} j$ , 且有  $F'_{2y}=-F'_{1y}$ , 即有  $F'_1+F'_2=0$ . 试证在惯性系  $S$  中质点 1 和 2 也在同一时刻  $t_1=t_2$  受力  $F_1$  和  $F_2$ , 但  $F_1+F_2 \neq 0$ .**

证 由

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_1 = t'_2, \quad x'_1 = x'_2,$$

得

$$t_1 = t_2,$$

即在  $S$  系中质点 1 和 2 也同时受力.

又据力变换式, 得

$F_1$ :

$$F_{1x} = \left[ F'_{1x} + \frac{v}{c^2} (F'_1 \cdot u'_1) \right] / \left( 1 + \frac{v}{c^2} u'_{1x} \right) = 0,$$

$$F_{1y} = \sqrt{1-\beta^2} F'_{1y} / \left( 1 + \frac{v}{c^2} u'_{1x} \right) = \sqrt{1-\beta^2} F'_{1y},$$

$F_2$ :

$$F_{2x} = \left[ F'_{2x} + \frac{v}{c^2} (F'_2 \cdot u'_2) \right] / \left( 1 + \frac{v}{c^2} u'_{2x} \right) = \frac{v}{c^2} F'_{2y} u'_2$$

$$= -\frac{v}{c^2} u'_2 F'_{1y},$$

$$F_{2y} = \sqrt{1-\beta^2} F'_{2y} / \left( 1 + \frac{v}{c^2} u'_{2x} \right) = \sqrt{1-\beta^2} F'_{2y}$$

$$= -\sqrt{1-\beta^2} F'_{1y},$$

即有

$$F_1 + F_2 = -\frac{v}{c^2} u'_2 F'_{1y} i \neq 0.$$

**8-20** 一核弹含 20 kg 的钚, 爆炸后生成物的静质量比原来小万分之一 ( $1/10^4$ ).

(1) 爆炸中释放了多少能量?

(2) 如果爆炸持续了  $1 \mu\text{s}$ , 平均功率多大?

解 (1) 爆炸释放能量为

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 20 \times 10^{-4} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 1.8 \times 10^{14} \text{ J}.$$

(2) 平均功率为

$$\bar{P} = \Delta E / \Delta t = (1.8 \times 10^{14} / 10^{-6}) \text{ W} = 1.8 \times 10^{20} \text{ W}.$$

**8-21** 聚变过程中 4 个氢核转变成 1 个氦核,同时以各种辐射形式放出能量.氢核质量 1.0081u(原子单位,1u=1.66×10<sup>-27</sup> kg),氦核质量 4.0039 u,试计算 4 个氢核聚合为 1 个氦核时所释放的能量.

解 释放的能量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta m \cdot c^2 \\ &= (4 \times 1.0081 - 4.0039) \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 4.26 \times 10^{-12} \text{ J}. \end{aligned}$$

**8-22** 某粒子在惯性系  $S$  中具有的能量为 500 MeV,动量为 400 MeV/c,而在惯性系  $S'$  中具有的能量为 583 MeV.

(1) 计算该粒子的静能;

(2) 计算该粒子在  $S'$  系中的动量;

(3) 设  $S'$  系相对  $S$  系沿粒子运动方向运动,试求  $S'$  系相对  $S$  系的运动速度.

解  $S$  系:  $E=500 \text{ MeV}$ ,  $p=400 \text{ MeV}/c$ ;

$S'$  系:  $E'=583 \text{ MeV}$ .

(1)  $S$  系中,据

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

得静能  $E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = 300 \text{ MeV}$ .

(2)  $S'$  系中,粒子动量为

$$p' = \sqrt{E'^2 - E_0^2} / c = 500 \text{ MeV}/c.$$

(3) 设  $S'$  系相对  $S$  系沿  $x$  轴方向(即粒子运动方向)的速度为  $v$ ,则据变换式

$$E = (E' + v p') / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

可得

$$\sqrt{1 - \beta^2} E = E' + \beta c p'.$$

将数据代入后,解得

$$\beta = -0.18, \quad v = -0.18c.$$

**8-23** 静质量为  $m_0$  的粒子在恒力作用下,从静止开始加速,经过  $\Delta t$  时间,粒子的动能为其静能的  $n$  倍. 试求:

- (1) 粒子达到的速度  $v$ ;
- (2) 粒子获得的动量  $p$ ;
- (3) 粒子所受冲量  $I$ ;
- (4) 恒力大小  $F$ .

解 (1) 由

$$nE_0 = E_k = mc^2 - m_0c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E_0,$$

得  $\beta = \sqrt{n(n+2)}/(n+1), \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}c.$

(2) 此时粒子质量为

$$m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2} = (n+1)m_0,$$

动量为  $p = mv = \sqrt{n(n+2)}m_0c.$

(3) 由质点动量定理,得

$$I = p = \sqrt{n(n+2)}m_0c.$$

(4) 最后可得

$$F = I/\Delta t = \sqrt{n(n+2)}m_0c/\Delta t.$$

**8-24** 两个静质量相同的粒子,一个处于静止状态,另一个的总能量为其静能的 4 倍. 当此两粒子发生碰撞后粘在一起,成为一个复合粒子,试求复合粒子的静质量与碰撞前单个粒子静质量的比值.

解 给出两个解法如下.

方法一: 将单个粒子静质量记为  $m_0$ , 运动粒子速度记为  $v$ , 则有

$$4E_0 = E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}E_0, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

解得  $\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{15}}{4}c.$

碰后复合粒子动质量记为  $M$ , 静质量记为  $M_0$ , 运动速度记为  $u$ , 则有

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 = 4m_0 + m_0 = 5m_0,$$



$$u = \frac{m_0 v}{M \sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} c,$$

$$M_0 = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} M = \sqrt{10} m_0,$$

所求比值为

$$M_0/m_0 = \sqrt{10}.$$

方法二：对于运动粒子，由

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + E_0^2, \quad E_1 = 4E_0,$$

解得

$$p_1^2 c^2 = 15E_0^2.$$

对复合粒子，由

$$E^2 = p^2 c^2 + M_0^2 c^4, \quad E = E_1 + E_0 = 5E_0, \quad p = p_1,$$

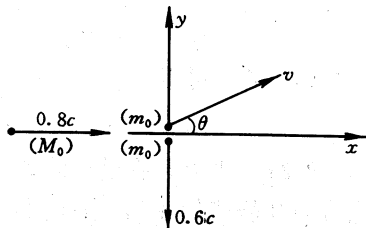
解得

$$M_0^2 c^4 = 10E_0^2 = 10m_0^2 c^4,$$

即有

$$M_0 = \sqrt{10} m_0, \quad M_0/m_0 = \sqrt{10}.$$

**8-25** 如图 8-14 所示，一个以  $0.8c$  的速度沿  $x$  方向运动的粒子衰变成两个静质量同为  $m_0$  的粒子，其中一个粒子以  $0.6c$  的速度沿  $-y$  方向运动。若将衰变前粒子的静质量记为  $M_0$ ，试求：



(1) 另一个粒子运动速度的大小  $v$  和方向角  $\theta$ ；

(2) 比值  $m_0/M_0$ 。

**解** 原粒子动质量

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{5}{3} M_0,$$

衰变后沿  $-y$  方向运动粒子的动质量为

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = \frac{5}{4} m_0,$$

衰变后另一个粒子的动质量为

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

图 8-14

由质量守恒,得

$$M = m_1 + m_2 = \left( \frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) m_0. \quad (1)$$

(1)  $x, y$  方向动量分量守恒, 分别有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c \cos \theta = 0.8Mc = \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) m_0 c, \quad (2)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c \sin \theta = 0.6m_1 c = \frac{3}{4} m_0 c. \quad (3)$$

两式平方和,得

$$\left( \frac{1}{1-\beta^2} - 1 \right) = \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^2,$$

可简化为

$$(\gamma^2 - 1) = \left( 1 + \frac{4}{5} \gamma \right)^2 + \frac{9}{16}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

解得  $\gamma = 5.6944, \quad v = 0.984c.$

用③式除以②式,得

$$\tan \theta = \frac{3}{4} / \left( 1 + \frac{4}{5} \gamma \right) = 0.135, \quad \theta = 7.69^\circ.$$

(2) 将  $M = \frac{5}{3} M_0$  与①式联立,得

$$M_0 = \frac{3}{5} M = \frac{3}{5} \left( \frac{5}{4} + \gamma \right) m.$$

则  $\frac{m_0}{M_0} = \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \gamma \right)^{-1} = 0.24.$

**8-26** 氢原子基态能量为  $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ , 氢原子  $n=2, 3, \dots$  激发态的能量为  $E_n = E_0/n^2$ . 实验室中两个处于基态的氢原子 1, 2 各以速度  $v_1, v_2 (v_1, v_2 \ll c)$  朝着对方运动, 碰撞后, 沿原  $v_1$  和  $v_2$  方向分别发射出频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的光子, 其中  $\nu_1$  对应从  $n=4$  激发态跃迁到基态发射的光子频率,  $\nu_2$  对应从  $n=2$  激发态跃迁到基态发射的光子频率. 发射后, 两个氢原子静止地处于基态, 试求  $v_1$  和  $v_2$ .

**解** 将氢原子质量记为  $m$ , 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = h\nu_1 + h\nu_2, & m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}, \\ mv_1 - mv_2 = h \frac{\nu_1}{c} - h \frac{\nu_2}{c}, \\ h\nu_1 = \left(\frac{1}{4^2} - 1\right)E_0 = -\frac{15}{16}E_0, \\ h\nu_2 = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)E_0 = -\frac{3}{4}E_0. \end{cases}$$

由上述方程组可求得

$$v_1^2 + v_2^2 = -27E_0/8m, \quad v_1 - v_2 = -3E_0/16mc,$$

数值计算后,可得

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 6.64 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_1 - v_2 = 0.82 \text{ m/s},$$

则

$$v_1 = v_2 = 4.70 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

**8-27** 设有一处于激发态的原子以速度  $v$  运动,当其发射一个能量为  $E'$  的光子后衰变至其基态,并使原子处于静止状态,此时原子的静质量为  $m_0$ . 已知激发态比基态能量高  $E_0$ ,试证:

$$E' = \left(1 + \frac{E_0}{2m_0c^2}\right)E_0.$$

(原子激发态、基态能量均在原子静止时定义.)

**证** 原子处于激发态时的静质量记为  $m'_0$ ,则有

$$m'_0c^2 = m_0c^2 + E_0,$$

又由动量守恒,得

$$E'/c = \frac{m'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}v,$$

因  $v$  是小量,略去高阶小量后,相继可得

$$E'/c = m'_0v,$$

$$v = E'c/m'_0c^2 = E'c/(m_0c^2 + E_0).$$

由能量守恒,可得

$$E' = \frac{m'_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = \frac{m_0c^2 + E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2,$$

将  $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E'}{m_0 c^2 + E_0} \right)^2$  代入后, 可得

$$\begin{aligned} E' &= (m_0 c^2 + E_0) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{E'^2}{(m_0 c^2 + E_0)^2} \right] - m_0 c^2 \\ &= E_0 + \frac{E'^2}{2(m_0 c^2 + E_0)}, \end{aligned}$$

或整理成

$$E'^2 - 2(m_0 c^2 + E_0)E' + 2(m_0 c^2 + E_0)E_0 = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} E' &= (m_0 c^2 + E_0) \pm m_0 c^2 \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{m_0 c^2} \right)^2} \\ &\approx (m_0 c^2 + E_0) \pm m_0 c^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{m_0^2 c^4} \right), \end{aligned}$$

即

$$E' = \begin{cases} 2m_0 c^2 + E_0 - \frac{E_0^2}{2m_0 c^2}, \\ E_0 + \frac{E_0^2}{2m_0 c^2}. \end{cases}$$

因  $E_0, E' \ll m_0 c^2$ , 故第一个解应舍去, 即得

$$E' = \left( 1 + \frac{E_0}{2m_0 c^2} \right) E_0.$$

**8-28** 静质量为  $m_0$  的质点, 开始时静止在  $x=A$  处, 而后在线性回复力  $F_x = -kx$  ( $k$  为正的常量) 作用下在  $x$  轴上往返运动. 考虑相对论效应, 试求质点速率  $v$  与所到位置  $x$  的关系.

**解** 与牛顿力学中讨论过的内容相同, 线性回复力是保守力, 取  $x=0$  点为势能零点,  $x$  位置势能为

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

由能量守恒, 可得

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{2} kA^2 + m_0 c^2,$$

继而有

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{k(A^2 - x^2)}{2m_0 c^2},$$

$$\text{得 } v = \frac{\sqrt{k(A^2 - x^2)}}{2m_0c^2 + k(A^2 - x^2)} \sqrt{4m_0c^2 + k(A^2 - x^2)}c.$$

**8-29** 据爱因斯坦的广义相对论,当星体中的物质因引力而塌缩到极小的球半径范围内时,其周围的引力场可以强到使光子不能离开星体而去,外部世界将“看”不到此星体,称之为黑洞.已知太阳、地球、电子质量分别为  $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ ,  $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 假想通过挤压,它们分别成为黑洞,试估算各自的黑洞半径.

**解** 采用光子绕黑洞作圆周运动的半经典模型来估算黑洞半径,则有

$$mc^2/R = GMm/R^2,$$

其中  $m$  为光子质量,  $M$  为黑洞质量,  $R$  为黑洞半径. 可求得

$$R = GM/c^2,$$

代入数据,分别算得

$$\text{太阳: } R \approx 1.5 \times 10^3 \text{ m},$$

$$\text{地球: } R \approx 4.4 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\text{电子: } R \approx 6.8 \times 10^{-58} \text{ m}.$$

## B 组

**8-30** 三个惯性系  $S, S', S''$  如图 8-15 所示,其中  $S'$  系沿  $S$  系的  $x$  轴以匀速度  $v$  相对  $S$  系运动,  $x'$  轴与  $x$  轴重合,  $y'$  轴与  $y$  轴平行.  $S''$  系沿  $S'$  系的  $y'$  轴以匀速度  $v$  相对  $S'$  系运动,  $y''$  轴与  $y'$  轴重合,

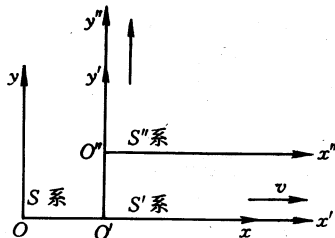


图 8-15

$x''$ 轴与  $x'$ 轴平行. 三个坐标系的原点  $O, O', O''$ 重合时, 设定  $t=t'=t''=0$ . 试问  $S$  系中任意  $t$  时刻  $x''$  轴在  $xy$  平面上的投影是否为直线? 若为直线, 进而确定它的斜率.

解 由  $S'' \sim S'$  和  $S' \sim S$  间的下述洛伦兹变换式:

$$y'' = \frac{y' - vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

可得 
$$y'' = \frac{y}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vt - \beta^2 x}{1 - \beta^2}.$$

$S''$ 系中  $x''$  轴的直线方程为  $y''=0$ , 代入上式, 即得  $x''$  轴在  $S$  系中的投影线方程为

$$y = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}x + \frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

故此投影线仍是直线, 斜率为

$$k = -\beta^2 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

**8-31** 惯性系  $S, S'$  间的相对关系如图 8-16 所示,  $O, O'$  重合时  $t=t'=0$ .

(1) 设在  $S'$  系的  $O'x'y'$  平面上有一个以  $O'$  为中心、 $R$  为半径的固定圆环, 试在  $S$  系中写出  $t$  时刻此圆环在  $Oxy$  平面投影曲线的方程;

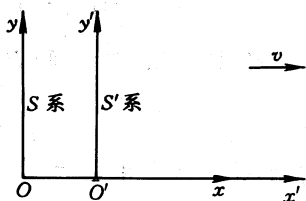


图 8-16

(2) 在  $S'$  系中从  $t'=0$  时刻开始有两个质点  $P_1$  和  $P_2$ , 分别从  $x'=-R, y'=0$  和  $x'=R, y'=0$  位置以恒定的速率  $u$  逆时针方向沿圆环运动, 试问:

(2.A)  $S$  系中  $P_1, P_2$  各自在什么时刻(分别记为  $t_1, t_2$ )开始运动?

(2.B)  $S$  系认为  $P_1, P_2$  在什么时刻(记为  $t_3$ )第一次相距最远?

(3) 导出  $S$  系中质点  $P_2$  沿  $x$  轴的分运动  $x_2$  与时间  $t$  的函数关系, 并在  $t \gg R/v$  范围分析这一分运动的主要特征。(解答本小问时, 建议引入参量  $\omega' = u/R$ .)

解 (1) 将洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

代入  $S'$  系中圆方程

$$x'^2 + y'^2 = R^2,$$

即得所求方程为

$$\frac{(x - vt)^2}{(1 - \beta^2)R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

这是一个以  $x = vt, y = 0$  为中心,  $\sqrt{1 - \beta^2}R$  为短半轴,  $R$  为长半轴的椭圆.

(2)  $S'$  系中  $P_1$  和  $P_2$  开始运动的时空坐标分别为

$$t'_1 = 0, x'_1 = -R \quad \text{和} \quad t'_2 = 0, x'_2 = R.$$

(2.A) 据洛伦兹变换式

$$t = t' + \frac{v}{c^2}x' / \sqrt{1 - \beta^2},$$

得 
$$t_1 = -\frac{v}{c^2}R / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad t_2 = \frac{v}{c^2}R / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

(2.B)  $S'$  系中  $P_1$  和  $P_2$  同时于

$$t'_3 = \frac{\pi R}{2u}$$

时刻, 第一次分别到达  $x'_3 = 0, y'_3 = -R$  和  $x'_3 = 0, y'_3 = R$  位置. 该时刻  $P_1, P_2$  的  $x'$  坐标同为  $x'_3 = 0$ , 因此  $S$  系中这两个点事件的时刻同为

$$t_3 = \frac{t'_3 + \frac{v}{c^2}x'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\pi R}{2u \sqrt{1 - \beta^2}},$$

$S$  系中此时  $P_1, P_2$  的间距恰为椭圆长轴  $2R$ , 故相距最远.

(3)  $S'$  系中  $P_2$  沿  $x'$  轴的分运动为

$$x'_2 = R \cos \omega' t, \quad \omega' = u/R,$$

结合变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

即得  $x_2-t$  的下述函数关系:

$$x_2 = vt + \sqrt{1 - \beta^2} R \cos \left[ \omega' \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right].$$

$t \gg R/v$ , 即  $vt \gg R$  时, 近似有

$$x_2 = vt,$$

代入上式括号内, 可得

$$x_2 = vt + \sqrt{1 - \beta^2} R \cos(\sqrt{1 - \beta^2} \omega' t).$$

$P_2$  的这一分运动的主要特征是

i) 可分解为匀速运动和简谐振动的叠加;

ii) 简谐振动的振幅为  $A = \sqrt{1 - \beta^2} R$ , 与圆轨道沿  $x'$  轴直径的运动长度收缩对应;

iii) 引入  $S'$  系中简谐振动周期  $T' = 2\pi/\omega'$ , 则  $S$  系中简谐振动周期为  $T = 2\pi/\sqrt{1 - \beta^2} \omega' = T'/\sqrt{1 - \beta^2}$ , 与运动时钟计时率变慢对应.

**8-32** 惯性系  $S, S'$  间的相对运动关系如图 8-17 所示, 两根细长的直尺  $AB$  和  $A'B'$  的静止长度相同, 它们分别按图示方式静置于  $S$  和  $S'$  系中. 静止在  $A$  和  $B$  上的两个钟的计时率已按相对论的要求调好, 静止在  $A'$  和  $B'$  上的两个钟的计时率也已按相对

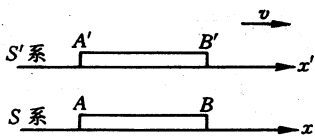


图 8-17

论的要求调好, 但这四个钟的零点都是按下述方式确定的: 当  $A$  钟与  $A'$  钟相遇时, 两钟均调到零点; 当  $B$  钟与  $B'$  钟相遇时, 两钟均调到零点.

设  $A$  与  $A'$  相遇时,  $A'$  发出光信号, 已知  $B'$  接收到光信号时,  $B'$  钟的读数为 1 个时间单位.

(1) 试问  $B$  接收到光信号时,  $B$  钟的读数为多少时间单位?

(2) 若  $B'$  接收到信号后, 立即发出应答光信号, 试问:

(2.A)  $A'$  接收到该应答信号时,  $A'$  钟的读数为多少时间单位?

(2.B)  $A$  接收到该应答信号时,  $A$  钟的读数为多少时间单位?

**解** 设  $AB$  和  $A'B'$  的静长为  $l_0$ .



(1)  $S'$  系认为  $AB$  长为  $\sqrt{1-\beta^2}l_0$ ,  $B'$  与  $B$  相遇时刻早于  $A'$  与  $A$  相遇时刻的时间为

$$\Delta t' = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

$A'$  发出的光信号经  $l_0$  到达  $B'$ , 所需时间为  $l_0/c$ , 故  $B'$  接收到信号时  $B'$  钟的读数应为

$$t'_B = \frac{l_0}{c} + \Delta t' = \frac{l_0}{c} + \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

已知  $t'_B=1$ , 可解得

$$\frac{l_0}{c} = \frac{\beta}{[\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})]}$$

$S$  系认为  $A'B'$  长为  $\sqrt{1-\beta^2}l_0$ ,  $B'$  与  $B$  相遇时刻晚于  $A'$  与  $A$  相遇时刻的时间为

$$\Delta t = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

$A'$  发出光信号经  $l_0$  到达  $B$  所需时间为  $l_0/c$ , 故  $B$  接收到信号时  $B$  钟的读数应为

$$\begin{aligned} t_B &= \frac{l_0}{c} - \Delta t = \frac{l_0}{c} \left( 1 - \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right) \\ &= \frac{\beta}{\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})} \frac{\beta - (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{\beta} \\ &= \frac{\beta - (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

(2. A)  $S'$  系认为  $A'$  发出光信号经  $l_0$  路程到达  $B'$ ,  $B'$  发出应答光信号经  $l_0$  路程到达  $A'$ , 共需时间  $2l_0/c$ , 故  $A'$  接收到应答信号时,  $A'$  钟的读数应为

$$\begin{aligned} t'_A &= \frac{2l_0}{c} = 2\beta / [\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})] \\ &= 1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

(2. B)  $S$  系中的  $A$  钟认为  $A'$  接收到应答信号时,  $A$  钟的读数

应为

$$t_A(1) = t'_A / \sqrt{1 - \beta^2} = 2l_0/c \sqrt{1 - \beta^2},$$

此时  $A'$  与  $A$  相距

$$\Delta l_{AA'} = vt_A(1) = 2vl_0/c \sqrt{1 - \beta^2}.$$

光信号又经  $\Delta l_{AA'}/c$  时间到达  $A$ , 故  $A$  接收到光信号时  $A$  钟的读数应为

$$\begin{aligned} t_A &= t_A(1) + \frac{\Delta l_{AA'}}{c} = \frac{2(1 + \beta)l_0}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{2\beta(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}[\beta + (1 - \sqrt{1 - \beta^2})]} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

**8-33** 飞船以  $v = \frac{3}{5}c$  匀速度背离地球远行. 某时刻飞船朝着地球发出无线电信号, 经地球反射后又被飞船所接收, 飞船中观察者测得前后所经时间为 60 s.

(1) 飞船发信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为  $l'_1$ ), 地球系认为飞船与地球相距多远( $l_1$ )?

(2) 地球反射此信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为  $l'_2$ ), 地球系认为飞船与地球相距多远( $l_2$ )?

(3) 飞船接收到反射信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为  $l'_3$ ), 地球系认为飞船与地球相距多远( $l_3$ )?

**解** 先求各小题中的  $l'_1, l'_2, l'_3$ .

飞船系中地球背离飞船的运动速度大小也是  $v = \frac{3}{5}c$ , 无线电信号发出后到达地球, 经反射, 再返回飞船被接收, 历时 60 s, 往返各经时间

$$\Delta t' = 30 \text{ s}.$$

飞船系认为无线电信号以  $c - v$  的速度“追击”地球, 经 30 s 追上地球, 故有

$$l'_1 = (c - v)\Delta t = 12c(\text{m}).$$

在 30 s 时间内,该信号走过路程即为  $l'_2$ ,得

$$l'_2 = c\Delta t' = 30c(\text{m}).$$

再经 30 s,地球反射信号被飞船接收,得

$$l'_3 = l'_2 + v\Delta t' = 48c(\text{m}),$$

或  $l'_3 = l'_1 + v \times (2\Delta t') = 48c(\text{m}).$

再求各小题中的  $l_1, l_2, l_3$ .

$l_1$  的计算:

如图 8-18 所示设置  $x', x$  轴. 飞船发信号时, 设与  $x$  轴上  $P_1$  点相遇,  $P_1$  点属地球系. 地球与  $P_1$  之间的距离即为所求  $l_1$ ,

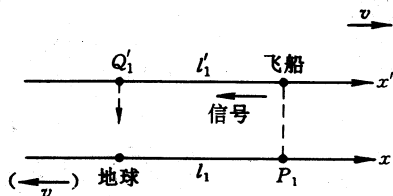


图 8-18

这一距离相当于静止在地球系中的一把尺子的长度, 飞船系中飞船发信号时刻记为  $t'_1$ , 设在  $t'_1$  时刻  $x'$  轴上的  $Q'_1$  点与地球相遇(地球系中并不认为  $P_1$  与飞船相遇时刻和地球与  $Q'_1$  相遇时刻相同), 飞船系中  $Q'_1$  与飞船的间距即为(1)问中的  $l'_1$ . 显然  $l'_1$  可解释为飞船系中测量随地球系一起运动的一把位于地球和  $P_1$  之间的运动尺子的长度, 即有

$$l'_1 = \sqrt{1 - \beta^2} l_1, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

得

$$l_1 = l'_1 / \sqrt{1 - \beta^2} = 15c(\text{m}).$$

$l_2$  的计算:

如图 8-19 所示, 设地球接收到信号, 随即反射信号时, 地球与  $x'$  轴上的  $Q'_2$  点相遇, 飞船系认为  $Q'_2$  与飞船间距即为  $l'_2$ .

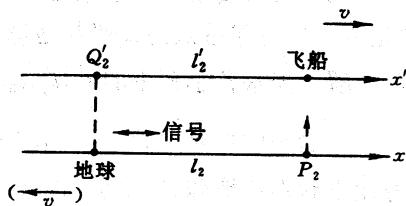


图 8-19

$Q'_2$  相对飞船静止,  $l'_2$  相当于  $Q'_2$

与飞船间一把静止尺子长度. 地球系中地球反射信号时刻记为  $t_2$ , 设在  $t_2$  时刻  $x$  轴上的  $P_2$  点与飞船相遇(飞船系中并不认为  $Q'_2$  与地球相遇时刻和飞船与  $P_2$  相遇时刻相同), 地球系中  $P_2$  与地球的间距即为(2)问中的  $l_2$ . 显然  $l_2$  可解释为地球系中测量随飞船系一起运动的

一把位于飞船和  $Q_2'$  之间的运动尺子的长度, 即有

$$l_2 = \sqrt{1 - \beta^2} l_2' = 24c(\text{m}).$$

$l_3$  的计算:

方法一: 仿照  $l_1$  的计算, 可得

$$l_3 = l_3' / \sqrt{1 - \beta^2} = 60c(\text{m}).$$

方法二: 飞船用一个时钟测得信号往返时间为

$$\Delta T' = 2\Delta t' = 60\text{s},$$

地球系认为这是一个运动时钟测得的结果. 地球系测得的该过程时间便为

$$\Delta T = \Delta T' / \sqrt{1 - \beta^2} = 75\text{s},$$

故有

$$l_3 = l_1 + v\Delta T = 60c(\text{m}).$$

**8-34** 宇航员乘宇宙飞船以  $0.8c$  的速度飞向 8 光年远、相对地球静止的星球, 然后立即以同样速率返回地球. 飞船上的钟在从地球出发时与地球上的钟同指零点, 飞船运动换向时间忽略不计, 设换向前后两瞬间飞船时钟读数相同. 假定飞船于 2000 年元旦起飞, 此后每年元旦宇航员和地球上的家人互发贺年电讯, 家人自 2001 年元旦起共发 20 封贺电, 试求两人各自收到对方贺电时自己钟表指示的时间.

**解** 地球系认定飞船到达该星球已历时 10 年, 返回地球又历时 10 年, 其间家人共发出 20 封贺电, 最后一封于 2020 年元旦飞船回到地球“瞬间”发出.

飞船认定自己遇星球已历时

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2} \times 8 \text{ l.y.}}{0.8c} = 6\text{a}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} = 0.6,$$

再遇地球又历时 6 年, 宇航员共发贺电 12 封.

(1) 家人发贺电 20 封, 宇航员接收如下:

第 1 封:

地面系认定发贺电时, 飞船与地球相距

$$l_1 = 0.8 \text{ l.y.},$$

经时

$$\Delta t_1 = l_1 / (c - 0.8c) = 4\text{a},$$

于

$$t_1 = 1 \text{ a} + \Delta t_1 = 5 \text{ a}$$

被宇航员接收. 考虑到宇航员运动时钟计时率变慢因素, 故宇航员接收时间为

$$t'_1 = \sqrt{1 - \beta^2} t_1 = 3 \text{ a}.$$

第 2 封:

相应的量为

$$l_2 = 2l_1 = 1.6 \text{ l. y.}, \quad \Delta t_2 = l_2 / (c - 0.8c) = 8 \text{ a},$$

$$t_2 = 2 \text{ a} + \Delta t_2 = 10 \text{ a},$$

宇航员接收时间为

$$t'_2 = \sqrt{1 - \beta^2} t_2 = 6 \text{ a}.$$

此时飞船已到达星球, 而后即反向运动返回地球.

第 3 封:

地球系认定飞船于 2010 年从星球返航时, 第 3 封贺电的信号已在空中传播过 7 光年的路程, 此时信号与飞船的距离为

$$l_3 = 8 \text{ l. y.} - 7 \text{ l. y.} = 1 \text{ l. y.},$$

经时

$$\Delta t_3 = \frac{l_3}{c + 0.8c} = \frac{10}{18} \text{ a}$$

被宇航员接收到. 飞船中宇航员接收时间为

$$t'_3 = t'_2 + \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t_3 = 6 \frac{1}{3} \text{ a}.$$

第  $i=4, 5, \dots, 20$  封:

第  $i$  封贺电发送时间比第 3 封晚  $(i-3)\text{a}$ , 这可等效为在地球背向飞船一侧与地球相距  $(i-3)\text{l. y.}$  远处与第 3 封贺电同时于 2003 年元旦发出. 飞船于地球时 2010 年元旦从星球返航时, 第  $i$  封贺电的信号已在空间传播过 7 光年的路程, 此时信号与飞船的距离  $l_2$  要比  $l_3$  多出  $(i-3)\text{l. y.}$ , 即为

$$l_i = l_3 + (i-3)\text{l. y.}.$$

经时

$$\Delta t_i = \frac{l_i}{c + 0.8c} = \frac{i-2}{1.8} \text{ a}, \quad i = 4, 5, \dots, 20$$

被宇航员接收到. 飞船中宇航员接收时间为

$$t'_i = t'_2 + \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t_i = \left( 5 \frac{1}{3} + \frac{i}{3} \right) \text{ a}.$$

小结:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t'_i/a$	3	6	$6\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	7	$7\frac{1}{3}$	$7\frac{2}{3}$	8	$8\frac{1}{3}$	$8\frac{2}{3}$
$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t'_i/a$	9	$9\frac{1}{3}$	$9\frac{2}{3}$	10	$10\frac{1}{3}$	$10\frac{2}{3}$	11	$11\frac{1}{3}$	$11\frac{2}{3}$	12

(2) 宇航员发贺电 12 封, 家人接收的时间

地面系认为宇航员发第 1 封贺电时与地球相距

$$l_1 = \frac{8}{6} \text{ l.y.},$$

宇航员发第  $i=2, 3, \dots, 6$  封贺电时与地球相距

$$l_i = il_1 = i \times \frac{8}{6} \text{ l.y.}.$$

对应的地面系时间分别为

$$t_1^* = \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_i^* = it_1^* = i \times \frac{10}{6} \text{ a}.$$

地面系认为家人收到第 1 封贺电的时间为

$$t_1 = t_1^* + \frac{l_1}{c} = 3 \text{ a}.$$

地面系认为家人收到第  $i=2, 3, 4, 5, 6$  封贺电的时间为

$$t_i = t_i^* + \frac{l_i}{c} = 3i \text{ a}.$$

地面系认为宇航员发第 7 封贺电时与地球相距

$$l_7 = l_5 = \frac{40}{6} \text{ l.y.},$$

此时地球时间为

$$t_7^* = 10 \text{ a} + \frac{10}{6} \text{ a},$$

家人接收贺电时间为

$$t_7 = t_7^* + \frac{l_7}{c} = 18\frac{1}{3} \text{ a}.$$

地面系认为宇航员发第 8 封贺电时与地球相距

$$l_8 = l_4 = \frac{32}{6} \text{ l.y.},$$

此时地球时间为

$$t_8^* = 10 \text{ 年} + 2 \times \frac{10}{6} \text{ a},$$

家人接收贺电时间为

$$t_8 = t_8^* + \frac{l_8}{c} = 18 \frac{2}{3} \text{ a}.$$

第 9 封贺电相应量为

$$l_9 = l_3 = \frac{24}{6} \text{ l.y.},$$

$$t_9^* = 10 \text{ a} + 3 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_9 = t_9^* + \frac{l_9}{c} = 19 \text{ a}.$$

第 10, 11, 12 封贺电相应量为

$$l_{10} = l_2 = \frac{16}{6} \text{ l.y.},$$

$$t_{10}^* = 10 \text{ a} + 4 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_{10} = t_{10}^* + \frac{l_{10}}{c} = 19 \frac{1}{3} \text{ a};$$

$$l_{11} = l_1 = \frac{8}{6} \text{ l.y.},$$

$$t_{11}^* = 10 \text{ a} + 5 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_{11} = t_{11}^* + \frac{l_{11}}{c} = 19 \frac{2}{3} \text{ a};$$

$$t_{12} = 20 \text{ a}.$$

小结:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_i/\text{a}$	3	6	9	12	15	18	$18 \frac{1}{3}$	$18 \frac{2}{3}$	19	$19 \frac{1}{3}$	$19 \frac{2}{3}$	20

**8-35** 如图 8-20 所示,光源  $S$  向全反射体  $S'$  发射一束平行光,发光功率为  $P_0$ . 设  $S'$  以匀速度  $v$  沿其法线方向朝  $S$  运动,试求  $S$  接收到的反射光功率  $P$ .

**解** 设置随光源的  $S$  系和随反射体的  $S'$  系. 光源在  $S$  系中单位时间内发出的第  $i$  种

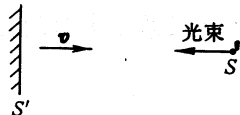


图 8-20

光子的频率和光子数分别记为  $\nu_{0i}$  和  $n_{0i}$ , 则有

$$P_0 = \sum_i n_{0i} h \nu_{0i}$$

反射体因多普勒效应, 接收到的和反射出去的光子频率同为

$$\nu'_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_{0i}, \quad \beta = v/c.$$

同样由于多普勒效应, 光源  $S$  接收到的光子频率为

$$\nu_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu'_i = \frac{1+\beta}{1-\beta} \nu_{0i}.$$

考虑到光源  $S$  的 1 个本征单位时间折合成  $S'$  系的  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  个单位时间,  $S'$  系认为光源  $S$  在  $S'$  系的 1 个单位时间内发出的光子数应为

$$n'_{0i} = \sqrt{1-\beta^2} n_{0i}.$$

$S'$  系中的观察者还认为  $S$  边运动边发射光子,  $S'$  系中单位时间内由  $S$  发出的  $n'_{0i}$  个光子都应处于图 8-21 中画斜线的区域内, 它们可在而后的

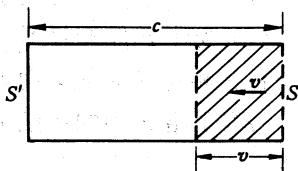


图 8-21

$$\Delta t' = \frac{c-v}{c} \times \text{单位时间}$$

内, 全部到达  $S'$ . 故在  $S'$  系中单位时间内到达反射体, 接着又被反射回去的光子数应为

$$n''_{0i} = \frac{n'_{0i} \times \text{单位时间}}{\Delta t'} = \frac{c}{c-v} \sqrt{1-\beta^2} n_{0i} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} n_{0i}.$$

对  $S$  系中的观察者, 反射体以速率  $v$  朝  $S$  运动, 同理,  $S$  在单位时间内接收到的光子数为

$$n_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} n''_{0i} = \frac{1+\beta}{1-\beta} n_{0i}.$$

综合上述两个方面因素,  $S$  接收到的光功率为

$$P = \sum_i n_i h \nu_i = \left( \sum_i n_{0i} h \nu_{0i} \right) \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2,$$



即

$$P = \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^2 P_0.$$

$S$  接收到的反射光功率大于发射出去的光功率,一方面是因为反射体受到光压作用,为维持反射体的匀速运动,外力必须做功,此功转化为反射光的能量;另一方面是因为  $S$  的接收时间间隔短于  $S$  的发射时间间隔.

**8-36** 如图 8-22 所示,在某太空惯性系  $S$  中,飞船  $A$  和飞船  $B$  以相同速率  $\beta c$  作匀速直线航行,飞船  $A$  的航行方向与  $x$  轴方向一致,飞船  $B$  的航行方向与  $x$  轴负方向一致,两飞船航线之间的距离为  $d$ . 当  $A$  和  $B$  靠得最近时,从  $A$  向  $B$  发出一束无线电联络信号.

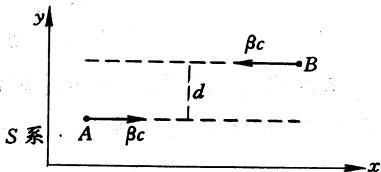


图 8-22

(1) 为使  $B$  能接收到信号,  $A$  中的宇航员认为发射信号的方向应与自己相对  $S$  系的运动方向之间成什么样的夹角?

(2) 飞船  $B$  中的宇航员接收到信号时,认为自己与飞船  $A$  相距多远?

**解** (1) 在  $S$  系中,  $B$  的速度  $u_x = -\beta c$ , 因此在  $A$  参考系中,  $B$  的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \Big|_{v=\beta c} = -\frac{2\beta c}{1 + \beta^2}.$$

参考图 8-23,  $A$  参考系中  $A$  发射的无线电信号要到达  $B$ , 要求

$$c \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -u'_x,$$

由此解得所求夹角为

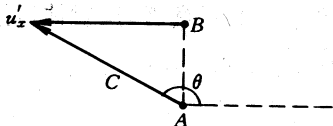


图 8-23

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

或等效表述为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2\beta}{1 - \beta^2}$$

(2) 因对称性,  $B$  参考系中  $A$  的速度为

$$u_x'' = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$$

参考图 8-24, 有

$$\begin{aligned} l'' &= \sqrt{d^2 + (u_x'' \Delta t'')^2} = \sqrt{d^2 + \left(u_x'' \frac{d}{c}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2} d, \end{aligned}$$

最后可得所求距离为

$$l'' = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)^2 + 4\beta^2}}{1 + \beta^2} d.$$

**8-37**  $S$  系中有一个静止时各边长为  $l$  的正方形  $ABCD$  面板, 今使其沿  $AB$  边方向匀速运动, 速度为  $v$ , 如图 8-25 所示. 设质点  $P$  从  $A$  点出发, 在面板参考系中以恒定的速率  $u$  沿  $ABCD$  绕行一周.

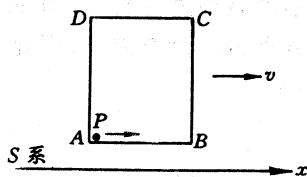


图 8-25

(1) 分别在面板参考系和  $S$  系中计算质点  $P$  从  $A$  点到  $B$  点所经时间  $t'_{AB}$  和  $t_{AB}$ ;

(2) 分别在面板参考系和  $S$  系中计算质点  $P$  从  $B$  点到  $C$  点所经时间  $t'_{BC}$  和  $t_{BC}$ ;

(3) 分别在面板参考系和  $S$  系中计算质点  $P$  从  $A$  点出发绕行一周所经时间  $t'_{ABCD}$  和  $t_{ABCD}$ .

**解** (1) 很易算得

$$t'_{AB} = l/u.$$

在  $S$  系中质点  $P$  从  $A$  到  $B$  的速度为

$$u_x = (u + v) / \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) = c^2(u + v) / (c^2 + uv),$$

$S$  系认为质点  $P$  相对  $B$  点的速度大小为

$$u_{AB} = u_x - v = u(c^2 - v^2)/(c^2 + uv),$$

质点  $P$  从  $A$  到  $B$  所经时间便是

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} l}{u_{AB}} = \frac{1 + uv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{l}{u}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

顺便一提,  $t_{AB}$  与  $t'_{AB}$  间的关系为

$$t_{AB} = \frac{1 + uv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} t'_{AB} \neq \frac{t'_{AB}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

两者间的关系与运动时钟计时率变慢公式不一致的原因, 是  $S$  系认为  $t'_{AB}$  不是一个运动时钟测量的时间间隔。

(2) 很易算得

$$t'_{AB} = l/u.$$

$S$  系认为虽然  $t'_{BC}$  是两个分别相对面板参考系静止在  $B$  点和  $C$  点的运动时钟测得的时间间隔, 但  $S$  系认为这两个运动时钟之间的时钟零点校准没有差异, 因此  $t'_{BC}$  可相当于一个运动时钟测量的结果, 必有

$$t_{BC} = t'_{BC} / \sqrt{1 - \beta^2} = l/u \sqrt{1 - \beta^2}.$$

(3) 很易算得

$$t'_{ABCD} = 4l/u.$$

$S'$  系中  $t'_{ABCD}$  可以由分别静止在  $A, B, C, D$  的四个时钟测得的  $t'_{AB}, t'_{BC}, t'_{CD}, t'_{DA}$  相加而成, 也可以由静止在  $A$  处的一个时钟单独测得, 两个结果是一致的。取  $t'_{ABCD}$  后一种测量方式, 即得

$$t_{ABCD} = t'_{ABCD} / \sqrt{1 - \beta^2} = 4l/u \sqrt{1 - \beta^2}.$$

**8-38** 惯性系  $S, S'$  间的相对关系如图 8-26 所示, 其中相对速度大小为  $v = c/2$ , 坐标原点  $O, O'$  重合时,  $t = t' = 0$ .

(1) 设飞船 1 开始时静止于  $O'$  点, 从  $t' = 0$  时刻起, 在  $S'$  系以恒定的加速度  $a_1$  沿  $x'$  轴运动, 试求飞船 1 在  $S$  系中的运动方程  $x_1 - t$ .

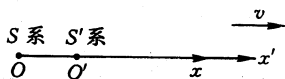


图 8-26

(2) 设飞船 2 开始时静止于  $O$  点, 从  $t = 0$  时刻起, 沿  $x$  轴正方

向离开  $O$  点,并在飞船 2 的瞬时静止惯性系(每一时刻相对飞船静止的惯性系)中,始终具有相同的加速度值  $a_2$ ,试求飞船 2 在  $S$  系中的运动方程  $x_2-t$ .

(3) 设  $a_2=100a_1$ ,试问在  $S$  系中飞船 2 何时追上飞船 1?

解 (1) 飞船 1 在  $S'$  系中的运动方程为

$$x'_1 = \frac{1}{2} a_1 t'^2,$$

将它与洛伦兹变换式

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{2}$$

联立,可得

$$x_1^2 - \left( 4ct + \frac{4\sqrt{3}c^2}{a_1} \right) x_1 + 4c^2 t^2 + \frac{2\sqrt{3}c^3}{a_1} t = 0.$$

引入参量

$$t_0 = \sqrt{3}c/a_1,$$

可将上述方程简化成

$$x_1^2 - 4c(t + t_0)x_1 + 2c^2(2t + t_0)t = 0.$$

方程的解为

$$x_1 = 2c(t + t_0) \pm \sqrt{2}c\sqrt{(3t + 2t_0)t_0},$$

因  $t=0$  时,  $x_1=0$ ,故应取运动方程为

$$x_1 = 2c(t + t_0) - \sqrt{2}c\sqrt{(3t + 2t_0)t_0}.$$

(2) 设在  $S$  系  $t$  时刻,飞船 2 的速度为  $u_2$ ,飞船 2 的瞬时惯性系  $S''$  相对  $S$  系的速度也是  $u_2$ .  $S$  系中经时间  $dt$ ,飞船 2 的速度增量为  $du_2$ ,在  $S''$  系中飞船 2 的速度从 0 增为  $du_2''$ ,应有

$$u_2 + du_2 = (du_2'' + u_2) / \left( 1 + \frac{u_2}{c^2} du_2'' \right),$$

可展开成  $(u_2 + du_2) \left( 1 + \frac{u_2}{c^2} du_2'' \right) = u_2 + du_2''$ ,

略去高阶小量,得

$$du_2'' = du_2 / (1 - \beta_2^2), \quad \beta_2 = u_2/c.$$

考虑到无穷小加速时间间隔  $dt$  与  $dt''$  间应有下述关系:

$$dt'' = \sqrt{1 - \beta_2^2} dt,$$

$$\text{可得} \quad a_2 = a_2'' = \frac{du_2''}{dt''} = \frac{1}{(1 - \beta_2^2)^{3/2}} \frac{du_2}{dt}.$$

因  $a_2$  是常量, 积分

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{(1 - u_2^2/c^2)^{3/2}} = \int_0^t a_2 dt,$$

$$\text{可得} \quad \frac{u_2}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = a_2 t,$$

继而有

$$u_2 = \frac{a_2 t}{\sqrt{1 + a_2^2 t^2/c^2}}.$$

考虑到  $u_2 = dx_2/dt$ , 对上式再作积分, 并利用  $t=0$  时  $x_2=0$  的初条件, 可得

$$x_2 = \frac{c^2}{a_2} \left( \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2} t^2} - 1 \right),$$

这就是飞船 2 在  $S$  系中的运动方程.

(3) 飞船 2 追上飞船 1 时, 应有  $x_2 = x_1 \neq 0$ , 即有

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{a_2} \left( \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2} t^2} - 1 \right) \\ &= 2c(t + t_0) - \sqrt{2} c \sqrt{(3t + 2t_0)t_0}, \quad t \neq 0, \end{aligned}$$

因  $a_2 = 100a_1$ ,  $a_1 = \sqrt{3}c/t_0$ , 得  $a_2 = 100\sqrt{3}c/t_0$ , 代入上式, 化简后

$$\frac{t_0}{100\sqrt{3}} \left( \sqrt{1 + 3 \times 10^4 \frac{t^2}{t_0^2}} - 1 \right) = 2(t + t_0) - \sqrt{2(3t + 2t_0)t_0}.$$

引入量纲一的参数:

$$\alpha = t/t_0, \quad \alpha \neq 0,$$

可将上式简化成数值方程:

$$\frac{1}{100\sqrt{3}}(\sqrt{1+3\times 10^4 a^2}-1)=2(\alpha+1)-\sqrt{2(3\alpha+2)}.$$

引入参数:

$$y_2 = \frac{1}{100\sqrt{3}}(\sqrt{1+3\times 10^4 a^2}-1),$$

$$y_1 = 2(\alpha+1)-\sqrt{2(3\alpha+2)},$$

用计算器取搜索逼近方法作数值计算如下:

$\alpha$	0.1	0.01	0.001	0.005	0.0075
$y_2$	0.094	$5.77\times 10^{-3}$	$8.60\times 10^{-5}$	$1.86\times 10^{-3}$	$3.691\times 10^{-3}$
$y_1$	0.055	$5.06\times 10^{-3}$	$5.01\times 10^{-4}$	$2.51\times 10^{-3}$	$3.781\times 10^{-3}$
$\alpha$	0.0076	0.0077	0.0078	0.0079	
$y_2$	$3.771\times 10^{-3}$	$3.851\times 10^{-3}$	$3.931\times 10^{-3}$	$4.011\times 10^{-3}$	
$y_1$	$3.832\times 10^{-3}$	$3.883\times 10^{-3}$	$3.934\times 10^{-3}$	$3.985\times 10^{-3}$	

故可取的数值解为

$$\alpha = 0.0078, \quad \text{即} \quad t = 0.0078 \sqrt{3} c/a_1,$$

这就是  $S$  系中飞船 2 追上飞船 1 的时刻。

事实上,  $S$  系中开始时飞船 1 因具有  $v=c/2$  初速度而超前飞船 2. 而后因  $a_2=100a_1$ , 飞船 2 比飞船 1 加速快, 当  $t=0.0078 \sqrt{3} \frac{c}{a_1}$  时, 飞船 2 追上飞船 1. 接着飞船 2 相对飞船 1 在  $S$  系的加速度  $\left(1-\frac{u_2^2}{c^2}\right)^{3/2} a_2$  越来越小(证明从略), 故飞船 2 又会被飞船 1 追上, 并将一直落后于飞船 1.

最后需要补充的是本题讨论内容, 仅适宜于飞船 1 在  $S'$  系中的速度未达到真空光速  $c$  范围之内.

**8-39** 宇宙飞船从地球出发沿直线飞向某恒星, 恒星距地球  $r=3\times 10^4 \text{ l. y.}$ . 飞船的前一半航程中, 飞船在其瞬时静止惯性系中, 始终具有相同的加速度  $a'=10 \text{ m/s}^2$ ; 飞船的后一半航程中, 飞船在其瞬时静止惯性系中以数值相同的加速度  $a'$  作减速运动. 试问在飞船上测量, 整个航程经历了多长时间? 计算时只取一级近似.

解 参考习题 8-38(2) 的解答, 可知飞船在前一半航程中相对地球系的运动方程为

$$x = \frac{c^2}{a'} \left[ \sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} t^2} - 1 \right],$$

据此可解得

$$t = \frac{x}{c} \sqrt{1 + \frac{2c^2}{a'x}}.$$

当飞船完成前半航程时,  $x=r/2$ , 所需地球时间为

$$T = \frac{r}{2c} \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a'r}}.$$

在每段微小运动单元中,  $S$  系中的时间间隔  $dt$  与飞船瞬时静止惯性系中对应的的时间间隔  $dt'$  之间的关系为

$$dt' = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt,$$

式中  $u$  为  $t$  时刻飞船航行速度, 参考习题 8-38(2) 的解答, 可知  $u$  与  $a', t$  间有下述关系:

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = a't, \quad u = \frac{a't}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}},$$

代入上式可得

$$dt' = \frac{u}{a't} dt = \frac{dt}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}}.$$

积分, 有

$$\int_0^T dt' = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}},$$

式中  $T$  和  $T'$  分别是飞船完成前半航程所经历的地球时间和飞船时间, 得

$$T' = \frac{c}{a'} \ln \left[ \frac{a'}{c} T + \sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} T^2} \right].$$

因加速过程与减速过程所需时间相同, 故走完全程所需飞船时间为

$$2T' = \frac{2c}{a'} \ln \left[ \frac{a'}{c} T + \sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} T^2} \right].$$

由  $r = 3 \times 10^4 \text{ l. y.}$ ,  $a' = 10 \text{ m/s}^2$ , 得

$$4c^2/a'r = 1.27 \times 10^{-4},$$

因此有

$$T \approx r/2c = 1.5 \times 10^4 \text{ a.},$$

继而得

$$\frac{a'}{c}T = 1.58 \times 10^4,$$

$$2T' \approx \frac{2c}{a'} \ln \left[ \frac{2a'}{c}T \right] = 19.7 \text{ a.}$$

**8-40 惯性系  $S, S'$  之间的相对关系如图 8-27 所示,  $S$  系与某星体连结在一起,  $S, S'$  系坐标原点  $O, O'$  的间距远小于各自到其他星体的距离,**

**在  $S, S'$  系按常规方式分别引入以  $O, O'$  为原点的球坐标角参量  $\{\theta, \phi\}, \{\theta', \phi'\}$  (图中未画出). 已知在  $S$  系  $O$  处的观察者看到的远处星体数呈各向同性分布, 即单位立体角内观察到的星体数  $N$  是一个与  $\{\theta, \phi\}$  无关的常量, 试求在  $S'$  系  $O'$  处的观察者在单位立体角内可观察到的星体数  $N'$  的角分布, 即函数关系  $N' - \theta', \phi'$ .**

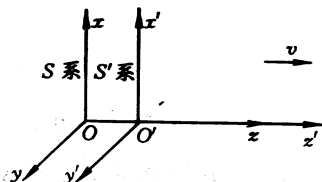


图 8-27

**星体数  $N'$  的角分布, 即函数关系  $N' - \theta', \phi'$ .**

**解** 因  $O, O'$  间距远小于各自与远处星体的距离, 远处星体射向  $S$  系  $O$  处与  $S'$  系  $O'$  处的两条光线间的偏向差异可略, 即可处理成同一束平行光中的两条光线. 此平行光束在  $S, S'$  系对应的角  $\phi, \phi'$  相同, 即有

$$\phi = \phi'.$$

此平行光束与  $z$  轴和  $z'$  轴夹角可分别记为  $\pi - \theta$  和  $\pi - \theta'$ , 则有

$$u_x = -c \cos \theta, \quad u'_x = -c \cos \theta', \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

即得

$$\cos \theta = (\cos \theta' - \beta) / (1 - \beta \cos \theta'). \quad (1)$$

设  $S$  系中在立体角  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  内可看到的星体即为  $S'$  系中在立体角  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi'$  内可看到的星体, 则有

$$N \sin \theta d\theta d\phi = N' \sin \theta' d\theta' d\phi',$$

因  $\phi = \phi'$ , 有  $d\phi = d\phi'$ , 可得



$$N' = \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta' d\theta'} N = \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta')} N. \quad (2)$$

据①式,可得

$$d(\cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2} d(\cos \theta'),$$

代入②式,得所求分布为

$$N' = N'(\theta') = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2} N.$$

特例:  $v \rightarrow c$  时,  $\beta \rightarrow 1$ , 则有

$$N'(0) = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2} = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \infty,$$

$$N'(\pi) = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2} = 0.$$

总之,在  $S$  系中各向同性分布的远处星体,将向  $S'$  系的运动方向聚集,在  $v \rightarrow c$  的极限情形下,星体将集中到运动方向上。

**8-41** 如图 8-28 所示,由介质 1 和介质 2 构成一界面,两介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,界面的法线与  $S$  系的  $x$  轴平行. 现设界面随介质一起相对  $S$  系以速度  $v$  沿法线作匀速平动,在  $S$  系中入射光以入射角  $\theta_i$  从介质 1 向界面入射,反射角和折射角分别用  $\theta_r$  和  $\theta_t$  表示,试导出用入射光速  $u_i$  和入射角  $\theta_i$  表述的反射角  $\theta_r$  和折射角  $\theta_t$  的计算式。

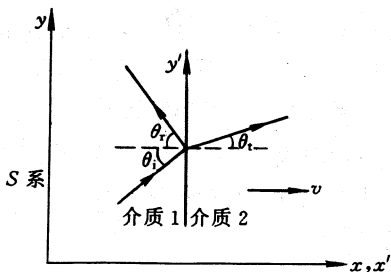


图 8-28

解 设在  $S$  系中观测时,三种光线在各自传播方向上的光线速度分别为  $u_i, u_r, u_t$ . 在  $S'$  系(随介质一起运动的惯性系)中观察时,相应量分别为  $u'_i, u'_r, u'_t$ , 入射、反射和折射角则分别记为  $\theta'_i, \theta'_r$  和  $\theta'_t$ . 光线传播遵从相对论速度变换公式,即

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

可导得

$$u \cos \theta = \frac{u' \cos \theta' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u' \cos \theta'}, \quad u \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u' \sin \theta'}{1 + \frac{v}{c^2} u' \cos \theta'}, \quad (1)$$

式中  $u$  和  $u'$  分别是在  $S$  系和  $S'$  系中测得的光线速度,  $\theta$  和  $\theta'$  是  $S$  系和  $S'$  系中测得的光线方向与  $x$  轴和  $x'$  轴的夹角.

对入射光应用①式,有

$$u_i \cos \theta_i = \frac{u'_i \cos \theta'_i + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_i \cos \theta'_i}, \quad u_i \sin \theta_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_i \sin \theta'_i}{1 + \frac{v}{c^2} u'_i \cos \theta'_i}; \quad (2)$$

对反射光和折射光,分别有

$$u_r \cos \theta_r = \frac{u'_r \cos \theta'_r - v}{1 - \frac{v}{c^2} u'_r \cos \theta'_r}, \quad u_r \sin \theta_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_r \sin \theta'_r}{1 - \frac{v}{c^2} u'_r \cos \theta'_r}, \quad (3)$$

$$u_t \cos \theta_t = \frac{u'_t \cos \theta'_t + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_t \cos \theta'_t}, \quad u_t \sin \theta_t = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_t \sin \theta'_t}{1 + \frac{v}{c^2} u'_t \cos \theta'_t}. \quad (4)$$

由③④式可得

$$\tan \theta_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_r \sin \theta'_r}{u'_r \cos \theta'_r - v}, \quad \tan \theta_t = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_t \sin \theta'_t}{u'_t \cos \theta'_t + v}. \quad (5)$$

$S'$  系中介质静止,故有

$$u'_r = c/n_1, \quad u'_t = c/n_2,$$

且据反射定律和折射定律,有

$$\theta'_r = \theta'_i, \quad \sin \theta'_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta'_i,$$

代入⑤式,得

$$\begin{aligned} \tan \theta_r &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} - n_1 \beta}, \\ \tan \theta_t &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'_i}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta'_i} + \frac{n_2}{n_1} \beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中的  $\theta'_i$  可借助②式的逆变换表示, 即有

$$u'_i \sin \theta'_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_i \sin \theta_i}{1 - \frac{v}{c^2} u_i \cos \theta_i}, \quad u'_i = \frac{c}{n_1}, \quad (7)$$

于是⑥⑦式就给出了反射角  $\theta_r$  和折射角  $\theta_t$  随入射光速  $u_i$  和入射角  $\theta_i$  变化的关系.

**算例:** 若介质 1 为真空, 则  $u'_i = u_i = c, n_1 = 1, n_2 = n$ , ⑦式简化成

$$\sin \theta'_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta_i}{1 - \beta \cos \theta_i},$$

代入⑥式, 化简后得

$$\tan \theta_r = \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta_i}{(1 + \beta^2) \cos \theta_i - 2\beta}, \quad (8)$$

$$\tan \theta_t = \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta_i}{\sqrt{n^2(1 - \beta \cos \theta_i)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta_i} + \beta n^2(1 - \beta \cos \theta_i)}$$

这就是光从真空射向运动介质界面时遵从的反射规律和折射规律, 当介质静止时, ⑧式变为

$$\theta_r = \theta_i, \quad n \sin \theta_t = \sin \theta_i,$$

此即通常的反射定律和折射定律.

由⑧式可知, 一般情况下  $\theta_r$  和  $\theta_t$  与  $\theta_i$  的关系与界面的运动速度  $v$  有关. 图 8-29 中画出了  $n=1.5, \beta=0, 0.5, 0.8$  的情形下  $\theta_r$  和  $\theta_t$  随  $\theta_i$  变化的关系曲线, 虚线表示  $\beta=0$  时(通常的反射定律和折射定

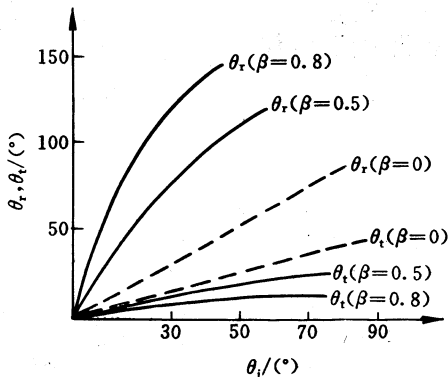


图 8-29

律)的结果.从图中可以看出, $\beta$ 越大,即 $v$ 越接近光速,关系曲线偏离静止情形越远,相对论效应越显著.

**8-42** 实验室中, $\alpha$ 粒子以 $v_1 = \frac{4}{5}c$ 的速度射入厚度 $d = 0.35$  m 的水泥防护墙,从墙射出时速度降为 $v_2 = \frac{5}{13}c$ .已知 $\alpha$ 粒子静质量 $m_0 = \frac{2}{3} \times 10^{-26}$  kg,墙对 $\alpha$ 粒子的作用力 $F_0$ 是常量,试求:

(1)  $F_0$ ;

(2) 在以速度 $v_1$ 沿 $\alpha$ 粒子运动方向相对实验室运动的 $S'$ 系中测得的墙作用力 $F'_0$ ;

(3) 实验室和 $S'$ 系各自测得的 $\alpha$ 粒子通过墙的时间 $\Delta t$ 和 $\Delta t'$ .

解 由所给数据,得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{5}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{13}{12}, \quad m_0 c^2 = 6 \times 10^{-10} \text{ J}.$$

(1) 由功能关系式

$$F_0 d = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{1}{1 - \sqrt{v_2^2/c^2}} \right] m_0 c^2,$$

可算得

$$F_0 = 1.0 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

(2) 由力变换式,可得

$$\begin{aligned} F'_0 = F'_x &= \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{F_0 - \frac{v_1}{c^2} u_x F_0}{1 - \frac{v_1}{c^2} u_x} = F_0 \\ &= 1.0 \times 10^{-9} \text{ N}, \end{aligned}$$

式中 $u_x$ 为 $\alpha$ 粒子在实验室运动过程中的瞬时速度.

(3) 实验室中由动量定理,可得

$$F_0 \Delta t = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{11}{12} m_0 c,$$

代入数据后,算得

$$\Delta t = 1.83 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

$S'$ 系中据动量变换式

$$P'_x = \left( P_x - \frac{v_1 E}{c^2} \right) / \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{5}{3} \left( P_x - \frac{v_1 E}{c^2} \right),$$

可得

$$\begin{aligned} F'_0 \Delta t' &= \Delta P'_x = \frac{5}{3} \left( \Delta P_x - \frac{v_1 \Delta E}{c^2} \right) \\ &= \frac{5}{3} \left( \Delta P_x - \frac{4 \Delta E}{5 c} \right) = \frac{5}{3} \left( F_0 \Delta t - \frac{4 F_0 d}{5 c} \right) \\ &= \left( \frac{5}{3} \Delta t - \frac{4}{3} \frac{d}{c} \right) F_0. \end{aligned}$$

因  $F'_0 = F_0$ , 即得

$$\Delta t' = \frac{5}{3} \Delta t - \frac{4}{3} \frac{d}{c} = 1.50 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

**8-43** 据德布罗意波粒二象性假设, 动量为  $p$  的自由运动实物粒子, 它所对应的实物粒子波的波长为  $\lambda = h/p$ , 其中  $h$  为普朗克常量.

设有一个波长为  $\lambda_i$  的光子与一个运动的自由电子相碰, 碰后电子静止, 原光子消失, 并产生一个波长为  $\lambda_0$  的光子, 运动方向与原光子运动方向成  $\theta = 60^\circ$  的夹角. 接着此光子又与另一个静止的自由电子相碰, 碰后此光子消失, 产生一个波长为  $\lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$  的光子, 运动方向与碰前光子运动方向成  $\theta = 60^\circ$  角. 试求第一个电子在碰前的德布罗意波长  $\lambda_e$ .

**解** 参考图 8-30, 第一次碰撞过程的能量与动量守恒式为

$$h\nu_i + E_e = h\nu_0 + m_e c^2, \quad (1)$$

$$\text{由 } \frac{h}{\lambda_i} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{h}{\lambda_0},$$

$$\text{有 } h\nu_i \cos \theta + (p_e c) \cos \phi = h\nu_0, \quad (2)$$

$$\text{由 } \frac{h}{\lambda_i} \sin \theta - p_e \sin \phi = 0,$$

$$\text{有 } h\nu_i \sin \theta - (p_e c) \sin \phi = 0. \quad (3)$$

式中  $E_e$  为碰前电子的总能量,  $m_e$  为电子的静质量,  $p_e$  为碰前电子的

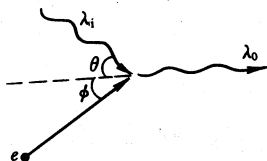


图 8-30

动量,其间关系为

$$p_e^2 c^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4. \quad (4)$$

上述①~④个方程中含有五个未知量:  $\nu_i, \nu_0, E_e, p_e, \phi$ , 因此可以求得  $\nu_i$  与  $\nu_0$  间满足的一个关系式,具体过程如下:

由②和③式消去  $\phi$ , 可得

$$(p_e c)^2 = (h\nu_0)^2 - 2(h\nu_0)(h\nu_i)\cos\theta + (h\nu_i)^2, \quad (5)$$

将④式代入,得

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = h^2 \nu_0^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i \cos\theta + h^2 \nu_i^2,$$

再与①式联立,消去  $E_e$ , 得

$$\begin{aligned} [(h\nu_0)^2 + (h\nu_i)^2 + (m_e c^2)^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i + 2hm_e c^2(\nu_0 - \nu_i)] - m_e^2 c^4 \\ = h^2 \nu_0^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i \cos\theta + h^2 \nu_i^2. \end{aligned}$$

即有  $m_e c^2(\nu_0 - \nu_i) = h\nu_0 \nu_i(1 - \cos\theta)$ ,

$$\text{或} \quad \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu_0} = h(1 - \cos\theta)/m_e c^2, \quad (6)$$

这就是  $\nu_i$  与  $\nu_0$  间满足的一个关系式. 结合  $\lambda = c/\nu$ , ⑥式可改述成

$$\lambda_i - \lambda_0 = h(1 - \cos\theta)/m_e c. \quad (7)$$

第二次碰撞的过程图相当于图 8-30 的逆向图,即使不涉及碰撞后的  $E_e, p_e, \phi, \lambda_i$  与第一次碰前的  $E_e, p_e, \phi, \lambda_i$  是否对应相同,但  $\nu_i, \nu_0, E_e, p_e$  和  $\phi$  满足的关系式仍与①、②、③、④式完全相同,因此导得的  $\nu_i$  与  $\nu_0$  的关系式以及  $\lambda_i$  与  $\lambda_0$  的关系式仍与⑥、⑦式相同,故有

$$\lambda_i - \lambda_0 = h(1 - \cos\theta)/m_e c. \quad (8)$$

既然⑦和⑧式中  $\lambda_0, \theta$  相同, 便得

$$\lambda_i = \lambda_i = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad (9)$$

代入⑦式,可算得

$$\lambda_0 = 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (10)$$

现在由⑤式可算得

$$p_e^2 = h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2}{\lambda_0 \lambda_i} \cos\theta + \frac{1}{\lambda_i^2} \right),$$

再将  $p_e = h/\lambda_e$  代入, 便得

$$\frac{1}{\lambda_e^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2 \cos\theta}{\lambda_0 \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

将⑨⑩式代入后,可算得

$$\lambda_c = 1.24 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

**8-44** 太空火箭(包括燃料)的初始质量为  $M_0$ ,从静止起飞,向后喷出的气体相对火箭的速度  $u$  为常量,任意时刻火箭相对地球速度为  $v$  时火箭的瞬时静止质量记为  $m_0$ .忽略地球引力影响,试求比值  $m_0/M_0$  与速度  $v$  之间的关系.

**解** 在地球系中, $t$ 时刻火箭速度为  $v$ ,火箭动质量记为  $m$ ,则有

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c.$$

火箭在  $t$  到  $t+dt$  时间间隔内喷气质量为

$$-dm = -d(m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}),$$

由动量守恒可得

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)v_{\text{气}} = 0,$$

$$\text{即得} \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} dv + (v - v_{\text{气}}) d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = 0, \quad (1)$$

其中  $v_{\text{气}}$  为喷出的气体相对地球系的速度.据速度变换式,有

$$v_{\text{气}} = [(-u) + v] / \left[1 + \frac{v}{c^2}(-u)\right],$$

代入①式,得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} dv + \frac{u(1 - \beta^2)}{1 - \frac{u}{v}\beta^2} \left[ \frac{dm_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 \frac{v}{c^2} dv}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \right] = 0,$$

可化简成

$$m_0 dv = u(\beta^2 - 1) dm_0,$$

或转述成

$$m_0 c d\beta = u(\beta^2 - 1) dm_0. \quad (2)$$

积分

$$\int_{M_0}^{m_0} \frac{dm_0}{m_0} = \int_0^\beta \frac{c}{u} \frac{d\beta}{\beta^2 - 1}, \quad (3)$$

即得

$$\frac{m_0}{M_0} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{c/2u}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4)$$

**8-45** 光子火箭是一种**设想的航天器**,它利用“燃料”物质向后或向前辐射光束,使火箭从**静止加速或在运动中向前加速或减速**。

设光子火箭从地球起飞时**静止质量(包括燃料)为  $M_0$** ,朝着与地球相距  $R=1.8 \times 10^6$  l. y. 的**仙女座星云飞行**.要求火箭在 25 年(火箭时间)后“软着陆”**到达目的地.不计所有引力影响,略去火箭加速和减速所经时间,试求:**

(1) **火箭相对地球匀速段的飞行速度  $v$ ;**

(2) **火箭出发时的静止质量  $M_0$  和到达目的地时的静止质量  $M'_0$  之间的比值.**

**解** (1) 因略去加速、减速度时间,故火箭近似以恒定速度  $v$  飞越全程,所需地球时间为

$$\tau = R/v.$$

将  $\tau$  与  $\tau_0=25$  a 的关联式

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c$$

代入后,即可得

$$\begin{aligned} v &= c / \sqrt{1 + \frac{c^2 \tau_0^2}{R^2}} \approx \left(1 - \frac{c^2 \tau_0^2}{2R^2}\right) c \\ &= (1 - 0.96 \times 10^{-10}) c, \end{aligned}$$

可见,火箭几乎应以光速飞行。

(2) 加速段,火箭静止质量从  $M_0$  减至  $M$ ,据习题 8-44④式,有

$$\frac{M}{M_0} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{c/2u} \Big|_{u=c} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \textcircled{1}$$

匀速段,火箭静止质量  $M$  不变. 减速段,火箭质量从  $M$  减至  $M'_0$ ,参考习题 8-44②式,但考虑到火箭初速为  $v$ ,静质量为  $M$ ,末速度为 0,静质量为  $M'_0$ ,且向前发射光束,故习题 8-44③式应改为

$$\int_M^{M'_0} \frac{dm_0}{m_0} = \int_\beta^0 \frac{c}{-u} \frac{d\beta}{\beta^2 - 1}.$$

积分后,得

$$\frac{M'_0}{M} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{c/2u} \Big|_{u=c} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \textcircled{2}$$

联立①②式,可得



$$\frac{M_0}{M'_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 1 - \frac{c^2 \tau_0^2}{2R^2},$$

即有 
$$\frac{M_0}{M'_0} = \frac{4R^2 - c^2 \tau_0^2}{c^2 \tau_0^2} \approx \frac{4R^2}{c^2 \tau_0^2} = 2.1 \times 10^{10}.$$

**8-46** 如图 8-31 所示,在一次粒子碰撞实验中,观察到一个低速  $K^-$  介子与一个静止质子  $p$  发生相互作用,生成一个  $\pi^+$  介子和一个未知的  $X$  粒子,在匀强磁场  $B$  中  $\pi^+$  介子和  $X$  粒子的轨迹已在图中画出. 已知  $B = 1.70 \text{ T}$ , 测得  $\pi^+$  介子轨迹的曲率半径为  $R_1 = 34.0 \text{ cm}$ .

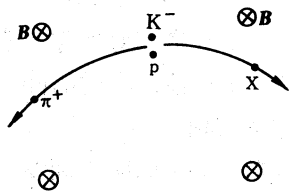


图 8-31

- (1) 试确定  $X$  粒子轨迹的曲率半径  $R_2$ ;
- (2) 试参考下表确认  $X$  为何种粒子.

粒子符号	静能/MeV	电荷/ $e$
$e^+, e^-$	0.511	1, -1
$\mu^+, \mu^-$	105.7	1, -1
$\pi^+, \pi^-$	139.6	1, -1
$K^+, K^-$	493.8	1, -1
$p$	938.3	1
$n$	939.6	0
$\Lambda^0$	1115.4	0
$\Sigma^+$	1189.4	1
$\Sigma^0$	1192.3	0
$\Sigma^-$	1197.2	-1
$\Xi^0$	1314.3	0
$\Xi^-$	1320.8	-1
$\Omega^-$	1675	-1

**解** (1) 由电荷守恒,可知  $X$  粒子带电  $-e$ . 碰撞前系统动量近似为零,碰后生成的  $\pi^+$  介子动质量和速率记为  $m_1$  和  $v_1$ ,  $X$  粒子的动质量和速率记为  $m_2$  和  $v_2$ , 则有

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

这两个粒子都受到磁场力作用,但磁场力不作功,故  $m_1, v_1$  和  $m_2, v_2$

都是不变量. 据修正后的牛顿第二定律  $F = d(mv)/dt$ , 若  $m$  不变, 则简化为

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma.$$

$\pi^+$  介子和 X 粒子在磁场力作用下沿圆轨道匀速运动, 向心加速度由磁场力提供, 可得圆半径为

$$R = mv/eB.$$

因  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ , 故 X 粒子圆轨道半径  $R_2$  与  $\pi^+$  介子圆轨道半径  $R_1$  相同, 即有

$$R_2 = R_1 = 34.0 \text{ cm}.$$

(2) 对于  $\pi^+$  介子, 由

$$eB = m_1 v_1 / R_1 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \frac{v_1}{R_1}, \quad m_{10} = 139.6 \text{ MeV}/c^2,$$

可求得

$$v_1 = \frac{eBR_1 c}{\sqrt{m_{10}^2 c^2 + e^2 B^2 R_1^2}} = 2.34 \times 10^8 \text{ m/s},$$

$\pi^+$  介子的能量便为

$$m_1 c^2 = \frac{m_{10} c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = 223 \text{ MeV}.$$

因系统能量守恒, 故 X 粒子能量为

$$m_2 c^2 = (m_{K0} c^2 + m_{P0} c^2) - m_1 c^2 = 1209.1 \text{ MeV},$$

X 粒子速度大小为

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{m_1 c^2}{m_2 c^2} v_1 = 4.32 \times 10^7 \text{ m/s},$$

X 粒子的静能量便是

$$m_{20} c^2 = \sqrt{1 - v_2^2/c^2} m_2 c^2 = 1196 \text{ MeV}.$$

查表可知, X 为  $\Sigma^-$  粒子.

8-47  $\mu^-$  子的电量  $q = -e$  ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ), 静质量  $m_0 = 100 \text{ MeV}/c^2$ , 静止时的寿命  $\tau_0 = 10^{-6} \text{ s}$ . 设在地球赤道上空距地面高度  $h = 10^4 \text{ m}$  处有一个  $\mu^-$  子以接近于真空光速的速度垂直向下

运动.

(1) 试问此  $\mu^-$  子至少应有多大的总能量才可到达地面?

(2) 若把赤道上空  $10^4$  m 高度范围内的地球磁场处理成水平匀强磁场,  $B=10^{-4}$  T, 试求上述已获得能量的  $\mu^-$  子在到达地面时的偏离方向和总的偏转角.

**解** (1) 近似地将  $\mu^-$  看成是作匀速直线运动, 速度  $v \approx c$ , 到达地面所需时间为

$$t = h/v \approx h/c.$$

为了能到达地面, 要求  $t \leq \tau$ , 其中  $\tau$  为  $\mu^-$  在地面系中的寿命, 应有

$$t \leq \tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

$\mu^-$  子的总能量为

$$E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

结合上述诸式, 可得

$$E = m_0 c^2 \tau / \tau_0 \geq m_0 c^2 t / \tau_0 = m_0 c h / \tau_0 = 3.3 \times 10^3 \text{ MeV}.$$

(2) 取  $\mu^-$  子初始位置正下方地面上的点为坐标原点, 设置  $Oxyz$  坐标系, 如图 8-32 所示.  $t=0$  时,  $\mu^-$  子的位置和速度分别为

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h, \quad z(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -v, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

略去  $\mu^-$  子所受重力, 有动力学方程

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = E\mathbf{v}/c^2, \quad d\mathbf{p}/dt = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

$$E = \text{常量},$$

分量式为

$$\ddot{x} = -\frac{c^2 e B}{E} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{c^2 e B}{E} \dot{x}.$$

第一式对  $t$  求导后再将第二式代入, 得

$$\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} = 0, \quad \omega = c^2 e B / E,$$

结合初始条件, 相继可解得

$$\dot{x} = v \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad x = \frac{v}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{v}{\omega}.$$

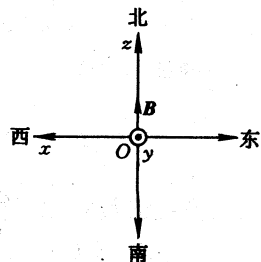


图 8-32

又由

$$\dot{y} = -\frac{E}{c^2 e B} \ddot{x} = -\frac{1}{\omega} \left[ -\omega v \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] = v \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

结合初条件,可解得

$$y = -\frac{v}{\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + h.$$

可将  $\mu^-$  子的运动方程整理成

$$x = \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y = h - \frac{v}{\omega} \sin \omega t,$$

到达地面时,  $y=0$ , 有

$$\sin \omega t = \omega h / v = c^2 e B h / E v,$$

因  $v \approx c$ , 得

$$\sin \omega t \approx c e B h / E = 0.091,$$

继而可得

$$\cos \omega t = 0.996, \quad \frac{v}{\omega} = h / \sin \omega t = 1.099 \times 10^5 \text{ m}.$$

落地点的坐标为

$$x_{\text{地}} = \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega t) = 439.6 \text{ m},$$

朝  $x$  方向(向西)的偏转角为

$$\alpha \approx x_{\text{地}} / h = 0.044 \text{ rad}.$$

**8-48** 某粒子的静止质量为  $m_0$ , 以初速  $v_0$  从  $t=0$  开始沿  $x$  轴方向运动, 运动期间始终受到一个指向  $y$  轴方向的恒力  $F$  的作用. 试证, 任意  $t>0$  时刻粒子的两个速度分量为

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \sqrt{c^2/(c^2 + k)}, \quad v_y = \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + k}},$$

$$k = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left( \frac{Ft}{m_0} \right)^2,$$

进而证明, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 速率  $v \rightarrow c$ ,  $v_x \rightarrow 0$ .

证 粒子的动力学方程分量式为

$$d(m_0 v_x / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = F_x dt = 0,$$

$$d(m_0 v_y / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = F dt,$$

积分, 并利用初条件  $t=0$  时,  $v_x=v_0, v_y=0$ , 得

$$m_0 v_x / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 v_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}, \quad \text{①}$$

$$m_0 v_y / \sqrt{1 - v^2/c^2} = Ft. \quad \text{②}$$

①、②两式平方和, 得

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2,$$

解得

$$v^2 = k / (1 + k/c^2), \quad \text{③}$$

其中

$$k = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2. \quad \text{④}$$

由③式, 得

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{k}{c^2 + k} = \frac{c^2}{c^2 + k}.$$

将上式代入①式和②式, 即得题文待证的  $v_x, v_y$  表述式.

由④式, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $k \rightarrow \infty$ , 故由③式得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} [k / (1 + k/c^2)] = c^2, \quad \text{即 } v \rightarrow c.$$

由题文所给  $v_x$  表述式, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x = 0,$$

原因是随着  $t$  的增大, 粒子速度越来越大, 粒子质量也相应变大, 但粒子在  $x$  方向动量守恒, 质量增大导致  $v_x$  减小, 直至趋向零.

**8-49** 在惯性系某个  $S$  平面上的  $O$  点有一个带电量为  $Q > 0$  的固定点电荷, 另一个带负电荷  $-q$  的质点  $P$  受点电荷  $Q$  的库仑力作用, 绕  $O$  点在  $S$  平面上作有界曲线运动. 设  $P$  点的初始相对论能量为  $E_0$ ,  $P$  点相对  $O$  点的初始角动量为  $L_0$ , 且有

$$qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \ll 1,$$

其中  $c$  为真空光速.

(1) 试证在零级近似下, 即在  $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \approx 0$  的条件下,  $P$  点的运动轨道是一个椭圆;

(2) 试证  $P$  点的真实运动是带有进动的椭圆运动, 并求出  $P$  点相对  $O$  点的径矢长每变化一周对应的进动角  $\Delta\theta$ .

解 库仑力仍为保守力, 质点  $P$  在运动过程中具有电势能  $-qQ/4\pi\epsilon_0 r$ , 质点  $P$  的相对论能量

$$E = mc^2 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

为守恒量, 即恒有  $E = E_0$ . 又因库仑力是有心力, 质点  $P$  相对  $O$  点的角动量  $L$  也是守恒量, 即有  $L = L_0$ .

以  $O$  为原点在  $S$  平面上设置极坐标系, 质点  $P$  的动力学方程为

$$\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r},$$

按径向和角向可分解为

$$\frac{dm}{dt} \dot{r} + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -qQ/4\pi\epsilon_0 r^2,$$

$$\frac{dm}{dt} r\dot{\theta} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0.$$

角向方程乘以  $r$  后, 为

$$d(mr^2\dot{\theta})/dt = 0,$$

这是质点的角动量  $L = mr^2\dot{\theta}$  为守恒量的表现. 于是有

$$\dot{\theta} = L_0/mr^2,$$

径向动力学方程可改述成

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr\dot{\theta}^2 = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

或

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - \frac{L_0^2}{mr^3} = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L_0}{mr^2},$$

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = \frac{d(m\dot{r})}{d\theta} \dot{\theta} = \left[ \frac{d}{d\theta} \left( m \frac{dr}{d\theta} \frac{L_0}{mr^2} \right) \right] \frac{L_0}{mr^2}$$

$$= \frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = - \frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right],$$

可得

$$-\frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} - \frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

或 
$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0 L_0^2}. \quad (1)$$

由质点  $P$  的能量守恒, 可得

$$m = \frac{E_0}{c^2} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

代入前面的微分方程①, 可得

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2} + \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right) \frac{1}{r},$$

即 
$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 \right] = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2}. \quad (2)$$

这是关于  $\frac{1}{r}-\theta$  的二阶常系数线性非齐次微分方程, 解得的  $\frac{1}{r}-\theta$  便是质点  $P$  的运动轨道方程.

(1) 在零级近似下, 取  $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \approx 0$ , 上述微分方程②简化成

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2},$$

其通解为

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta + \theta_0) + \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2},$$

式中  $A$  和  $\theta_0$  是由初条件确定的常量. 适当选取极轴方向, 总可使  $\theta_0=0$ , 从而上式可改写为

$$\frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2} (1 + e \cos \theta),$$

其中  $e$  是一个新的待定常量. 上述解可进一步简化成

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}, \quad p = \frac{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2}{qQE_0 e},$$

可见, 质点  $P$  的运动轨道是圆锥曲线. 因已知质点  $P$  的轨道是有界曲线, 故质点  $P$  的轨道应为椭圆.

(2) 原微分方程②的完整解为

$$\frac{1}{r} = A \cos \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta + \theta_0 \right] + \frac{4\pi\epsilon_0 qQE_0}{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2},$$

适当选取极轴,使  $\theta_0 = 0$ , 上式改写为

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 qQE_0}{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2} \left\{ 1 + e' \cos \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta \right] \right\},$$

式中  $e'$  为新的待定常量. 上述解可简化成

$$r = \frac{e' p'}{1 + e' \cos \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta \right]},$$

$$p' = \frac{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2}{4\pi\epsilon_0 qQE_0 e'},$$

这表明质点  $P$  的运动是带有进动的圆锥曲线运动. 因已知质点  $P$  的轨道是有界曲线, 故质点  $P$  的运动是带有进动的椭圆运动.

$r$  变化一周, 转过的角度  $\theta_0$  应满足

$$\sqrt{1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta_0 = 2\pi,$$

因此, 转角  $\theta_0$  为

$$\theta_0 = 2\pi / \sqrt{1 - \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} > 2\pi.$$

$\theta$  角旋转一周为  $2\pi$ , 现在  $\theta_0 > 2\pi$ ,  $\theta_0$  的超前量即为进动角  $\Delta\theta$ , 有

$$\Delta\theta = \theta_0 - 2\pi = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2}} - 1 \right] 2\pi,$$

因  $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \ll 1$ , 近似有

$$\Delta\theta = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 - 1 \right] 2\pi,$$

即得进动角

$$\Delta\theta = \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 \pi.$$

### 8-50 引力红移和恒星质量的测定

(1) 频率为  $\nu$  的一个光子具有惯性质量, 此质量由光子的能量确定. 在此假定下, 光子也有引力质量, 量值等于惯性质量. 与此相应, 从一颗星球表面向外发射出的光子, 逃离星球引力场时, 便会损失能量.



试证明,初始频率为  $\nu$  的光子从星球表面到达无穷远处,若将它的频移(频率增加量)记为  $\Delta\nu$ ,则当  $|\Delta\nu| \ll \nu$  时,有

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{GM}{Rc^2},$$

式中  $M$  为星球质量,  $R$  为星球半径. 这样,在距星球足够远处对某条已知谱线频率红移的测量,可用来测出比值  $M/R$ ,如果知道了  $R$ ,星球的质量  $M$  便可确定.

(2) 在一项太空实验中发射出一艘无人驾驶的宇宙飞船,欲测量银河系中某颗恒星的质量  $M$  和半径  $R$ . 飞船径向地接近目标时,可以监测到从星球表面  $H_e^+$  离子发射出的光子对飞船实验舱内的  $H_e^+$  离子束进行共振激发. 光子被共振吸收的条件是飞船  $H_e^+$  离子朝着星球的速度必须与光子的引力红移严格地相适应. 共振吸收时的飞船  $H_e^+$  离子相对星球的速度  $v$  (记为  $v = \beta c$ ), 可随着飞船到星球表面最近距离  $d$  的变化而进行测量,实验数据在下面表格中给出. 请充分利用这些数据,试用作图法求出星球的半径  $R$  和质量  $M$ . 解答中不必进行误差计算.

数据表

速度参量 $\beta/10^{-5}$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
到星球表面距离 $d/10^8$ m	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(3) 为在本实验中确定  $R$  和  $M$ ,通常需要考虑因发射光子时离子的反冲造成的频率修正(热运动对发射谱线仅起加宽作用,不会使峰的分佈移位):

(3.A) 令  $\Delta E$  为原子(或者说离子)在静止时的两个能级差,假定静止原子在能级跃迁后产生一个光子并形成反冲原子. 考虑相对论效应,试用能级差  $\Delta E$  和初始原子静止质量  $m_0$  来表述发射光子的能量  $h\nu$ .

(3.B) 现在,试对  $H_e^+$  离子这种相对论频移比值  $(\Delta\nu/\nu)_{\text{反冲}}$  作出数值计算. 计算结果应当得出这样的结论,即反冲频移远小于(2)间中得到出的引力红移.

计算用常量:

$H_c^+$  的静能量:  $m_0c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV}$ ;

$H_c^+$  的能级:  $E_n = -(4 \times 13.6/n^2) \text{ eV}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ .

(第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克)试题)

解 (1) 光子质量

$$m = h\nu/c^2.$$

用下标  $i$  表示初态, 下标  $f$  表示远离星球的终态, 则有能量关系式

$$h\nu_i - G \frac{Mm_i}{r} = h\nu_f - G \frac{Mm_f}{\infty} = h\nu_f,$$

$|\Delta\nu| \ll \nu$ , 意味着光子能量的相对变化很小, 故有

$$h\nu \approx h\nu_i,$$

$$\frac{h\nu_f - h\nu_i}{h\nu} \approx \left( -G \frac{Mm_i}{r} \right) / m_i c^2 = -GM/rc^2.$$

对于从半径为  $R$  的星球表面发射的光子, 便有

$$\Delta\nu/\nu = -GM/Rc^2,$$

$\Delta\nu$  取负, 表示频率减小, 波长  $\lambda$  则增大, 即有频率红移.

(2) 光子从初位置  $r_i$  到终位置  $r_f$  的能量减少为

$$h\nu_i - h\nu_f = -G \frac{Mm_f}{r_f} + G \frac{Mm_i}{r_i},$$

光子能量变化很小,  $m_f \approx m_i = h\nu_i/c^2$ , 即得

$$h\nu_i - h\nu_f \approx G \frac{M(h\nu_i)}{c^2} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right),$$

由此解得  $\nu_f/\nu_i = 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$ .

本项实验中,  $r_i$  即为星球半径  $R$ ,  $r_f$  则为  $R$  与  $d$  之和, 故有

$$\nu_f/\nu_i = 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right). \quad (1)$$

为了能对飞船中的  $H_c^+$  离子进行共振激发, 射来的光子必须通过多普勒效应使其频率又从  $\nu_i$  升为  $\nu$ . 设  $\nu'$  为飞船离子接收到的光谱频率, 由

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu',$$

再据题文提供的数据表可知  $\beta \ll 1$ , 故近似有

$v_1/v' = (1 - \beta)^{1/2}(1 + \beta)^{-1/2} = (1 - \beta/2)(1 - \beta/2) \approx 1 - \beta$ .  
令  $v' = v_1$ , 得

$$v_1/v_1 = 1 - \beta, \quad (2)$$

联立①②式, 导得

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right),$$

或 
$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} \left( \frac{R}{d} + 1 \right).$$

利用题文给出的数据表, 可得  $\beta^{-1}$  对应  $d^{-1}$  数据表如下:

$\beta^{-1}/10^5$	0.298	0.305	0.313	0.325	0.338
$d^{-1}/10^{-8} \text{ m}^{-1}$	0.026	0.050	0.075	0.111	0.150

据此可画出  $\beta^{-1}-d^{-1}$  的线性关系曲线如图 8-33 所示. 对于该直线, 有

$$\text{斜率} = \alpha R, \quad \alpha = Rc^2/GM;$$

$$\beta^{-1} \text{ 轴截距} = \alpha.$$

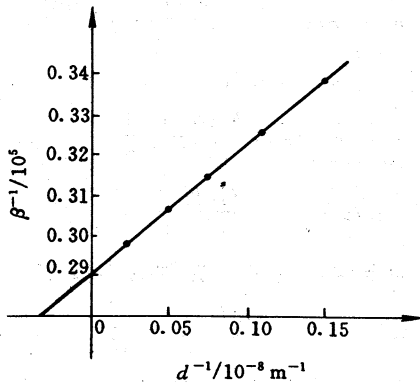


图 8-33

从图线上可测得

$$\alpha R = 3.2 \times 10^{12} \text{ m}, \quad \alpha = 0.29 \times 10^5,$$

最后可算得

$$R = \frac{aR}{a} = 1.104 \times 10^8 \text{ m}, \quad M = \frac{Rc^2}{Ga} = 5.11 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

(事实上在设计题文所给数据表时,已先取定  $R=1.11 \times 10^8 \text{ m}$ ,  $M=5.2 \times 10^{30} \text{ kg}$ .)

(3. A) 原子发射光子后的静质量记为  $m'_0$ , 动量记为  $p$ ; 发射出的光子频率记为  $\nu$ . 由能量守恒和动量守恒, 得

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_0'^2 c^4} + h\nu = m_0 c^2,$$

$$p = h\nu/c.$$

联立两式, 相继可得

$$(m_0 c^2 - h\nu)^2 = p^2 c^2 + m_0'^2 c^4 = (h\nu)^2 + m_0'^2 c^4,$$

$$(m_0 c^2)^2 - 2h\nu m_0 c^2 = m_0'^2 c^4,$$

$$h\nu(2m_0 c^2) = (m_0^2 - m_0'^2) c^4 = (m_0 - m_0') c^2 (m_0 + m_0') c^2.$$

将能级差  $\Delta E$  与  $m_0, m_0'$  的关系  $\Delta E = m_0 c^2 - m_0' c^2$  代入上式, 得

$$h\nu(2m_0 c^2) = \Delta E(2m_0 c^2 - \Delta E),$$

解出

$$h\nu = \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}\right) \Delta E.$$

(3. B) 不考虑原子反冲, 所发射的光子频率为

$$\nu_0 = \Delta E/h,$$

反冲频移  $\Delta\nu = \nu_0 - \nu$  对应的频移比可导得为

$$(\Delta\nu/\nu)_{\text{反冲}} = \Delta\nu/\nu_0 = \Delta E/2m_0 c^2.$$

以  $\text{H}_c^+$  离子从  $n=2$  到  $n=1$  的光子发射为例, 作计算如下.

$$\Delta E = 40.8 \text{ eV}, \quad m_0 c^2 = 3752 \times 10^6 \text{ eV},$$

离子反冲频移比为

$$\Delta\nu/\nu_0 = 5.44 \times 10^{-9},$$

由前面讨论得到的引力红移公式, 可估算得

$$\frac{|\Delta\nu|}{\nu} = \left| -\frac{GM}{Rc^2} \right| \approx 10^{-5}.$$

可见离子反冲频移远小于引力红移, 在太空引力红移实验中完全可以略去.