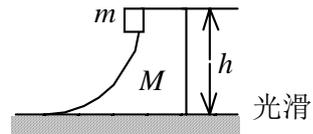


一、填空题（每题 4 分，共计 48 分）

1. 一个人站在平板车上掷铅球，人和车总质量为 M ，铅球的质量为 m ，平板车可沿水平、光滑的直轨道移动。设铅直平面为 xy 平面， x 轴与轨道平行， y 轴正方向竖直向上。已知未掷球时，人、车、球皆静止。球出手时沿斜上方，它相对于车的初速度在 xy 平面内，其大小为 v_0 ，方向与 x 轴正向的夹角为 θ ，人在掷球过程中对车无滑动，则球被抛出之后，车

对地的速度 $\vec{V} =$ _____，球对地的速度 $\vec{v} =$ _____。

2. 如图所示，一光滑的滑道，质量为 M 高度为 h ，放在一光滑水平面上，滑道底部与水平面相切。质量为 m 的小物块自滑道顶部由静止下滑，则物块滑到地面时，滑道的速度



为 _____；物块下滑的整个过程中，滑道对物块所作的功为 _____。

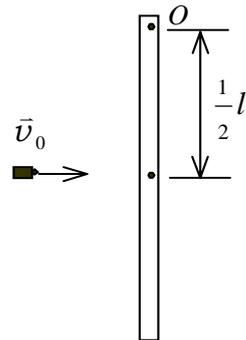
3. 一个力 F 作用在质量为 1.0 kg 的质点上，使之沿 x 轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x = 3t - 4t^2 + t^3$ (SI)。在 0 到 4 s 的时间间隔内，力 F 的冲量大小

$I =$ _____；力 F 对质点所作的功 $W =$ _____。

4. 一块质量为 m 的均匀正方形薄板，其边长为 L ，它以其一边为轴转动时转动惯量为

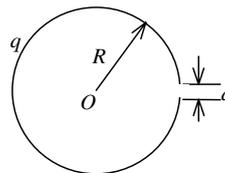
_____；它以过中心且垂直于板的轴转动时，转动惯量为 _____。

5. 如图所示，一长为 l ，质量为 M 的均匀细棒悬挂于通过其上端的光滑水平固定轴上。现有一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 射向棒的中心，并以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速度穿出棒。在此射击过程中细棒和子弹系统对轴的 _____ 守恒。如果此后棒的最大偏转角恰为 90° ，则 \vec{v}_0 的大小 $v_0 =$ _____。



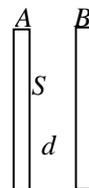
6. 三个质量相等的带电小球在光滑水平面上沿一直线排列，间距为 L ， $q_B = -3q$ ， $q_A = 6q$ ， F 为恒定外力。为使三者始终保持间距为 L 的运动， $F =$ _____， $q_C =$ _____。

7. 一半径为 R 的带有一缺口的细圆环, 缺口长度为 d ($d \ll R$) 环上均匀带有正电, 电荷为 q , 如图所示. 则圆心 O 处的场强大小



$E =$ _____, 场强方向为 _____.

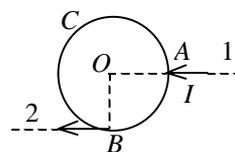
8. 如图所示, A 、 B 为靠得很近的两块平行的金属大平板, 两板的面积均为 S , 板间的距离为 d . 今使 A 板带电荷 q_A , B 板带电荷 q_B , 且 $q_A > q_B$. 则 A



板的靠近 B 的一侧所带电荷为 _____; 两板间电势差

$U =$ _____.

9. 如图所示, 用均匀细金属丝构成一半径为 R 的圆环 C , 电流 I 由导线 1 流入圆环 A 点, 并由圆环 B 点流入导线 2. 设导线 1 和导线 2 与圆环共面, 则环心 O 处的磁感强度大小为



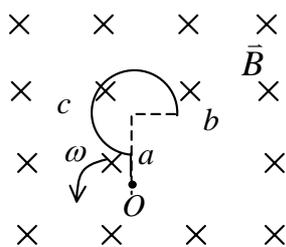
_____ , 方向 _____.

10 一个半径为 R 、面电荷密度为 σ 的均匀带电圆盘, 以角速度 ω 绕过圆心且垂直盘面的轴线 AA' 旋转; 今将其放入磁感强度为 \vec{B} 的均匀外磁场中, \vec{B} 的方向垂直于轴线 AA' . 在距

盘心为 r 处取一宽为 dr 的圆环, 则圆环内相当于有电流 _____, 该电流环所

受磁力矩的大小为 _____, 圆盘所受合力矩的大小为 _____.

11. 一导线被弯成如图所示形状, acb 为半径为 R 的四分之三圆弧, 直线段 Oa 长为 R . 若此导线放在匀强磁场 \vec{B} 中, \vec{B} 的方向垂直图面向内. 导线以角速度 ω 在图面内绕 O 点匀速转动, 则此



导线中的动生电动势 $\mathcal{E}_i =$ _____, 电势最高的

点是 _____.

12. 在一个圆形平板电容器内, 存在着一均匀分布的随时间变化的电场, 电场强度为 $\vec{E} = E_0 e^{-t/\tau}$ (E_0 和 τ 皆为常量), 则在任意时刻, 电容器内距中心轴为 r 处的能流密度的大小

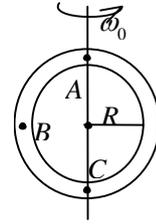
为 _____, 方向为 _____.

二、计算题(本题 72 分)

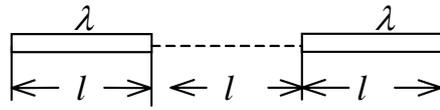
13. (本题 10 分) 我们称两颗相距很近、相互吸引并绕其质心转动的恒星为双星, 用望远镜观测双星时, 亮的一颗叫主星, 暗的一颗叫伴星. 设主星 A 的质量为 m_1 伴星 B 的质量为 m_2 , 相隔距离为 a , 求当它们相互吸引而绕其质心做圆周运动时的周期 T 的表达式.

14. (本题 12 分) 飞机降落时的着地速度大小 $v=90 \text{ km/h}$, 方向与地面平行, 飞机与地面间的摩擦系数 $\mu=0.10$, 迎面空气阻力为 $C_x v^2$, 升力为 $C_y v^2$ (v 是飞机在跑道上的滑行速度, C_x 和 C_y 为某两常量). 已知飞机的升阻比 $K=C_y/C_x=5$, 求飞机从着地到停止这段时间所滑行的距离. (设飞机刚着地时对地面无压力)

15. (本题 10 分) 空心圆环可绕光滑的竖直固定轴 AC 自由转动, 转动惯量为 J_0 , 环的半径为 R , 初始时环的角速度为 ω_0 . 质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点, 由于某种微小干扰, 小球沿环向下滑动, 问小球滑到与环心 O 在同一高度的 B 点和环的最低处的 C 点时, 环的角速度及小球相对于环的速度各为多大? (设环的内壁和小球都是光滑的, 小球可视为质点, 环截面半径 $r \ll R$.)



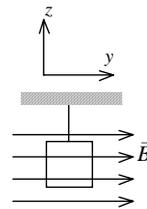
16. (本题 10 分) 两根相同的均匀带电细棒, 长为 l , 电荷线密度为 λ , 沿同一条直线放置. 两细棒间最近距离也为 l , 如图所示. 假设棒上的电荷是不能自由移动的, 试求两棒间的静电相互作用力.



17. (本题 15 分) 如图, 电流从内部开始沿第一根导线顺时针通过后, 紧挨着沿第二根逆时针返回, 如此由内到外往返. 最后一根导线中的电流沿 (1) 逆时针方向 (2) 顺时针方向, 设导线中的电流强度为 I , R 远大于导线的直径. 求 (1)、(2) 两种情况下, O 点处的磁感强度 \vec{B} 的大小与方向.



18. (本题 15 分) 一面积为 A 、总电阻为 R 的导线环用一根扭转刚度为 K 的弹性细丝 (被扭转 α 角时, 其弹性恢复扭力矩 $M_K = K\alpha$) 挂在均匀磁场 \vec{B} 中, 如图. 线圈在 yz 平面处于平衡, 设线圈绕 z 轴的转动惯量为 I . 现将环从图中位置转过一个小角度 θ 后释放之, 忽略线圈自感, 试用已知参数写出此线圈的转角与时间的方程.



一、填空题

1. $-\frac{mv_0 \cos \theta}{M+m} \vec{i}$ $v_0 \cos \theta (1 - \frac{m}{M+m}) \vec{i} + v_0 \sin \theta \vec{j}$

2. $\sqrt{\frac{2m^2 gh}{(m+M)M}}$ $-(\frac{m}{m+M})mgh$

3. $16 \text{ N} \cdot \text{s}$ 176 J

4. $\frac{1}{3} mL^2$ $\frac{1}{6} mL^2$

5. 角动量 $\frac{4M}{3m} \sqrt{3gl}$

6. $\frac{18kq^2}{L^2}$ $8q$

7. $\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^2(2\pi R - d)} \approx \frac{qd}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}$ 从 O 点指向缺口中心点.

8. $\frac{1}{2}(q_A - q_B)$ $(q_A - q_B) \frac{d}{2\epsilon_0 S}$

9. $\mu_0 I / (4\pi R)$ 垂直纸面向内

10. $\sigma\omega r dr$ $\pi\sigma\omega r^3 B dr$ $\pi\sigma\omega R^4 B / 4$

11. $\frac{5}{2} B\omega R^2$ O 点

12. $\frac{\epsilon_0 r}{2\tau} E_0^2 e^{-2t/\tau}$ 沿半径方向指向电容器外

二、计算题

13. 解: A 、 B 间的相互吸引力. $F(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$,

折合质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

讨论 B 对 A 的运动, 相当于 A 被固定、 B 的质量变为 μ 时的运动. 其运动方程

为 $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$

$\therefore m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2) m_2}{r^3} \vec{r} = -G \frac{M m_2}{r^3} \vec{r}$

这也相当于主星 A 被固定、 A 的质量为 $m_1 + m_2 = M$ 时, 伴星 B 的运动方程. 而行星沿圆形轨道运行时, 设轨道半径为 a

其周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$

类比可得 $T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$

14.解：以飞机着地点为坐标原点，飞机滑行方向为 x 轴正向。设飞机质量为 m ，着地后地面对飞机的支持力为 N 。在竖直方向上

$$N + C_y v^2 - mg = 0 \quad \therefore N = mg - C_y v^2$$

飞机受到地面的摩擦力 $f = \mu N = \mu(mg - C_y v^2)$

在水平方向上 $-\mu(mg - C_y v^2) - C_x v^2 = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$

即
$$\frac{mv dv}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)v^2} = -dx$$

$x=0$ 时， $v=v_0=90 \text{ km/h}=25 \text{ m/s}$ 。 $x=S$ （滑行距离）时， $v=0$

$$\int_{v_0}^0 \frac{mv dv}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)v^2} = -\int_0^S dx = -S$$

$$\frac{\frac{1}{2}m}{C_x - \mu C_y} \int_{v_0}^0 \frac{d[\mu mg + (C_x - \mu C_y)v^2]}{\mu mg + (C_x - \mu C_y)v^2} = -S$$

解得
$$S = \frac{\frac{1}{2}m}{C_x - \mu C_y} \ln \frac{\mu mg + (C_x - \mu C_y)v_0^2}{\mu mg}$$

\therefore 飞机刚着地前瞬间，所受重力等于升力，即

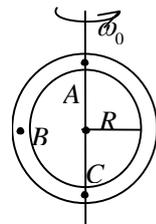
$$mg = C_y v_0^2$$

$\therefore C_y = \frac{mg}{v_0^2}$ ， $C_x = \frac{C_y}{K} = \frac{mg}{5v_0^2}$

代入 S 表达式中并化简，然后代入数据

$$S = \frac{5v_0^2}{2g(1-5\mu)} \ln \frac{1}{5\mu} = 221 \text{ m}$$

15.解：选小球和环为系统。运动过程中所受合外力矩为零，角动量守恒。对地球、小球和环系统机械能守恒。取过环心的水平面为势能零点。



小球到 B 点时： $J_0 \omega_0 = (J_0 + mR^2) \omega$ ①

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m(\omega^2 R^2 + v_B^2)$$
 ②

式中 v_B 表示小球在 B 点时相对于地面的竖直分速度，也等于它相对于环的速度。由式①得：

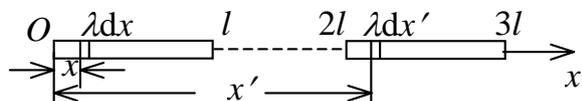
$$\omega = J_0 \omega_0 / (J_0 + mR^2)$$

代入式②得
$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J_0 \omega_0^2 R^2}{mR^2 + J_0}}$$

当小球滑到 C 点时，由角动量守恒定律，系统的角速度又回复至 ω_0 ，又由机械能守恒定律知，小球在 C 的动能完全由重力势能转换而来。即：

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mg(2R), \quad v_C = \sqrt{4gR}$$

16.解：选左棒的左端为坐标原点 O ， x 轴沿棒方向向右，在左棒上 x 处取线元 dx ，其电荷为 $dq = \lambda dx$ ，它在右棒的 x' 处产生的场强为：



$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x'-x)^2}$$

整个左棒在 x' 处产生的场强为:

$$E = \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x'-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'} \right)$$

右棒 x' 处的电荷元 $\lambda dx'$ 在电场中受力为:

$$dF = E\lambda dx' = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'} \right) dx'$$

整个右棒在电场中受力为:

$$F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{2l}^{3l} \left(\frac{1}{x'-l} - \frac{1}{x'} \right) dx' = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4}{3}, \text{ 方向沿 } x \text{ 轴正向.}$$

左棒受力

$$F' = -F$$

17.解: 设半圆形导线来回往返共 N 次, 因为第一根是顺时针的, 若最后一根逆时针, 则有 $N/2$ 根逆时针, $N/2$ 根顺时针. 若最后一根顺时针, 则有 $(N-1)/2$ 根逆时针, $(N+1)/2$ 根顺时针.

(1) 外一根为逆时针的情况, $r \rightarrow r + dr$ 内单说逆时针或单说顺时针的电流为

$$dI = I \frac{N}{2R} dr$$

它们在 O 点产生的磁场
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{4r} = \frac{\mu_0 IN}{8R} \frac{dr}{r}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \int_R^{2R-R/N} dB - \int_{R+R/N}^{2R} dB = \frac{\mu_0 IN}{8R} \ln \frac{2R-R/N}{R} - \frac{\mu_0 IN}{8R} \ln \frac{2R}{R+R/N} \\ &= \frac{\mu_0 IN}{8R} \left[\ln 2 \left(1 - \frac{1}{2N}\right) + \ln \frac{1+1/N}{2} \right] = \frac{\mu_0 IN}{8R} \left[\ln \left(1 - \frac{1}{2N}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$\therefore \ln \left(1 - \frac{1}{2N}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{N}\right) = -\frac{1}{2N} + \frac{1}{N} = \frac{1}{2N}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{16R}$$

方向 \otimes

(2) 最外一根为顺时针的情况,

$$\begin{aligned} B &= \int_R^{2R} dB - \int_{R+R/N}^{2R-R/N} dB = \frac{\mu_0 IN}{8R} \left(\ln 2 - \ln \frac{2R-R/N}{R+R/N} \right) \\ &= \frac{\mu_0 IN}{8R} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{N}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 IN}{8R} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N} \right) = \frac{3\mu_0 I}{16R} \end{aligned}$$

方向 \otimes



18.解：当线圈平面从图中位置转过小角度 α 时，穿过线圈的磁通量为：

$$\Phi = BA \sin \alpha$$

α 变化时线圈中感应电动势为 $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = BA \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

感应电流 $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BA}{R} \frac{d\alpha}{dt} \cos \alpha$

磁矩 $m = iA = \frac{BA^2}{R} \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

所受磁力矩 $M_m = \frac{B^2 A^2}{R} \cos^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

线圈还受到细丝弹性恢复力矩 $M_K = K\alpha$ ，两者均阻碍线圈运动。

$$\therefore \frac{B^2 A^2 \cos^2 \alpha}{R} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + K\alpha = -I \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

$$\because \alpha \leq \theta \quad \theta \approx 0 \quad \therefore \cos \alpha \approx 1$$

$$\therefore I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{B^2 A^2}{R} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + K\alpha = 0$$

其通解为： $\alpha = e^{-\beta t} (A_1 \cos rt + A_2 \sin rt)$

其中 $\beta = \frac{B^2 A^2}{2IR} \quad r = \sqrt{\frac{K}{I} - \beta^2}$

利用初始条件： $\alpha|_{t=0} = \theta \quad \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0$

可得 $A_1 = \theta, \quad A_2 = 0 \quad \alpha = \theta e^{-\beta t} \cos rt$

