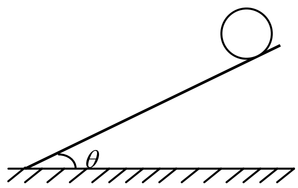
一、填空题（每题 4 分, 共计 40 分）

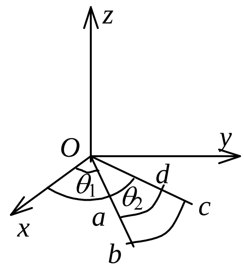
1．匀质圆柱体，$t = 0$ 开始在倾角为θ 的斜面上从静止释放，如图所示。如果圆柱体与斜面间的摩擦因数$\mu = 0$，圆柱体平动下滑，$t > 0$ 时刻下滑速度记为 v_0。若$\mu > 0$，但较小，圆柱体连滚带滑地沿斜面向下运动。当μ 达到某一临界值$\mu_0 =$______________________时，



圆柱体恰好能纯滚动地沿斜面向下运动，t 时刻质心速度为 v_0 的___________倍。

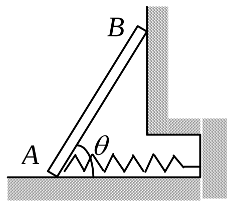
2．两个小球在光滑桌面上运动，质量分别为 $m_1 = 10$ g，$m_2 = 50$ g，速度分别为 $\upsilon_1 = 0.30$ m/s，$\upsilon_2 = 0.10$ m/s 相向运动发生正碰，碰撞后 m_2 恰好静止，则恢复系数 $e =$_________，是____________碰撞．（填写：完全弹性、非弹性、完全非弹性）

3．空间有一力场，处在 Oxy 平面内任一位置 r 处的质点，受力大小为 $F = w/r$，方向始终与$(\vec{k}\times\vec{r})$的方向相同，其中 w 是与质点和力场性质有关的常量，$\vec{k}$ 为 z 方向上的单位矢量．质点沿图中 $abcda$ 路径运动一周，其中 ba 与 cd 为指向原点的直线段，ad 与 bc 为以原点为圆心的圆弧，则力 F 在两段圆弧 bc 和 da 路径上作的功



$A_{bc} =$_______________________；$A_{da} =$_____________________；绕闭合路径 $abcda$ 一周所作的功 $A = \oint_{abcda} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} =$___________________.

4．一长为 l、重 W 的均匀梯子，靠墙放置，如图．梯子下端连一劲度系数为 k 的弹簧．当梯子靠墙竖直放置时，弹簧处于自然长度．墙和地面都是光滑的．当梯子依墙而与地面成θ角且处于平衡状态时，



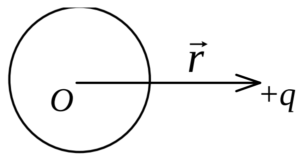
(1) 地面对梯子的作用力的大小为__________________.

(2) 墙对梯子的作用力的大小为________________________.

(3) W、k、l、θ应满足的关系式为______________________.

5．转动着的飞轮的转动惯量为 J，在 $t=0$ 时角速度为ω_0．此后飞轮经历制动过程．阻力矩 M 的大小与角速度ω的平方成正比，比例系数为 k (k 为大于 0 的常量)．当$\omega = \dfrac{1}{3}\omega_0$时，飞轮的角加速度$\beta =$ __________．从开始制动到$\omega = \dfrac{1}{3}\omega_0$所经过的时间 $t =$__________________.

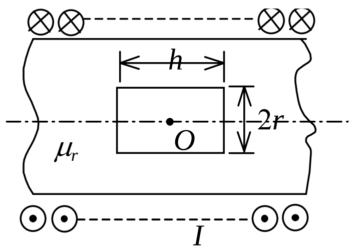
6．如图所示，在电荷为＋q的点电荷电场中，放入一不带电的金属球，从球心 O 到点电荷所在处的矢径为 $\vec{r}$，属球上的感生电荷净电荷 q'=__________ ，这些感生电荷在球心 O 处产生的电场强度 $\vec{E}'$=____________ .



7．有两个离地很远的相同的导体球，半径均为 a；它们的中心相距 d，且 $d>>a$．起初两球带有相同的电荷 q，然后用导线使它们先后分别接地后再绝缘，接地时间足以使它们与地达到静电平衡，则最后两球留下的电荷分别是____________和_____________.

8．一个半径为 R、面电荷密度为σ 的均匀带电圆盘，以角速度ω绕过圆心且垂直盘面的轴线 AA' 旋转；今将其放入磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀外磁场中 $\vec{B}$ 的方向垂直于轴线 AA'．在距盘心为 r 处取一宽为 dr 的圆环，则圆环内相当于有电流______________，该电流环所受磁力矩的大小为______________，圆盘所受合力矩的大小为_______________.

9．单位长度上有 n 匝线圈的无限长载流螺线管内充满相对磁导率为μ_r 的磁介质，线圈内通有电流 I．在磁介质内轴对称地挖出一个半径为 r，长为 h 的圆柱空腔(如图所示)．若空腔中心 O 点的磁场强度用 H_O 表示，则



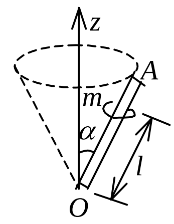
(1) 当 $h>>r$ 时，H_O＝____________________；

(2) 当 $h<<r$ 时，H_O＝____________________.
(设挖去磁介质后没有影响原来的磁化状态)

10．由半径为 R、间距为 d（$d << R$）的两块圆盘构成的平板电容器内充满了相对介电常数为ε_r的介质.电容器上加有交变电压 $V = V_0\cos\omega t$ 板间电场强度 $E(t)$ = ______________，极板上自由电荷的面密度$\sigma(t)$ = ______________，板间离中心轴线距离为 r 处的磁感强度 $B(r，t)$ = ________________.

二、计算题（每题 10 分, 共计 60 分）

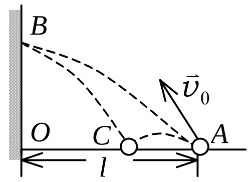
11．一光滑直杆 OA 与竖直轴 Oz 成α 角（α 为常数）．直杆以匀角速度绕 Oz 轴转动，杆上有一质量为 m 的小滑环，在距 O 点为 l 处与直杆相对静止如图示．试以 OA 杆为参考系求出此时杆的角速度ω，并讨论小滑环是否处于稳定平衡？



12．如图所示，地面上 A 点距离墙为 l 米，从 A 点沿 45° 方向对墙抛出一个球，球在墙 B 处与墙垂直碰撞后，被墙反弹回来，落在地面 C 点，再次被地面弹起，又落回到 A 点．球与墙、地面碰撞的恢复系数一样，地面光滑. 试求

(1) $\overline{OB}$ 与 $\overline{OC}$，

(2) 恢复系数 e

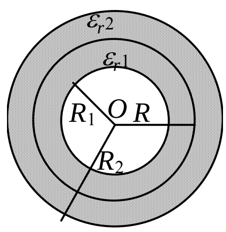


13．某人站在水平转台的中央，与转台一起以恒定的转速 n_1 转动，他的两手各拿一个质量为 m 的砝码，砝码彼此相距 l_1 (每一砝码离转轴$\dfrac{1}{2}l_1$),当此人将砝码拉近到距离为 l_2 时(每一砝码离转轴为$\dfrac{1}{2}l_2$)，整个系统转速变为 n_2．求在此过程中人所作的功．(假定人在收臂过程中自身对轴的转动惯量的变化可以忽略)

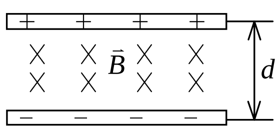
14．如图所示，一球形电容器，内球壳半径为 R_1，外球壳半径为 R_2 ($R_2 < \sqrt{2}R_1$)，其间充有相对介电常数分别为ε_{r1} 和ε_{r2} 的两层各向同性均匀电介质($\varepsilon_{r2}=\varepsilon_{r1}/2$)，其界面半径为 R．若两种电介质的击穿电场强度相同为 E_M，问：

(1) 当电压升高时，哪层介质先击穿？

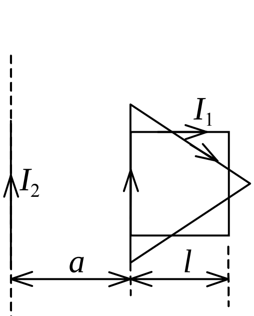
(2) 该电容器能承受多高的电压？



15．一充电的真空平板电容器，两极板之间距离为 d，两板间电势差为 U．在负极板附近可发射初速可略($v_0 = 0$)的电子．今将电容器放在均匀磁场中，磁场方向垂直图面向里，如图所示(电容器极板平面与图面垂直)．问：欲阻止电子到达正极板，该磁场的磁感强度 B 至少为多大(不计重力影响)？



16．如图示，有一由细软导线做成的边长为 $l=0.1$ m 的正方形线圈，其中流过电流 $I_1=1$ A 的电流，将正方形线圈放到一通有电流 $I_2=2$ A 的无限长直导线旁边，使二者共面，距离 $a=0.5$ m，有一外力作用到正方形线圈上，使其变成等边三角形，且仍保持与长直导线共面，位置如图．求外力克服磁场力所做的功．[$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$]



参考答案

一、填空题（每题 4 分，共计 40 分）

1．$\tan\theta/3$　　2 分　　　　　2/3　　　2 分

2．　0.5　　2 分　　　　　非弹性　　2 分

3．$w(\theta_2-\theta_1)$　1 分　　$-w(\theta_2-\theta_1)$　　1 分　　0　　　　　2 分

4．　W　　　1 分　　　$kl\cos\theta$　　　1 分　　$W=2kl\sin\theta$　　2 分

5．　$-\dfrac{k\omega_0^2}{9J}$　　　2 分　　$\dfrac{2J}{k\omega_0}$　　　2 分

6．　0　　　　2 分　　$q\vec{r}/\left(4\pi\varepsilon_0 r^3\right)$　　　2 分

7．　$-(a/d)q$　　2 分　　$(a/d)^2q$　　　　2 分

8．　$\sigma\omega r\,\mathrm{d}r$　　1 分　　$\pi\sigma\omega r^3B\,\mathrm{d}r$　　　1 分　　$\pi\sigma\omega R^4B/4$　　2 分

9．　nI　　　　2 分　　$\mu_r nI$　　　　2 分

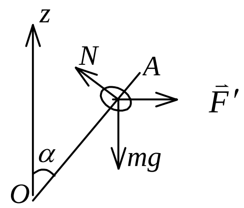
10．$(V_0/d)\cos\omega t$　　　1 分　　　$\varepsilon_r\varepsilon_0(V_0/d)\cos\omega t$　1 分

$-\dfrac{1}{2}(\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0V_0/2d)\omega\, r\sin\omega t$　　　2 分

（不写负号也算对）

二、计算题（每题 10 分, 共计 60 分）

11．(1) 取杆 OA 为参考系，小环处于静止状态，受力如图：$m\vec{g}$、$\vec{N}$ 及惯性离心力 $\vec{F}'$ 三者合力为零.　　　受力图 2 分



$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}'=0$$

其中　　　　$F'=m(l\sin\alpha)\omega^2$　　　　①

将①式沿 OA 杆方向取投影可得

$$m(l\sin\alpha)\omega^2\sin\alpha-mg\cos\alpha=0 \qquad ②$$

∴　　　$\omega=\dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{l}}$　　　　4 分

(2) 因为 N 与杆是垂直的，故无论 N 取何值，都不影响小环沿杆的运动．现假定小环受到一个扰动，向杆 A 端发生一位移Δl，即Δl 大于零．由上面②式知：

$$m[(l+\Delta l)\omega^2]\sin\alpha>mg\cos\alpha$$

即惯性离心力 F' 沿杆的分量大于重力沿杆的分量，二者方向相反，合力指向杆的 A 端，故小环将沿杆向 A 端加速，不能再返回平衡位置．反之，如小环向 O 端发生一Δl 位移，此时$\Delta l<0$，故　　　2 分

$$m[(l+\Delta l)\omega^2]\sin\alpha<mg\cos\alpha$$

小环将受到一个指向杆 O 端的合力，也不会再返回平衡位置，

∴　小环所处平衡是不稳定平衡．　　　2 分

12．(1)　　　$l=\upsilon_0\cos45^\circ t$　　　①

$\upsilon_0\sin45^\circ-g\,t=0$　　　②　　　2 分

由①、②解得　$\upsilon_0=\sqrt{2gl}$，　$t=\dfrac{l}{\upsilon_0\cos45^\circ}$

$\overline{OB}=\upsilon_0\sin45^\circ t-\dfrac{1}{2}gt^2=l-\dfrac{1}{2}l=\dfrac{1}{2}l$　　　2 分

设弹回速度为 v_x，则有 $e=\dfrac{v_x}{v_0\cos45°}$，$v_x=ev_0\cos45°$

弹回后落地时间与上面求出的相同，故

$$\overline{OC}=v_x t=ev_0\cos45°t=el \qquad 2\text{分}$$

(2) 在 C 点球落下的竖直速度为 $v_y=\sqrt{2g\overline{OB}}=\sqrt{gl}$，跳起的竖直速度的大小 $v'_y=ev_y=e\sqrt{gl}$ 故从 C 到 A 经过的时间 $t_2=2v'_y/g=2e\sqrt{l/g}$

$$\therefore \quad \overline{CA}=v_x t_2=ev_0\cos45°\cdot t_2==e\frac{\sqrt{2gl}}{\sqrt{2}}\cdot 2e\sqrt{l/g}=2e^2l \qquad 2\text{分}$$

因 $\overline{OC}+\overline{CA}=l=el+2e^2l$，故

$$e+2e^2=1,\ e=\frac{1}{2} \qquad 2\text{分}$$

13．(1) 将转台、砝码、人看作一个系统，过程中人作的功 W 等于系统动能之增量：

$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}(J_0+\frac{1}{2}ml_2^2)4\pi^2n_2^2-\frac{1}{2}(J_0+\frac{1}{2}ml_1^2)4\pi^2n_1^2 \qquad 4\text{分}$$

这里的 J_0 是没有砝码时系统的转动惯量．

(2) 过程中无外力矩作用，系统的动量矩守恒：

$$2\pi(J_0+\frac{1}{2}ml_1^2)\,n_1=2\pi\,(J_0+\frac{1}{2}ml_2^2)\,n_2$$

$$\therefore \quad J_0=\frac{m\left(l_1^2n_1-l_2^2n_2\right)}{2\left(n_2-n_1\right)} \qquad 4\text{分}$$

(3) 将 J_0 代入 W 式，得 $W=\pi^2mn_1n_2\left(l_1^2-l_2^2\right)$ 2 分

14．(1) 设两球壳上分别带电荷 $+Q$ 和 $-Q$，则其间电位移的大小为 $D=Q/(4\pi r^2)$ 两层介质中的场强大小分别为

$$E_1=Q/(4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r1}r^2) \qquad 2\text{分}$$

$$E_2=Q/(4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r2}r^2) \qquad 2\text{分}$$

在两层介质中场强最大处在各自内表面处，即

$$E_{1M}=Q/(4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r1}R_1^2),\qquad E_{2M}=Q/(4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r2}R^2)$$

两者比较可得 $E_{1M}/E_{2M}=\varepsilon_{r2}R^2/\left(\varepsilon_{r1}R_1^2\right)=R^2/\left(2R_1^2\right)$

已知 $R_2<\sqrt{2}R_1$，可得 $E_{1M}<E_{2M}$，可见外层介质先击穿． 3 分

(2) 当外层介质中最大场强达击穿电场强度 E_M 时，球壳上有最大电荷．

$$Q_M=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R^2E_M \qquad 1\text{分}$$

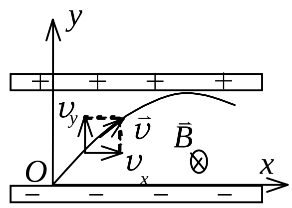
此时，两球壳间电压(即最高电压)为

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_{R}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{Q_M}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\int_{R_1}^{R}\frac{dr}{r^2}+\frac{Q_M}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\int_{R}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$=\varepsilon_{r2}RE_M\left(\frac{R-R_1}{\varepsilon_{r1}R_1}+\frac{R_2-R}{\varepsilon_{r2}R_2}\right) \qquad 2\text{分}$$

15．解法一：按如图坐标，电子在 z 方向不受力，由初始条件可知电子只在 Oxy 平面内运动



x 方向：　$m\dfrac{d\upsilon_x}{dt}=e\upsilon_y B$，

y 方向：　$m\dfrac{d\upsilon_y}{dt}=eE-e\upsilon_x B$　　4 分

$$m\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2}=-eB\frac{d\upsilon_x}{dt}=-\frac{e^2B^2}{m}\upsilon_y \qquad m\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2}+\frac{e^2B^2}{m}\upsilon_y=0 \qquad 1\text{ 分}$$

解得：　$\upsilon_y=A\sin\left(\dfrac{eB}{m}t+\phi\right)$，　$\dfrac{d\upsilon_y}{dt}=A\dfrac{eB}{m}\cos\left(\dfrac{eB}{m}t+\phi\right)$

由初始条件：　t＝0 时，υ_y＝0 ，　$\dfrac{d\upsilon_y}{dt}=A\dfrac{eB}{m}\cos\phi=\dfrac{eE}{m}$

可决定积分常数：　$\phi=0$，　$A=E/B$　　∴　$\upsilon_y=\dfrac{E}{B}\sin\dfrac{eB}{m}t$　　1 分

$$y=\int\upsilon_y\,dt=\int\frac{E}{B}\sin\frac{eB}{m}t\,dt=-\frac{mE}{eB^2}\cos\frac{eB}{m}t+C$$

由初始条件：　t＝0 时 y＝0　得　$C=\dfrac{mE}{eB^2}$

$$y=\frac{mE}{eB^2}\left(1-\cos\frac{eB}{m}t\right),\qquad y_{\max}=\frac{2mE}{eB^2}\qquad 2\text{ 分}$$

若电子达不到正极板，则　$y_{\max}=\dfrac{2mE}{eB^2}\le d$

即　$B^2\ge\dfrac{2mE}{ed}=\dfrac{2mU}{ed^2}$，　∴　$B\ge\dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mE}{e}}$　　2 分

解法二：电子不会受到垂直于图面方向的力，由初始条件可知电子只能在图面内运动．将电子的瞬时速度 $\vec{\upsilon}$ 分解为两个分量 $\vec{\upsilon}_1$ 和 $\vec{\upsilon}_2$ 并令 $\vec{\upsilon}_1$=常量，且 $\vec{\upsilon}_1\times\vec{B}=\vec{E}$，则电子的运动决定于以下两个方程

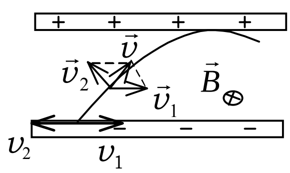
$$m\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt}=0\ ,\qquad m\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt}=-e\vec{\upsilon}_2\times\vec{B}\qquad 4\text{ 分}$$

∴可把电子的运动看成是两个分运动所合成，其一为以常量速度 $\vec{\upsilon}_1$ 沿 x 方向作匀速直线运动，　$|\vec{\upsilon}_1|=E/B=U/(Bd)$　　2 分

其二为以垂直于 $\vec{B}$ 的 $\vec{\upsilon}_2$ 在外磁场 $\vec{B}$ 中运动，也即作匀速率圆周运动．

因为电子从负极板上发出时，初速为 0，可知

$$|\vec{\upsilon}_2|=E/B=U/(Bd)$$



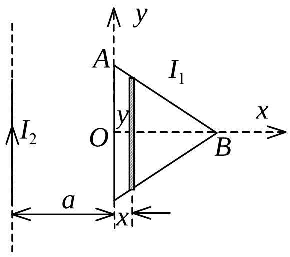
且圆周运动的半径为　$R=\dfrac{m|\vec{\upsilon}_2|}{eB}=\dfrac{mU}{eB^2d}$　　2 分

若电子达不到正极板　则　$2R\leqslant d$，　即　$\dfrac{2mU}{eB^2d}\le d$

或　$B^2\ge\dfrac{2mU}{ed^2}$　　$B\ge\dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}}$　　2 分

16．外力克服磁场力作功为　$A = I\Delta\Phi$

$\Delta\Phi$为两种情况的磁通量之差．　　2 分



设正方形的磁通量为Φ_1，则有：

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\int_0^l \frac{l\cdot dx}{a+x} = \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$　　2 分

$=7.29\times10^{-9}$ Wb　　1 分

设三角形的磁通量为Φ_2，三角形边长 $4l/3$．如图示，选坐标轴 x、y，A 点坐标(0，$2l/3$)，B 点坐标($2\sqrt{3}\,l/3$，0)，AB 边方程：

$$y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}x + 2l/3$$　　1 分

令：　$c = 2\sqrt{3}l/3$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\int_0^c \frac{2y\,\mathrm{d}x}{a+x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\int_0^c \frac{2\left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}x + 2l/3\right]}{a+x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^c \frac{x+a}{a+x}\mathrm{d}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{2}{3}l\right)\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{a+x}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}c + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{2}{3}l\right)\ln\frac{a+c}{a}\right]$$　　2 分

$=5.73\times10^{-9}$ Wb　　1 分

$A = I_1\,\Delta\Phi = I_1(\Phi_1 - \Phi_2) = 1.56\times10^{-9}$ J　　1 分