一、填空题（每题 4 分，共计 40 分）

1. 静水中停泊着两只质量皆为 M 的小船．第一只船在左边，其上站一质量为 m 的人，该人以水平向右速度 $\bar{\upsilon}$ 从第一只船上跳到其右边的第二只船上，然后又以同样的速率水平向左地跳回到第一只船上．此后

(1) 第一只船运动的速度为 $\bar{\upsilon}_1$＝__________________________.

(2) 第二只船运动的速度为 $\bar{\upsilon}_2$＝__________________________.

（水的阻力不计，所有速度都相对地面而言）

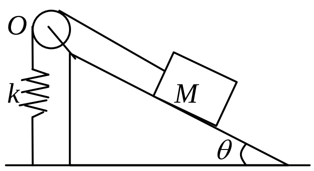
2. 有一火车，在水平地面上以不变的加速度 $\bar{a}$ 沿直线向前运动，当车速为 υ_0 时，从火车天花板上掉下一质量为 m 的螺帽．此后经过时间 t，相对火车静止的人看螺帽的动能为

________________________. 相对地面静止的人看螺帽的动能为________________________.

3. 转动着的飞轮的转动惯量为 J，在 t＝0 时角速度为 ω_0．此后飞轮经历制动过程．阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比，比例系数为 k (k 为大于 0 的常量)．当 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 时，飞

轮的角加速度 β＝ ___________．从开始制动到 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 所经过的时间 t＝_____________.

4. 如图所示，定滑轮半径为 r，绕垂直纸面轴的转动惯量为 J，弹簧倔强系数为 k，开始时处于自然长度．物体的质量为 M，开始时静止，固定斜面的倾角为 θ(斜面及滑轮轴处的摩擦可忽略，而绳在滑轮上不打滑)．物体被释放后沿斜面下滑的过程中，物

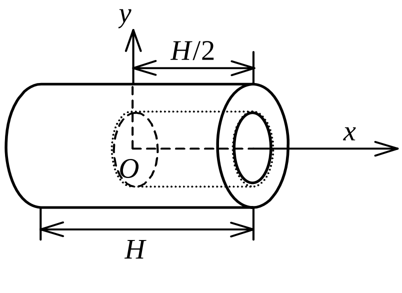


体、滑轮、绳子、弹簧和地球组成的系统的机械能________；

物体下滑距离为 x 时的速度值为 υ ＝____________________.

5. 如图所示，从半径为 R，长度为 H 的匀质圆柱体中挖出个同轴的半径为 $\frac{1}{2}R$，长度为 $\frac{1}{2}H$ 的圆柱形洞．此刚体的

质心的坐标为 x_c＝__________,y_c＝____________.



6. 一个平行板电容器的电容值 C = 100 pf，面积 S = 100 cm^2，两板间充以相对介电常量为

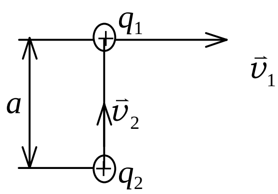
$\varepsilon_r = 6$ 的云母片 .当把它接到50 V的电源上时，云母中电场强度的大小 E =______________，

金属板上的自由电荷 q =________________.

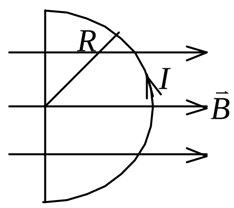
(真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$)

7. 三个完全相同的金属球 A、B、C，其中 A 球带有电荷 Q，而 B、C 球均不带电．先使 A 球同 B 球接触，分开后 A 球再和 C 球接触，最后三个球分别孤立地放置，则 A、B 两球所储存的电场能量 W_A，W_B，与 A 球原先所储存的电场能量 W_0 比较，W_A 是 W_0 的__________倍，W_B 是 W_0 的_____________ 倍.

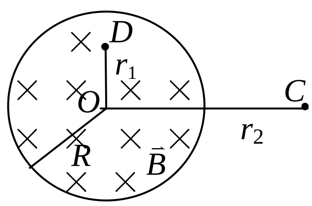
8. 如图，电荷分别为 q_1、q_2 的两个正点电荷，某时刻分别以速度 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ ($\vec{v}_1$ 的方向和 $\vec{v}_2$ 的方向垂直且 v_1，v_2 均远小于真空中光速)运动，则电荷为 q_2 的点电荷该时刻所受磁力的大小为________________．方向为____________.



9. 一半圆形闭合线圈，半径 R＝0.2 m，通过电流 I＝5 A，放在均匀磁场中，磁场的方向与线圈平面平行，如图所示．磁感强度 B＝0.5 T，则线圈所受到磁力矩为_____________．若此线圈受磁力矩的作用从上述位置转到线圈平面与磁场方向成30°角的位置，则此过程中磁力矩作功为_______________________.



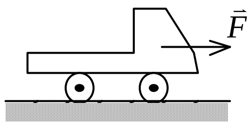
10. 如图．匀强磁场 $\vec{B}$，垂直于纸面向里，局限于半径为 R 的圆柱形空间区域，磁感强度 $\vec{B}$ 以 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ = 常量的速率增加，D 点在圆柱形空间内，到轴线距离为 r_1，C 点在圆柱形空间外，到轴线距离为 r_2．将一电子（质量为 m，电荷为$-e$）置于 D 点时电子的加速度大小$|\vec{a}_D|$=_________________________;



置于 C 点时电子的加速度大小$|\vec{a}_C|$=__________________．并在图中标明 $\vec{a}_C$，$\vec{a}_D$ 的方向.

二、计算题（每题 10 分, 共计 60 分）

11. 一辆洒水车沿水平公路笔直前进，车与地面之间的摩擦系数为 μ ，车载满水时质量为 M_0．设洒水车匀速将水喷出，洒出的水相对于车的速率为 u，单位时间内喷出的水的质量为 m_0．当洒水车在水平牵引力 $\vec{F}$ 的作用下在水平公路上由静止开始行进时，同时开始向外洒水．设洒水车的牵引力 $\vec{F}$ 为恒力，由动量定理在下面两种情况下计算洒水车的速度随时间变化的关系式．



(1) 水向与车前进方向垂直的两侧喷出；

(2) 水向车的正后方喷出．

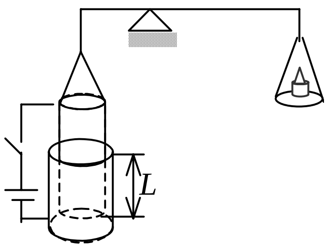
12.宇宙飞行器和小行星都绕太阳在同一平面内做圆周运动，飞行器的质量比小行星的质量小的多，飞行器的速率为 v_0，小行星的轨道半径为飞行器轨道半径的 6 倍。有人企图借助飞行器与小行星的碰撞使飞行器飞出太阳系，于是他便设计了如下方案：I.当飞行器在其圆周轨道的适当位置时，突然点燃飞行器上的喷气发动机，经过极短时间后立即关闭发动机，以使飞行器获得所需的速度，沿圆周运动的切线方向离开圆轨道；II. 飞行器到达小行星的轨道时正好位于小行星的前缘，速度的方向和小行星在该处速度的方向相同，正好可被小行星碰撞；III.小行星与飞行器的碰撞是弹性碰撞。不计燃料的燃烧质量。

(1)是通过计算证明按上述方案能使飞行器飞出太阳系。

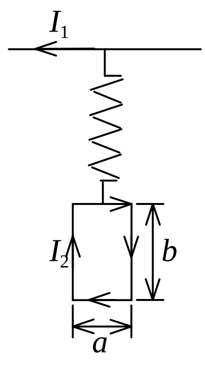
(2)设在上述方案中，飞行器从发动机取得的能量为 E_1。如果不采取上述方案而是令飞行器在圆轨道上突然点燃喷气发动机，经过极短时间后立即关闭发动机，以使飞行器获得足够的速度沿圆轨道切线方向离开圆轨道后能直接飞出太阳系。采用这种办法时，飞行器从发动机取得的能量的最小值用 E_2 表示。则 E_1/E_2 为多少？

13. 质量为 m，半径为 R 的均匀球体，从一倾角为θ的斜面上滚下．设球体与斜面间的摩擦系数为μ，求使该球体在斜面上只滚不滑时,θ角的取值范围．

14. 如图所示，一电容器由内、外半径分别为 a 和 b 的两个同轴圆筒组成，其轴线处于竖直方向．外筒固定，内筒悬挂在天平的一端．天平平衡时，内筒只有长度为 L 的一部分置于外筒中．当接上电源使两筒之间的电势差为 U 时，为了使天平保持平衡，右边称盘中需加多大质量的砝码？



15. 载有稳恒电流 I_1 的无限长直导线(看成刚体)下用一劲度系数为 k 的轻质弹簧挂一载有稳恒电流 I_2 的矩形线圈。设长直导线通电前弹簧长度为 L_0． 通电后矩形线圈将向下移动一段距离，求当磁场对线圈作的功满足 $A = \mu_0 I_1 I_2 a / 2\pi$时，线圈、弹簧、地球组成的系统的势能变化(忽略感应电流对 I_2 的影响).



16. 用细铜丝构成的圆环在地磁中绕其竖直直径转动，铜环处的磁感应强度为 44.5μT，其方向与水平方向向下成 60°角，已知铜的密度为 8.90×10^{3} kg·m^{-3}，电阻率为 1.70×10^{-8} Ω·m，计算其角速度从初始值降到其一半所需的时间。设空气和轴承处的摩擦忽略不计，并忽略自感效应。

参考答案

一、填空题（每题 4 分，共计 40 分）

1. $-\dfrac{2m}{m+M}\vec{\upsilon}$　　2 分　　$(2m/M)\vec{\upsilon}$　　2 分

2. $\dfrac{1}{2}m(a^2+g^2)t^2$　　2 分　　$\dfrac{1}{2}m[\upsilon_0^2+(gt)^2]$　　2 分

3. $-\dfrac{k\omega_0^2}{9J}$　　2 分　　$\dfrac{2J}{k\omega_0}$　　2 分

4. 守恒　　2 分　　$\sqrt{\dfrac{2Mgx\sin\theta-kx^2}{J/r^2+M}}$　　2 分

5. $-H/28$　　2 分　　0　　2 分

6. 9.42×10^3 V/m　　2 分　　5×10^{-9} C　　2 分

7. 1/16　　2 分　　1/4　　2 分

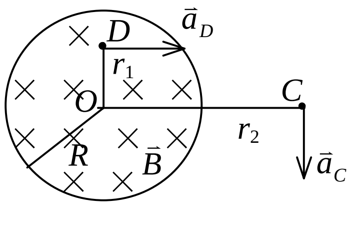
8. $F=\dfrac{\mu_0q_1q_2}{4\pi a^2}\upsilon_2\upsilon_1$　　2 分　　方向垂直 $\vec{\upsilon}_2$ 向左.　　2 分

9. 0.157 N·m　　2 分　　7.85×10^{-2} J　　2 分

10. $\dfrac{r_1e}{2m}\cdot\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$　　2 分

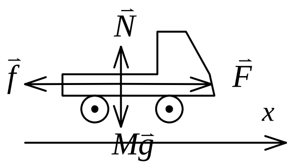
$\dfrac{R^2e}{2mr_2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$　　1 分

方向见图　　1 分



二、计算题（每题 10 分, 共计 60 分）

11. 解:(1) 分析洒水车受力情况,并建立 x 坐标,如图所示. 设 t 时刻洒水车的质量为 $M(t)=M_0-m_0t$，洒水车的速度为 $\upsilon(t)$，$t+\mathrm{d}t$ 时刻洒水车的质量为 $M(t+\mathrm{d}t)=M(t)-\mathrm{d}m$，其中 $\mathrm{d}m=m_0\,\mathrm{d}t$，洒水车的速度为 $\upsilon(t+\mathrm{d}t)=\upsilon+\mathrm{d}\upsilon$. 以地面为参考系，水由车侧面喷出时，水对地速度的 x 分量即为车速，由动量定理列出 x 方向



的方程

$$[F-\mu M(t)g]\mathrm{d}t=(M-\mathrm{d}m)(\upsilon+\mathrm{d}\upsilon)+\mathrm{d}m\upsilon-M\upsilon \qquad 3\text{分}$$

$$[F-\mu(M_0-m_0t)g]\mathrm{d}t=(M_0-m_0t)\mathrm{d}\upsilon$$

$$\int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon=\int_0^{t}(\frac{F}{M_0-m_0t}-\mu g)\mathrm{d}t\,,\qquad \upsilon=\frac{F}{m_0}\ln\frac{M_0}{M_0-m_0t}-\mu gt \qquad 3\text{分}$$

(2) 以地面为参考系，水由正后方喷出时，水对地速度的 x 分量为$-u+\upsilon$．根据动量定理列出 x 方向的方程：

$$[F-\mu(M_0-m_0t)g]\mathrm{d}t=(M-\mathrm{d}m)(\upsilon+\mathrm{d}\upsilon)+\mathrm{d}m(-u+\upsilon)-M\upsilon \qquad 3\text{分}$$

$$[F-\mu(M_0-m_0t)g]\mathrm{d}t=(M_0-m_0t)\mathrm{d}\upsilon-u\,\mathrm{d}m$$

$$=(M_0-m_0t)\mathrm{d}\upsilon-um_0\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon=\int_0^{t}(\frac{F+m_0u}{M_0-m_0t}-\mu g)\mathrm{d}t\,,\quad \upsilon=\frac{F+m_0u}{m_0}\ln\frac{M_0}{M_0-m_0t}-\mu gt \qquad 3\text{分}$$

12. 解：

(1) 设太阳的质量为 M_0，飞行器的质量为 m，飞行器绕太阳做圆周的轨道半径为 R，根据所设计的方案，可知飞行器是从其原来的圆轨道上某处出发，沿着半个椭圆轨道到达小行星轨道上的。该椭圆既与飞行器原来的圆轨道相切，又与小行星的圆轨道相切。要使飞行器沿此椭圆轨道运动，应点燃发动机使飞行器的速度在极短时间内，有 v_0 变为 u_0。设飞行器沿椭圆轨道到达小行星轨道时的速度为 u，因大小为 u_0 和 u 的这两个速度的方向都与椭圆的长轴垂直，由角动量守恒定律可得

$$mu_0R=6muR \qquad ①$$

有能量关系，有

$$\frac{1}{2}mu_0{}^2-G\frac{M_0m}{R}=\frac{1}{2}mu^2-G\frac{M_0m}{6R} \qquad ②$$

有万有引力定律，有

$$G\frac{M_0m}{R^2}=m\frac{v_0{}^2}{R} \quad \text{既} \quad v_0=\sqrt{\frac{GM_0}{R}} \qquad ③$$

有①②③三式得

$$u_0=\sqrt{\frac{12}{7}}v_0 \qquad ④$$

$$u=\sqrt{\frac{1}{21}}v_0 \qquad ⑤$$

设小行星绕太阳运动的速度为 v，小行星的质量为 M，有万有引力定律

$$G\frac{M_0M}{(6R)^2}=M\frac{v^2}{R} \quad \text{的} \quad v=\sqrt{\frac{GM_0}{6R}}=\sqrt{\frac{1}{6}}v_0 \qquad ⑥$$

可以看出 $v>u$ ⑦

由此可见只要选择好飞行器在圆轨道上合适的位置离开圆轨道，使得它到达小行星轨道处时，小行星的前缘也正好运动到该处，则飞行器就能被小行星撞击。可以把小行星看做静止，飞行器以相对速度 $v-u$ 射向小行星，由于小行星的质量比飞行器的质量大的多，碰撞后，飞行器以同样的速率 $v-u$ 弹回，即碰撞后飞行器相对小行星的速度大小为 $v-u$，方向与小行星的速度方向相同，故飞行器相对太阳的速度为

$$u_1=v+v-u=2v-u$$

将⑤⑥式代入

$$u_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{21}}\right)v_0$$

⑧

如果飞行器能从小行星的轨道上直接飞出太阳系，它应具有的最小速度为u_2，则有

$$\frac{1}{2}mu_2{}^2-G\frac{M_0m}{6R}=0$$ 得 $$u_2=\sqrt{\frac{GM_0}{3R}}=\sqrt{\frac{1}{3}}v_0$$ ⑨

可以看出

$$u_1=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{21}}\right)v_0=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)v_0>\sqrt{\frac{1}{3}}v_0=u_2$$ ⑩

所以飞行器被小行星撞击后具有的速度足以保证它飞出太阳系。

(2) 为使飞行器能进入椭圆轨道，发动机应使飞行器的速度由 v_0 增加到 u_0，飞行器从发动机取得的能量

$$E_1=\frac{1}{2}mu_0{}^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}m\frac{12}{7}v_0{}^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{5}{14}mv_0{}^2$$

若飞行器从其圆轨道上直接飞出太阳系，飞行器应具有最小速度为 u_3，则有

$$\frac{1}{2}mu_3{}^2-G\frac{M_0m}{R}=0$$ 由此得 $$u_3=\sqrt{\frac{2GM_0}{R}}=\sqrt{2}v_0$$

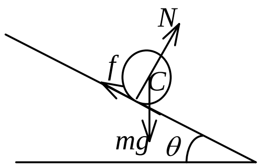
飞行器的速度由 v_0 增加到 u_3，应从发动机获得的能量为

$$E_2=\frac{1}{2}mu_3{}^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

所以

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{5}{14}mv_0{}^2}{\frac{1}{2}mv_0{}^2}=0.71$$

13. 解：球体对中心轴的转动惯量为 $J_c=(2/5)mR^2$ 1 分



质心沿斜面平动，有： $mg\sin\theta-f=ma_c$ 1 分

$N-mg\cos\theta=0$ 1 分

绕质心转动有： $fR=J_c\beta$ 2 分

只滚不滑时有条件： $a_c=R\beta$ 1 分

由以上四式可得： $$f=\frac{J_c}{J_c+mR^2}mg\sin\theta=\frac{2}{7}\sin\theta$$ 1 分

欲使物体只滚不滑，则必须是：$f\leqslant\mu N=\mu mg\cos\theta$ 2 分

所以有 $(2/7)\,mg\sin\theta\leqslant\mu mg\cos\theta$

$\mathrm{tg}\theta\leqslant3.5\mu$ ，$\theta\leqslant\mathrm{tg}^{-1}(3.5\mu)$ 1 分

14. 解：未接电源时，电容为 $$C=\frac{2\pi\varepsilon_0L}{\ln(b/a)}$$ 2 分

接电源后，由于两筒上的异号电荷间相互吸引力 F 的作用，天平将失去平衡，内筒将下移. 设其位移为 dL，则电容的增量为

$$\mathrm{d}C=\frac{2\pi\,\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\mathrm{d}L \qquad 2\text{ 分}$$

在电势差 U 不变下，电容器的能量增量为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}U^2\,\mathrm{d}C=\frac{\pi\,\varepsilon_0U^2}{\ln(b/a)}\mathrm{d}L \qquad 2\text{ 分}$$

且

$$F=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}L}=\frac{\pi\,\varepsilon_0U^2}{\ln(b/a)} \qquad 2\text{ 分}$$

为使天平保持平衡，右边秤盘中需增加质量为 m 的砝码，使 $mg=F$，因而得

$$m=\frac{\pi\,\varepsilon_0U^2}{g\ln(b/a)} \qquad 2\text{ 分}$$

15. 解：设弹簧原长为 l_0，长直导线通电后，弹簧长度变为 L，矩形线圈质量为 m，则系统势能的变化为

$$\Delta W_P=\frac{1}{2}k(L-l_0)^2-\frac{1}{2}k(L_0-l_0)^2-mg(L-L_0) \qquad 2\text{ 分}$$

∵ $$mg=k\,(L_0-l_0) \qquad 1\text{ 分}$$

∴ $$\Delta W_P=\frac{1}{2}k(L-L_0)^2 \qquad 1\text{ 分}$$

$$A=I_2\Delta\phi \qquad 1\text{ 分}$$

$$\phi_0=\int\frac{\mu_0I_1}{2\pi r}a\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0I_1a}{2\pi}\ln\left(\frac{L_0+b}{L_0}\right) \qquad 1\text{ 分}$$

$$\phi=\int\frac{\mu_0I_1}{2\pi r}a\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0I_1a}{2\pi}\ln\left(\frac{L+b}{L}\right) \qquad 2\text{ 分}$$

$$A=\frac{\mu_0I_1I_2a}{2\pi}\ln\frac{(L+b)/L}{(L_0+b)/L_0} \qquad 2\text{ 分}$$

由已知条件 $A=m_0\,I_1I_2a/(2\pi)$ 可得

$$\frac{(L+b)/L}{(L_0+b)/L_0}=e\,,\qquad L=\frac{bL_0}{(e-1)L_0+eb} \qquad 1\text{ 分}$$

$$\Delta W_P=\frac{1}{2}k\left[\frac{bL_0}{(b-1)L_0+eb}-L_0\right]^2 \qquad 1\text{ 分}$$

16.

环的转动动能因感应电流的热损耗而逐渐减少. 在环中产生感应电流的地磁场的水平分量

$B = 44.5 \times 10^{-6} \cos 60° \text{ T}$

当环面与地磁场水平分量成 $\theta = \omega t$ 角时，通过环的磁感应通量

$\Phi = B\pi a^2 \sin\omega t$

其中 a 为环半径.

瞬时感应电动势$\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B\pi a^2 \omega \cos\omega t$

旋转一周在环的电阻 R 上消耗的平均热功率

$$P = \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}$$

环的转动惯量 $I = (1/2) ma^2$，其中 m 为环的质量，转动动能

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{4} ma^2 \omega^2$$

故有能量方程$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -P$

即$\dfrac{1}{2} ma^2 \omega \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -\frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} \mathrm{d}t$$

若 T 为角速度降到一半所需时间，则有

$$\int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -\int_0^T \frac{B\pi^2 a^2}{mR} \mathrm{d}t$$

即 $\ln 2 = \dfrac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} T$

但 $R = 2\pi a\rho / A$，$m = 2\pi aAd$，其中 A 为铜丝截面积，d 为铜的密度，ρ 为铜的电阻率，代入上式得

$$T = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2},$$

代入数据得 $T = 1.10 \times 10^6 \text{ s} = 306 \text{ h} = 12 \text{ d } 18 \text{ h}$

本小题也可用动力学方法求解，这里从略.