2009年第十屆亞洲物理奧林匹亞競賽及第四十屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2009 年 2 月 14 日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

＜＜注意事項＞＞

1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。

2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。

3、可使用無程式之掌上型計算器。

2009年第十屆亞洲物理及第四十屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

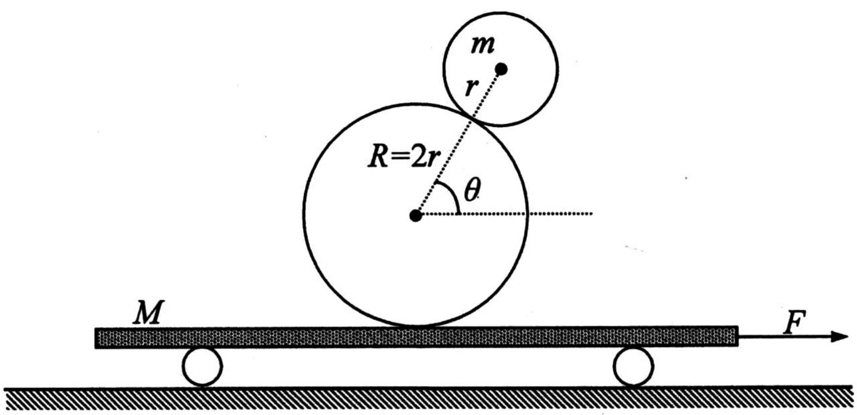
1. **小球疊大球的運動**

如下圖所示，有兩個同材質的均勻圓球，一大一小，小球的質量為$m = 1.0\text{kg}$，半徑為r，大球的半徑為$R = 2r$。現將小球疊放在大球的上方，置於一可移動平台的中央處，平台置放在水平面上，其長度$L = 2.0\text{m}$，質量$M = 6.0\text{kg}$。當該平台以某一外力F沿水平方向右拉動時，小球恰可一直停留在大球上，且兩球的球心連線和水平面之間的夾角維持為$\theta = 60^\circ$，假設小球在大球的球面上和大球在平台上的運動皆為純滾動，回答下列問題：

(a)所需外力F力的量值為何？

(b)在球掉落平台以前，兩球以上述的方式停留在平台上的時間有多長？

【註】：質量為m，半徑為r的圓球繞其球心的轉動慣量$I = \dfrac{2}{5}mr^2$。



2. **高空彈跳（Bungee Jumping）**

高空彈跳起源於南太平洋中的小島 Pentecoste Islands，島上的原住民將樹藤綁在腳踝上，自竹子搭成的高塔上向下躍落，以示成年男子的膽識，已有上千年的歷史。這項原住民的活動，在 1978 年經由英格蘭的「危險運動俱樂部」改良，並在英格蘭 Bristol 的 Clifton 吊橋上示範。將高空彈跳商業化，則始於 1988 年美國的 Kockleman 兄弟及紐西蘭的 A.J. Hackett。至今高空彈跳已逐漸推廣至全球各地。現在使用的彈性粗繩主要是以橡膠為內心，外層以棉製或尼龍製的套鞘構成。為簡化起見，以下問題中的繩子將以單一橡膠材質製成的彈性繩為理論模型。

設一橡膠繩在拉伸時，滿足下列公式：

$$\frac{F}{A}=Y\frac{\ell-\ell_0}{\ell_0}$$

式中 A 和 ℓ 為橡膠繩以張力 F 作用時，拉伸後的平衡截面積和長度；A_0 和 ℓ_0 分別為橡膠繩未拉伸前的自然截面積和長度； Y 為該材質的楊氏係數。假設當橡膠繩被拉伸時，其密度（$\rho=1.25\times10^3\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$）維持不變，即 $A\ell=A_0\ell_0$。本題中 $A_0=1.00\times10^{-3}\mathrm{m}^2$，$\ell_0=20.0\mathrm{m}$ ，$Y=1.70\times10^6\mathrm{Pa}$ 。

(a)當此繩沿水平方向置放時，求 ℓ 與 F 之間的關係式，以 Y、ℓ_0、和 A_0 表示之；若 $\Delta\ell\equiv\ell-\ell_0<<\ell_0$，則此繩的彈性力常數為何？

(b)當此繩的一端固定在一高處，另一端懸掛一質量為 $m=50.0\mathrm{kg}$ 的物體，使其自由地鉛直下垂。當該繩達成靜力平衡時，繩長 ℓ_1 為何？

【提示】；當繩子被拉長時，繩上各點的位置坐標和張力隨之改變。解題時可選取一極小長度的繩段，應用其受力和伸長量之間的關係式，解出新和舊位置坐標之間的函數關係式。

(c)承(b)小題，若使懸掛在繩子下端的物體，在其平衡位置的上下作小幅度的振盪，不考慮因阻力或摩擦力而致的能量損失，則其週期為何？

(d)質量為 50.0kg 的某人，準備高空彈跳。設人在下躍之前，橡膠繩是以原長度捲在一個滑輪上。若滑輪的質量以及繩子和轉軸之間的摩擦力均可忽略不計，且不計空氣阻力的影響，則此人從靜止開始下墜後，橡膠繩可伸長的最大長度為何？

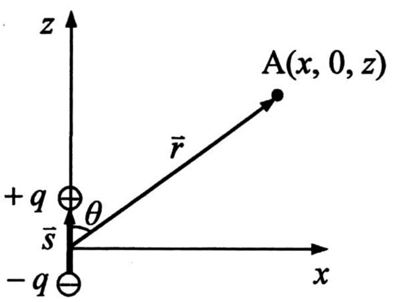
3. **電偶極之間的交互作用**

(a)如圖(1)所示，在 z 軸上置放有兩個帶有等電量的異性電荷 $+q$ 和 $-q$，兩者相距 s，形成一電偶極，其電偶極矩 $\vec{p}\equiv q\vec{s}$ 的方向自 $-q$ 指向 $+q$。今在 xz 平面上任取一點 $\mathrm{A}(x,0,z)$，其位置向量 $\vec{r}$ 和 z 軸之間的夾角為 θ，且 $r>>s$，求此電偶極在 A 點產生的電位（以 r、θ、p 表示之）。

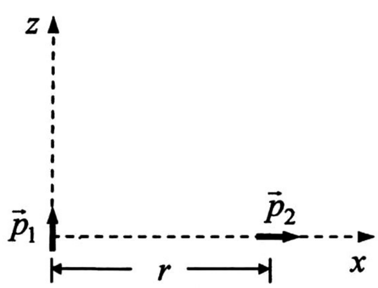
(b)承(a)題，計算此電偶極在 A 點所生的電場，分別求出該電場沿 x、y、和 z 軸方向的分量（以 r、θ、p 表示之）。

(c)如圖(2)所示，分別沿著 z 軸和 x 軸置放的兩個電偶極，彼此相距 r，其電偶極矩各為 $\vec{p}_1$ 和 $\vec{p}_2$，求 $\vec{p}_1$ 作用在 $\vec{p}_2$ 的力矩為何？又兩電偶極之間交互作用的能量為何？

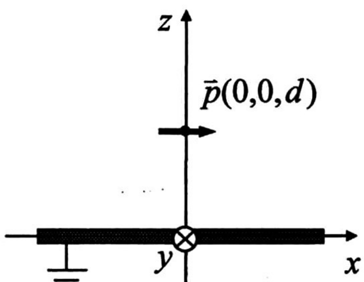
(d)如圖(3)所示，在 xy 平面上平放一片很大的金屬導體平板，該導體板接地，另有一電偶極矩為 $\vec{p}$ 的電偶極置於導體板上方 $z=d$ 處，求 $\vec{p}$ 所受的力矩為何？又該電偶極與導體板上感應電荷之間交互作用的能量為何？



圖(1)



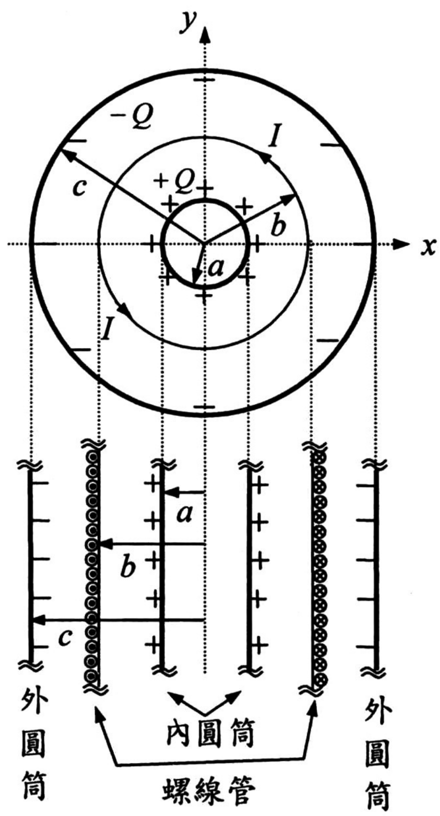
圖(2)



圖(3)

4. **帶電圓筒在時變磁場中的轉動**

如右圖所示，有一半徑為 b，載有電流 I 的無限長螺線管，管上每單位長度的線圈匝數為 n，置於內和外兩個表面均勻帶電的長圓筒之間。螺線管和兩圓筒的中心軸皆共軸。內圓筒的半徑為 a，帶有電量 $+Q$；外圓筒的半徑為 c，帶有電量 $-Q$。兩圓筒的長度相等，皆為 h，且 $h>>c$。螺線管固定，不能轉動，但兩圓筒可以繞其中心軸自由旋轉。由於兩圓筒的長度皆很長，遠大於其截面半徑，因此端口處的磁場或電場的邊緣效應，在本題中皆可忽略不計。



在下列(a)~(d)小題中，螺線管上的電流 I 維持不變，r 代表距中心軸的徑向距離：

(a)試求在螺線管內側區（$r<b$）和外側區（$r>b$）的磁場強度 $\vec{B}$。

(b)試求儲存於螺線管內側區的磁場能量密度 u_B。

(c)試求在兩圓筒之間的區域（$a<r<c$）、內圓筒內側區（$r<a$）、和外圓筒外側區（$r>c$）的電場強度 $\vec{E}$。

(d)試求儲存於兩圓筒之間的電場能量密度 u_E。

在下列(e)~(f)小題中，螺線管上的電流 I 均勻單調地逐漸降至零，在此過程中，電磁感應的作用會使得兩圓筒繞其中心軸轉動。解題時，旋轉的帶電圓筒所產生的磁場可忽略不計：

(e)當螺旋管上的電流 I 降至零時，求兩圓筒系統（內圓筒+外圓筒）所得繞其中心軸的角動量。

(f) 電磁場除了能儲存電能和磁能外，也能儲存線動量和角動量。儲存於電磁場的線動量密度 $\vec{p}=\dfrac{1}{c^2}\vec{S}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$，式中 $\vec{S}$ 為坡印廷向量，c 為真空中的光速、ε_0 為真空的電容率。試計算當螺旋管上的電流從 I 降至零時，相對於圓筒的中心軸，電磁場角動量的變化量為何？

5. **玉山頂峰上的大氣壓力和水的沸點**

已知在海平面上的大氣溫度 $T_0=288\text{K}$，大氣壓力 $P_0=1.01\times10^5\text{Pa}$，玉山頂峰的海拔高度為 3952m，波茲曼常數 $k=1.38\times10^{-23}\text{JK}^{-1}$，一莫耳空氣分子的平均質量為 $28.8\times10^{-3}\text{kg}$，回答下列各題；

(a)若不考慮大氣的溫度隨海拔高度 z 的升高而引起的變化，即假設大氣的溫度 T 不變，試證大氣壓力和海拔高度之間的函數關係式為

$$P = P_0 e^{-mgz/kT}$$

式中 m 為一個空氣分子的平均質量，g 為重力加速度。利用上式，計算在玉山頂峰上的大氣壓力。

(b)實際上，大氣溫度隨海拔高度的升高而降低，其近似的關係式為

$$T = T_0 - \alpha z$$

式中 $\alpha = 6.50\mathrm{K/km}$。若計入此因素，試證大氣壓力和海拔高度之間的函數關係式將變為

$$P = P_0 (1 - bz)^{\lambda}$$

求出式中的常數 b 和 λ 各為何（以 m、g、k、T_0，和 α 表示之）？利用上式，計算在玉山頂上的大氣壓力。

(c)同一物質的兩種相態共存而處於熱平衡狀態時，其壓力 P 和其絕對溫度 T 之間的變化關係式為

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)}$$

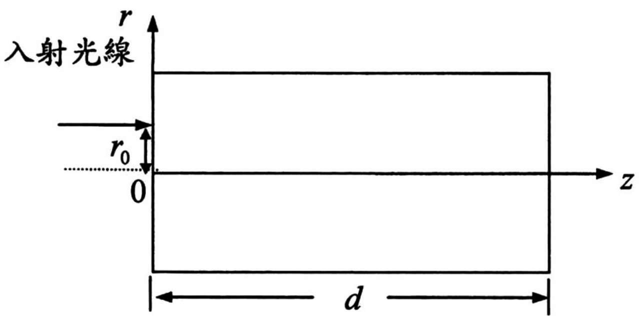
式中 L 為該物質自相態 1 到相態 2 的單位質量的相變潛熱，v_1和v_2 分別為兩相態的單位質量體積。這個關係式稱為克勞西斯-克拉比杭方程式(Clausius-Clapeyron's Equation)。已知在 100℃ 時水的汽化熱為 $2.26\times10^6\mathrm{J/kg}$，水的密度為 $0.960\times10^3\mathrm{kg/m^3}$，水蒸汽的密度為 $0.598\mathrm{kg/m^3}$，利用(b)題的結果，導出水的沸點和海拔高度之間的函數關係式，並求出在玉山頂峰上的水的沸點為何？

6. 玻璃圓柱體的焦距

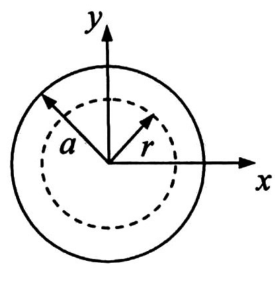
如下圖所示的一小段玻璃圓柱體（半徑為 a，長度為 d），取其中心軸為 z 軸，與中心軸垂直的截面取為 xy 平面。設該圓柱體的折射率 n 為距 z 軸徑向距離 r 的函數：

$$n = n_0\sqrt{1-\alpha^2 r^2} \qquad 0 \le r \le a$$

式中$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，α 為一常數（$1/\alpha > a$）。有一束入射光線在左端面（$z = 0$）上距中心軸r_0處，從空氣射入圓柱體內。若入射光線為平行於圓柱體中心軸的近軸光線，即$r_0 \ll a$，回答下列問題：



縱剖面圖



橫截面圖

(a)證明該束光線在圓柱體內部傳播的軌跡為一正弦函數曲線。

【提示】：利用司乃耳折射公式，從 r-z 參考面上的光軌跡的切線斜率著手。

(b)假設該圓柱體的長度 $d < \pi / 2\alpha$，利用(a)題的結果，證明該束光線從圓柱體的右端面射出後，將會聚焦在一點，並求出此焦點和右端面之間的距離。

(c)在(b)題中所假設的圓柱體長度甚短，其他的長度也可使光線聚焦。若欲使該圓柱體具有會聚光線的功能，則其長度 d 需滿足的條件為何？

【附註】：解答本試卷試題時，你可能需要用到下列的積分式：

(1) $\int \frac{dx}{x} = \ln x +$ 常數

(2) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} +$ 常數