2009 年浙江省温州市摇篮杯高一数学竞赛试题

2009 年 4 月 12 日

本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分。

1．已知 ΔABC 是钝角三角形，且角 C 为钝角，则点 $P(\sin A+\sin B-\sin C,\sin A-\cos B)$ 落在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合 $M=\{3,\log_{2x}4\},N=\{x,y\}$，且 $M\cap N=\{2\}$，函数 $f:M\to N$ 满足：对任意的 $x\in M$,都有 $x+f(x)$ 为奇数，满足条件的函数的个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $13a_6=19a_9$，且 $a_1>0$, s_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则在 s_1，s_2，s_3，…，s_{50} 中，最大的一个是（　）

A．s_{15}　　B．s_{16}　　C．s_{25}　　D．s_{30}

4．已知函数 $f(x+2)$ 为奇函数，且满足 $f(6-x)=f(x)$，$f(3)=2$，则 $f(2008)+f(2009)$ 的值为（　）

A．0　　B．2　　C．-2　　D．2009

5．已知函数 $f(x)=\sin^4 x+\cos^2 x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\cos 2x\,(x\in R)$，则 $f(x)$（　）

A．最大值为 2　　B．最小正周期为 π

C．一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}$　　D．一个对称中心为 $(-\dfrac{\pi}{16},\dfrac{7}{8})$

6．已知函数 $f(x)=\left|2^{|x-1|}-2\right|$, 关于 x 的方程 $f^2(x)-2f(x)+k=0$，下列四个命题中是假命题的是（　）

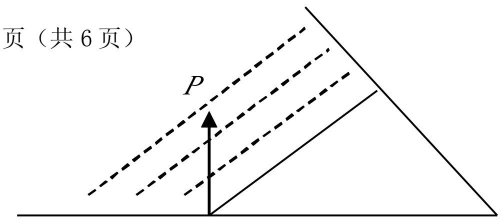
A．存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；

B．存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根；

C．存在实数 k，使得方程恰有 6 个不同的实根；

D．存在实数 k，使得方程恰有 8 个不同的实根；

7．如图，在 ΔOAB 中，点 P 是线段 OB 及 AB、AO 的延长线所围成的阴影区域内（含边界）的任意一点，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则在直角坐标



平面上，实数对 (x,y) 所表示的区域在直线 $y-x=3$ 的右下侧部分的面积是（ ）

A．$\dfrac{7}{2}$　　　　B．$\dfrac{9}{2}$

C．4　　　　D．不能求

8．已知函数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$（a,b,c,d为实常数）的图象经过三点 $A\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，$B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，$C\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$，则 $f(1)+f(5)$ 的值等于　　　　（ ）

A．0　　　　B．1　　　　C．$\dfrac{26}{5}$　　　　D．25

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分。

9．已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\beta=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，若 $\tan(\alpha+\beta)=3$，则 $\tan\alpha=$____。.

10．若 $(x+y)^5-x^5+y=0$ ，则 $y=$_______。

11．函数 $f(n)=|n-1|+|n-2|+|n-3|+\cdots+|n-100|+50n\,(n\in N_+)$ 的最小值等于________。

12．设函数 $f(x)=\dfrac{3^x}{1+3^x}$，若 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，则函数 $\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]+\left[f(-x)+\dfrac{1}{2}\right]$ 的值域是_________。

13．已知二次函数 $f(x)=x^2-2mx+1$，若对于 $[0,1]$ 上的任意三个实数 a,b,c，函数值 $f(a),f(b),f(c)$ 都能构成一个三角形的三边长，则满足条件的 m 的值可以是_________。（写出一个即可）

14．如图是一个数表，第一行依次写着从小到大的正整数，然后把每行的相邻两个数的和写在这两数的正中间的下方得到下一行，数表从左到右、从上到下无限。则 2000 在表中出现_________次。

2009年浙江省温州市摇篮杯高一数学竞赛答题卷

2009年4月12日

本卷满分为150分，考试时间为120分钟

题号	一	二	三			总分
			15	16	17	
得分						

一、选择题：本大题共8小题，每小题6分，共48分。

得分	评卷人

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

得分	评卷人

二、填空题：本大题共6小题，每小题8分，共48分。

9．____________________

10．____________________

11．____________________

12．____________________

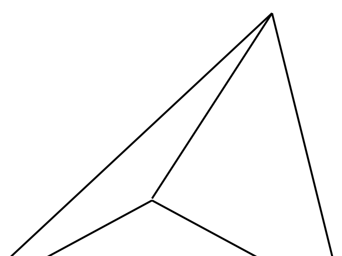
13．____________________

14．____________________

三、解答题：本大题共3小题，共54分。

得分	评卷人

15．（本题满分16分）如图，已知 O 为 ΔABC 的外心，a,b,c 分别是角 A、



B、C的对边，且满足$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$。

（1）推导出三边a,b,c之间的关系式；

（2）求$\dfrac{\tan A}{\tan B}+\dfrac{\tan A}{\tan C}$的值。

16．（本题满分 19 分）已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}$，对于$n\in N_{+}$，定义

得分	评卷人

$f_1(x)=f(x), f_{n+1}(x)=f\left[f_n(x)\right]$，偶函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，

当 $x>0$ 时，$g(x)=\left|f_{2009}(x)\right|$。

（1）求 $g(x)$；

（2）若存在实数 $a,b(a<b)$ 使得该函数在 $[a,b]$ 上的最大值为 ma，最小值为 mb，求非零实数 m 的取值范围。

17．（本题满分 19 分）数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2(n\in N^*)$

得分	评卷人

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：数列$\{a_n\}$中的任两项互质。

（3）记$b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n-2}$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求$S_{2009}$的整数部分；

2009年浙江省温州市摇篮杯高一数学竞赛试题答案

一、选择题：本大题共8小题，每小题6分，共48分。

1．D　解：由正弦定理 $\sin A+\sin B-\sin C=\frac{1}{2R}(a+b-c)>0$，角 C 为钝角得 $A+B<\frac{\pi}{2}, A<\frac{\pi}{2}-B$，所以 $\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，所以 $\sin A-\cos B<0$，选D

2．B　解：由已知得 $x=1, y=2$，$M=\{3,2\}, N=\{1,2\}$，对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)$ 为奇数，所以满足条件的函数只有一个即 $f(3)=2, f(2)=1$。

3．A　解：由 $13a_6=19a_9$ 得，$13a_6=19(a_6+3d)$，所以 $2a_6+19d=0$，$a_6+a_{25}=a_{15}+a_{16}=0$，又因为 $a_1>0$，所以 $d<0, a_{15}>0, a_{16}<0$，故选 A

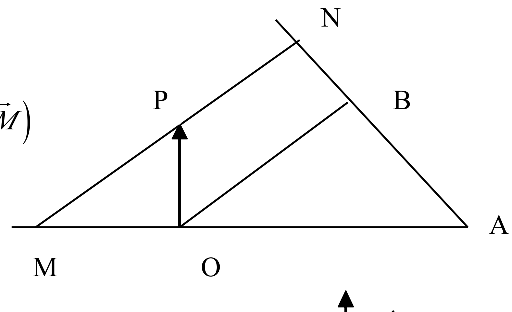
4．C　解：由已知得 $f(-x+2)=-f(x+2)$，所以 $f(x)=-f(4-x)$，又 $f(6-x)=f(x)$，推出 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(2008)+f(2009)=f(0)+f(1)$，$f(1)=-f(4-1)=-2$，又由上面关系式推得 $f(0)=f(4)=f(2)=0$，选C

5．D　解：因为 $f(x)=\sin^4 x+1-\sin^2 x+\frac{1}{8}\sin 4x=1-\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{8}\sin 4x$

$=1-\frac{1}{4}\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin 4x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7}{8}$，选D

6．D　解：设 $t=f(x), t^2-2t+k=0$，因为对称轴为 $x=1$，所以当 $t_1=3, t_2=-1$ 时，A答案正确；当 $t_1=0, t_2=2$，B答案正确；当 $t_1=\frac{1}{2}, t_2=\frac{3}{2}$ 时，C答案正确；选D。

7．A



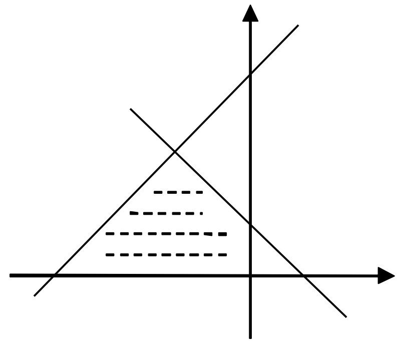
解：如图过 P 作 $MN\,//\,OB$，则

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{AO}+n\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AO}+n\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)$

$=m\overrightarrow{AO}+n(1+m)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}\right)$

$=-m\overrightarrow{OA}+n(1+m)\overrightarrow{OB}\,(m\ge 0, 0\le n\le 1)$

所以 $\begin{cases}x=-m\\ y=n(1+m)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 0\le n=\dfrac{y}{1-x}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 0\\ y\ge 0\\ x+y\le 1\end{cases}$



如图,选A

8．D

解：由已知，设

$g(x)=\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)x=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-1$

$=(x-2)(x-3)(x-4)\left(x^2+mx+\frac{1}{24}\right)$

所以 $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)\left(x^2+mx+\frac{1}{24}\right)}{x}+\frac{1}{x}$， $f(1)=-6\left(\frac{25}{24}+\mathrm{m}\right)+1=-\frac{21}{4}-6\mathrm{m}$，

$f(5)=\frac{6\left(25\frac{1}{24}+5m\right)}{5}+\frac{1}{5}=\frac{121}{4}+6m$，所以 $f(1)+f(5)=25$，选 D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分。

9．1。解：由知得 $\sin(\alpha+\beta-\alpha)=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=1$$

10．0。解：原方程可化为 $(x+y)^5+(x+y)=x^5+x \Rightarrow x+y=x \Rightarrow y=0$

11．4400。解：因为 $f(n+1)-f(n)=|n|-|n-100|+50=\begin{cases}150, n>100\\ 2n-50, 1\le n\le 100\end{cases}$

所以$f(1)>f(2)>\cdots>f(25)=f(26)<f(27)<\cdots$

所以$f(n)$的最小值为$f(25)=f(26)=4400$

12．{0，1}。解：由已知得 $0<f(x)<1, f(x)+f(-x)=1,$所以当$f(x)=f(-x)=\frac{1}{2}$时,值为1;

当$0<f(x)<\frac{1}{2}$时,值为0;当$\frac{1}{2}<f(x)<1$时,值为0;所以值域为$\{0,1\}$

13． $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内的任一实数。解：由题意当 $x\in[0,1]$时， $\begin{cases}f(x)\min>0\\ 2f(x)\min>f(x)\max\end{cases}$；

当 $m\le 0$ 时， $\begin{cases}f(x)\min=f(0)=1>0\\ 2f(x)\min=2>f(x)\max=f(1)=2-2m\Rightarrow m>0,\end{cases}$ 不存在；

当 $m\ge 1$时， $\begin{cases}f(x)\min=f(1)=2-2m>0\\ 2f(x)\min=4-4m>f(x)\max=f(0)=1\end{cases}\Rightarrow m<\frac{3}{4}$，不存在；

当 $0<m\le\frac{1}{2}$时， $\begin{cases}f(x)\min=f(m)=1-m^2>0\\ 2f(x)\min=2-2m^2>f(x)\max=f(1)=2-2m\end{cases}\Rightarrow 0<m<1$，

所以这时 $0<m\le\frac{1}{2}$；

当 $\frac{1}{2}<m<1$ 时， $\begin{cases}f(x)\min=f(m)=1-m^2>0\\ 2f(x)\min=2-2m^2>f(x)\max=f(0)=1\end{cases}\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以这时 $\frac{1}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$；综上所述 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

14．4。解：由数表推得，每一行都是等差数列，第 n 行的公差为 2^{n-1}，

记第 n 行的第 m 个数为 $f(n,m)$,则 $f(n,1)=f(n-1,1)+f(n-1,2)$

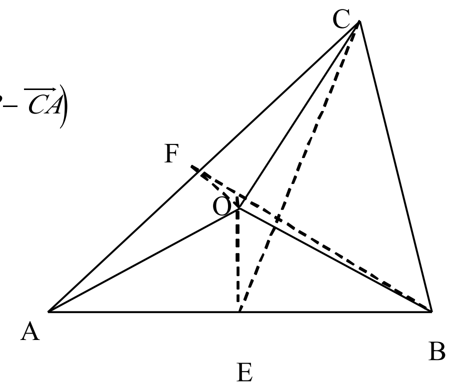
$=2f(n-1,1)+2^{n-2}\Rightarrow\dfrac{f(n,1)}{2^n}=\dfrac{f(n-1,1)}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{4}$

算得 $f(n,1)=(n+1)\cdot 2^{n-2}\Rightarrow f(n,m)=f(n,1)+(m-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-2}(2m+n-1)(n\in N_+)$

$2^{n-2}(2m+n-1)=2000=2^4\times 5^3$,当$n=1,3,5,6$时符合。答案为 4。

三、解答题：本大题共 3 小题，共 54 分。

15．解:（1）取 AB、AC 的中点 E、F，则



$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EO})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)$…………………4分

同理 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{2}\left(c^2-a^2\right)$；

所以 $2a^2=b^2+c^2$……………………………8 分

（2）

$\dfrac{\tan A}{\tan B}+\dfrac{\tan A}{\tan C}=\left(\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}\right)\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin(B+C)\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A}$……………12分

$=\dfrac{a^2}{bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=2$………………16分

16．解:（1）因为

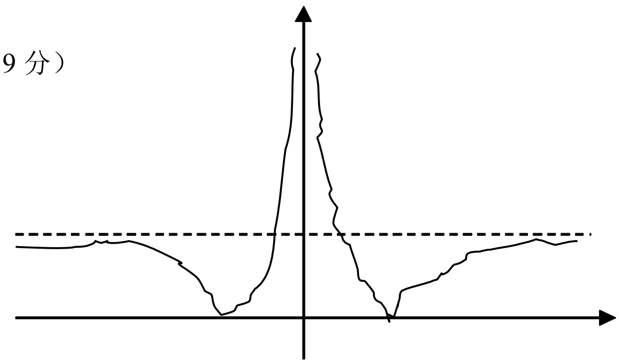
$f_1(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-x},f_2(x)=f(f_1(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x},f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

$f_4(x)=f[f_3(x)]=\dfrac{1}{1-x}$,所以迭代函数以3为周期, $f_{2009}(x)=f_2(x)=\dfrac{x-1}{x}$……（5 分）

设 $x<0$,则$-x>0,g(x)=g(-x)=\left|\dfrac{-x-1}{-x}\right|=\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$,

所以 $g(x)=\begin{cases}\left|1+\dfrac{1}{x}\right|,x<0\\ \left|1-\dfrac{1}{x}\right|,x>0\end{cases}$ ………………（9 分）

图象如右：



（2）因为 $a<b,ma>mb>0\Rightarrow m<0,a<b<0$；…………………………（12 分）

又因为 $\mathrm{mb}\neq 0$，所以 $-1\notin[a,b]$（否则 $m=0,mb=ma=0$，矛盾）

当 $a<b<-1$,则$f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,-1]$上是减函数�由题意$\begin{cases}1+\dfrac{1}{a}=ma\\1+\dfrac{1}{b}=mb\end{cases}$

所以 a,b是方程$1+\dfrac{1}{x}=mx$的两不同实根,$\Rightarrow x^2-\dfrac{1}{m}x-\dfrac{1}{m}=0$在$\left(-\infty,-1\right)$有两个不同实根，

$$\begin{cases}\Delta=\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{4}{m}>0\\g\left(-1\right)=1+\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m}>0\Rightarrow-\dfrac{1}{4}<m<0\cdots\cdots\cdots\cdots\left(15\text{分}\right)\\\dfrac{1}{2m}<-1\end{cases}$$

当$-1<a<b<0$时,则$f\left(x\right)=-1-\dfrac{1}{x}$在$(-1,0)$上是增函数,由题意$\begin{cases}-1-\dfrac{1}{a}=mb\\-1-\dfrac{1}{b}=ma\end{cases}$

$\Rightarrow a=b$不合.

综上所述 $-\dfrac{1}{4}<m<0$ 。---------------------------19 分。

17.（1）解：因为 $a_n-1=\left(a_{n-1}-1\right)^2=\left(a_{n-2}-1\right)^{2^2}=\cdots=\left(a_2-1\right)^{2^{n-2}}=\left(a_1-1\right)^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}}$

当 $n=1,a_1-1=2^{2^{1-1}}$ 也成立，所以 $a_n=2^{2^{n-1}}+1$；---5 分；

（2）因为 $a_n-2=a_{n-1}\left(a_{n-1}-2\right)=a_{n-1}a_{n-2}\left(a_{n-2}-2\right)=\cdots=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1$

所以 $a_n=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1+2$，--9 分；

因为 a_n 为奇数，所以对任意的 $n>1,a_n$与前面项$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 均互质。-------------------12 分。

（3）解：因为 $a_{n+1}-2=a_n\left(a_n-2\right)$，所以 $\dfrac{2}{a_{n+1}-2}=\dfrac{1}{a_n-2}-\dfrac{1}{a_n}$，又因为 $b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n-2}$，

所以 $b_n=\dfrac{2}{a_n-2}-\dfrac{2}{a_{n+1}-2}$，--16 分；

所以 $S_{2009}=\dfrac{2}{a_1-2}-\dfrac{2}{a_{2010}-2}=2-\dfrac{2}{2^{2^{2010}}-1}$，所以 S_{2009} 的整数部分为 1。-----------19 分。