2015年北京市中学生数学竞赛高一年级初赛试题及参考解答

一、选择题(满分36分)

1.设集合 $A=\{a^2+2015 \mid a\in \mathbf{N}\}$, $B=\{b^2+15 \mid b\in \mathbf{N}\}$,则 $A\cap B$ 中的元素个数为(　　).

(A)6　　(B)7　　(C)8　　(D)9

答:(A).

解　由 $a^2+2015=b^2+15$,得

$b^2-a^2=(b+a)(b-a)=2000=2^4\times 5^3$.

因为 $2000=1\times 2000=2\times 1000=4\times 500$
$=5\times 400=8\times 250=10\times 200$
$=16\times 125=20\times 100=25\times 80$
$=40\times 50$.

又 $b>a$ 且 $b+a$ 与 $b-a$ 同奇偶,

所以只有 $2\times 1000=4\times 500=8\times 250=10\times 200=20\times 100=40\times 50$ 六组有正整数解.

2.若二次函数 $y=f(x)$ 的图像经过原点,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(x)+x+2$ 恒成立,则 $f(x)$ 的解析式为(　　).

(A)$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

(B)$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$

(C)$f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$

(D)$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

答:(D).

解　依题意可设 $f(x)=ax^2+bx$,其中 a、b 为常数.

因为 $f(x+2)=f(x)+x+2$,

所以 $a(x+2)^2+b(x+2)=ax^2+bx+x+2$,

化简得 $4ax+4a+2b=x+2$.

对比系数可得 $\begin{cases}4a=1,\\4a+2b=2,\end{cases}$

于是 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$.

3.如图1,在 4×5 的正方形网格中,点 A、B、C、D 都是格点,AB 与 CD 相交于点 P,则 $\cos\angle BPD$ 的值等于(　　).

(A)$\frac{\sqrt{13}}{13}$　　(B)$\frac{\sqrt{15}}{15}$

(C)$\frac{\sqrt{17}}{17}$　　(D)$\frac{\sqrt{19}}{19}$

答:(C).

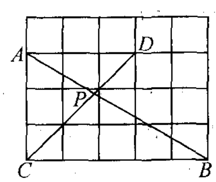

图1

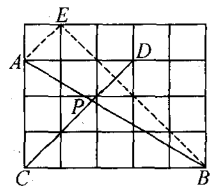

图2

解　如图2,取格点 E,连接 EA、EB,

则 $\angle EAD=\angle CDA=45^\circ$,

所以 $AE/\!/CD$.

所以 $\angle BPD=\angle BAE$.

易见 $\angle AEB=90^\circ$, $AE=\sqrt{2}$, $AB=\sqrt{34}$.

因此 $\cos\angle BPD=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3, x\leqslant 0,\\-x^2-2x-1, x>0,\end{cases}$ 不等式 $f(2x+a)>f(2a-x)$ 在 $[a-1,a+1]$ 上恒成立,则实数 a 的取值范围是(　　).

(A)$(-\infty,-\frac{3}{2})$　　(B)$(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$

(C)$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　(D)$(\frac{1}{2},+\infty)$

答:(A).

解　由题意可知,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,要想使"不等式 $f(2x+a)>f(2a-x)$ 在 $[a-1,a+1]$ 上恒成立",只需 $x\in[a-1,a+1]$ 时,$2x+a<2a-x$ 总成立,即 $x<\frac{a}{3}$,于是,只需 $a+1<\frac{a}{3}$,所以 $a<-\frac{3}{2}$.

5.二次三项式 $f(x)=x^2+ax+b$ 具有两个实根 t_1 和 t_2,甲将 $f(x)$ 的一次项系数变为 $a+t_1$,将常数项变为 $b-t_1^2$,构成二次三项式 $f_1(x)$;乙将 $f(x)$ 的一次项系数变为 $a-t_2$,将常数项变为 $2b$,构成二次三项式 $f_2(x)$.则(　　).

(A)$f_1(x)$ 具有实根,$f_2(x)$ 没有实根

(B)$f_1(x)$ 没有实根,$f_2(x)$ 具有实根

(C)$f_1(x)$ 具有实根,$f_2(x)$ 具有实根

(D)$f_1(x)$ 没有实根,$f_2(x)$ 没有实根

答:(C).

解　根据韦达定理,由 t_1、t_2 是二次三项式 $f(x)=x^2+ax+b$ 的两个实根,有 $a=-t_1-t_2$,$b=t_1t_2$,则 $f_1(x)=x^2-t_2x+(t_1t_2-t_1^2)$,方程 $f_1(x)=0$ 的判别式为 $\Delta=t_2^2-4t_1t_2+4t_1^2=(2t_1-t_2)^2\geqslant0$,这意味 $f_1(x)$ 具有实根.

而 $f_2(x)=x^2-(t_1+2t_2)x+2t_1t_2$,方程 $f_2(x)=0$ 的判别式为 $\Delta=t_1^2-4t_1t_2+4t_2^2=(t_1-2t_2)^2\geqslant0$,这意味着 $f_2(x)$ 具有实根.

6.已知函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$,又 $f_1(x)=f(x)$,$f_2(x)=f(f(x))$,$f_3(x)=f(f(f(x)))$,则 $f_1(2015)\cdot f_2(2015)\cdot f_3(2015)$ 的整数部分是(　　).

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

答:(B).

解　由 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$,得 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x+1}{x}$,

所以　$f_1(2015)=\dfrac{2016}{2015}$,

$$f_2(2015)=f(f_1(2015))=f\left(\frac{2016}{2015}\right)=\frac{4031}{2016},$$

$$f_3(2015)=f(f_2(2015))=f\left(\frac{4031}{2016}\right)=\frac{6047}{4031}.$$

所以　$f_1(2015)\cdot f_2(2015)\cdot f_3(2015)$

$$=\frac{2016}{2015}\times\frac{4031}{2016}\times\frac{6047}{4031}=\frac{6047}{2015}=3\frac{2}{2015}.$$

因此 $f_1(2015)\cdot f_2(2015)\cdot f_3(2015)$ 的整数部分是 3.

二、填空题(满分 64 分)

1.在直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=\angle ADC=90°$,$AB=3$,$AD=4$,$DC=5$,如图 3,求内接长方形 $PMND$ 的最大面积________.

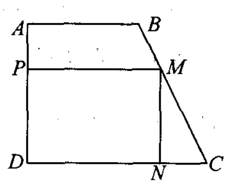

图 3

答:12.

解　设 $PM=x$,$MN=y$,则 $\dfrac{y}{5-x}=\dfrac{4}{5-3}$,

即　$y=2(5-x)$.

长方形 $PMND$ 的面积 $S(x)=2x(5-x)$,

所以　$S(x)=-2(x-2.5)^2+12.5$,

而 $x\in[3,5)$,所以当 $x=3$ 时,$S(x)$ 有最大值,$\max\{S(x)\}=S(3)=12$.

2.记 $2015!=1\times2\times3\times\cdots\times2015$,求 $\dfrac{1}{\log_2 2015!}+\dfrac{1}{\log_3 2015!}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{2015}2015!}$ 的值________.

答案:1.

解　$\dfrac{1}{\log_2 2015!}+\dfrac{1}{\log_3 2015!}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{2015}2015!}$

$=\log_{2015!}2+\log_{2015!}3+\cdots+\log_{2015!}2015$

$=\log_{2015!}2015!=1$.

3.如图 4,在 $\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$AC=b$,在 $\angle C$ 的平分线 CE 的反向延长线上取点 D,使得 $\angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle ACB$,求线段 CD 的长.

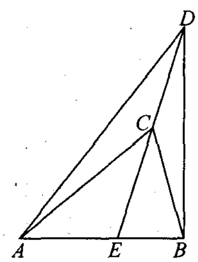

图 4

答:$\sqrt{ab}$.

解　记 $\angle ACE=\angle BCE=\angle ADB=\theta$,

则　$\angle CAD+\angle ADC=\theta=\angle ADC+\angle BDC$,

由此得　$\angle CAD=\angle BDC$.

考虑到　$\angle ACD=180°-\theta=\angle BCD$,

所以　$\triangle ACD\backsim\triangle DCB$.

因此　$AC:CD=CD:BC$.

所以　$CD=\sqrt{BC\cdot AC}=\sqrt{ab}$.

4.正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2=9$,$y^2+z^2=16$,$y^2=xz$,确定 $xy+yz$ 的值.

答:12.

解　由第一个方程可以得出,数 $x,y,3$ 是直角为 D 的直角三角形 ABD 的直角边和斜边,由第二个方程得出,数 y,z 和 4 是直角为 D 的直角三角形 BCD 的直角边和斜边,由第三个方程得出,数 y 是数 x 和 z 的比例中项.

根据在直角三角形中比例线段的逆定理,得 $\angle ABC$ 是直角.

上述关系可以构成图 5,则

$xy+yz=(x+z)y=2S_{\triangle ABC}=3\times4=12.$

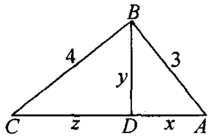

图 5

5.写出数 2^{2015} 的数字和 S_1,再写出数 S_1 的数字和 S_2,依次这样写下去,直写到 S_{k-1} 的数字和 S_k 是一位数 a 为止,确定 a 的值.

答:5.

解 注意到对自然数 n 和它的数字和 $S(n)$ 满足 $n\equiv S(n)\pmod 9$.

方法 1 $2^{2015}=(2^6)^{335}\cdot2^5\equiv1\cdot2^5\equiv32\equiv5\pmod 9$,所以 $a=5$.

方法 2 由于 $8\equiv-1\pmod 9$,

因此 $2^{2015}=8^{671}\cdot2^2\equiv(-1)^{671}\cdot4\equiv-4\equiv5\pmod 9$,

所以 $a=5$.

6.由正五边形 $ABCDE$ 的对角线相交构成新的正五边形 $A'B'C'D'E'$(如图 6).正五边形 $ABCDE$ 的面积为 4 平方厘米,试确定正五边形 $A'B'C'D'E'$ 的面积是多少平方厘米.

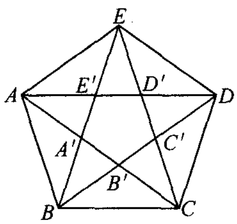

图 6

答:$14-6\sqrt5$.

解 设五边形 $ABCDE$ 的边长为 a,五边形 $A'B'C'D'E'$ 的边长为 x,易得 $A'B=a-x$,且 $\triangle BB'A'\backsim\triangle BCA'$,得 $(a-x)^2=ax$,

即 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-3\cdot\dfrac{x}{a}+1=0\left(\dfrac{x}{a}<1\right)$,

解得 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$,

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}}=\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt5}{2},$$

因为 $S_{ABCDE}=4$,

所以 $S_{A'B'C'D'E'}=14-6\sqrt5$.

7.一串数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足:$a_1=10,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},n\in\mathbf{N}$,试确定与 a_{2015} 最接近的整数.

答:64.

解 $a_{2015}^2=\left(a_{2014}+\dfrac{1}{a_{2014}}\right)^2=a_{2014}^2+2+\dfrac{1}{a_{2014}^2}$

$=a_{2013}^2+2\cdot2+\dfrac{1}{a_{2013}^2}+\dfrac{1}{a_{2014}^2}$

$=a_1^2+2014\cdot2+\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2013}^2}+\dfrac{1}{a_{2014}^2}$,

一方面,$a_{2015}^2>a_1^2+2\times2014=4128>4096=64^2$,

另一方面,$a_{2015}^2<a_1^2+2\times2014+\dfrac{2014}{10^2}<4128+21=4149<64.5^2$.

所以 $64<a_{2015}<64.5$.

所以与 a_{2015} 最接近的整数 64.

8.如图 7,已知动点 P 在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 内部(包括边界),且满足 $PA:PB=2:1$.试确定点 P 的轨迹与正方形的边所围成的较小一块图形的面积.

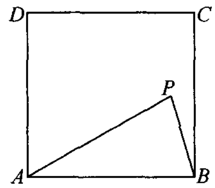

图 7

答:$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt3}{2}$.

解 若 P 在边 AB 上的 E 点,则 $AE=2,EB=1$,

由条件,对于 $\triangle APB$,总有 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AE}{BE}$,

即 PE 是 $\angle APB$ 的平分线.

又因为 $\angle APB$ 的内、外角平分线的夹角为 $90°$,画出 $\angle APB$ 的外角平分线交直线 AB 于点 F,则 $\angle EPF=90°$,且有 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AF}{BF}$,得 $AF=2BF$,即 F 是定点.

于是点 P 在以 EF 为直径的圆上,所以,点 P 的轨迹为 EF 的中点 O 的圆心、半径为 2 的圆在正方形内的弧段,与正方形围成的较小一块图形的面积就是图 8 中阴影部分的面积.

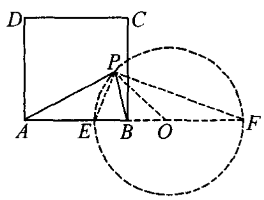

图 8

综上,$AE=2,EB=1,AF=6,BF=3,EF=4,EO=OF=2,\angle EPF=90°$.

当点 P 运动到 G 时,由于 $GA=2GB$,所以 $\angle GAB=30°$,因此,$\angle GOE=60°$.

扇形 OEG 的面积是半径 $OE=2$ 的圆面积的 $\dfrac16$.

因此所求图形面积 = 扇形 OEG 的面积 − $\triangle OBG$ 的面积 $=\dfrac16\cdot\pi\cdot2^2-\dfrac12\cdot1\cdot\sqrt3=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt3}{2}$.

(北京数学会普及委员会提供)