# 2014 年北京市中学生数学竞赛 高一年级初赛试题及解答

一、选择题(满分 36 分,每小题 6 分)

1. 设 $P$ 是质数的集合,$H$ 是合数的集合,定义 $I(n)=\begin{cases}1(n\in P),\\0(n\in H),\end{cases}$ 下面三个命题:

(1)对任意 $x$、$y\in P$,都有 $I(x+y)=0$,

(2)对任意 $x$、$y\in H$,都有 $I(x+y)=0$,

(3)对 $x\in P$,$y\in H$,都有 $I(x+y)=0$

中,真命题的个数是(　　).

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

答:(A).

**解**　对于命题(1),若 $x=2$,$y=5$,得 $x+y=7$,则 $I(x+y)=I(7)=1\neq0$,故(1)不真;

对于命题(2),若 $x=4$,$y=9$,得 $x+y=13$,则 $I(x+y)=I(13)=1\neq0$,故(2)不真;

对于命题(3),若 $x=3$,$y=8$,得 $x+y=11$,则 $I(x+y)=I(11)=1\neq0$,故(3)不真;

所以真命题的个数为 0.

2. 在平面直角坐标系 $x-O-y$ 中,函数 $y=\frac{1}{2x}$ 的图像上的动点 $P$ 与坐标原点 $O$ 的距离的最小值是(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C)1　(D)$\sqrt{2}$

答:(C).

**解**　根据对称性,只需考虑 $x>0$ 的情况即可,设动点为 $P(x,y)$,则 $xy=\frac{1}{2}$,又 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+1$,所以当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$x^2+y^2$ 取得最小值 1,此时 $OP=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值是 1.

3. 在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$D$ 是 $AC$ 上一点,且 $AD=BD=BC$,则 $\cos\angle BAC$ 的值等于(　　).

(A)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　(D)$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

答:(C).

**解**　设 $AB=AC=1$,$AD=BD=BC=a$,则 $CD=1-a$,易知$\triangle ABC\backsim\triangle BCD$,则 $AB:BC=BC:CD$,即 $1:a=a:(1-a)$,所以 $a^2=1-a$,解得 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(负根舍).

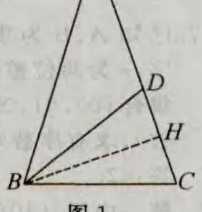

图 1

作 $BH\perp CD$ 于 $H$,

则 $CH=DH=\frac{1}{2}(1-a)=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

又 $AH=1-CH=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$,

所以 $\cos\angle BAC=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4. 一串数 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,⋯的构成规律是:第一和第二个数都是 1,从第三个数起,每一个数都等于它前面紧邻的两个数的和,那么,这串数中的第 2014 个数被 7 除的余数是(　　).

(A)0　(B)2　(C)4　(D)6

答:(D).

**解**　设这串数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,其构成规律为 $a_1=a_2=1$,$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$,因为 $a_n(\text{mod}7)=a_{n-1}(\text{mod}7)+a_{n-2}(\text{mod}7)$,于是考虑这些数被 7 除的余数列 1,1,2,3,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0,⋯,将每两个相邻项组成一个二元数组,得

(1,1),(1,2),(2,3),(3,5),(5,1),(1,6),(6,0),(0,6),(6,6),⋯. 二元数组中的数都取自 0,1,2,3,4,5,6 这 7 个值,因此,不同的二元数组共 49 个. 所以,在前 50 个二元数组中一定有两个相同的. 出现相同数组之后便呈现循环,观察余数列第 17 个数和第 18 个数构成的数组与第一个数组相同,循环出现,而

$$2014=125\times16+14,$$

所以结果是 6.

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,对任意实数 $x$ 和 $y$,都满足方程 $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$,则 $f(201)$ 的值是(　　).

(A)40400　(B)40401　(C)40402　(D)40403

答:(B).

**解**　在方程 $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$ 中设 $x=y$,得 $f(0)=f(x)+f(x)-2x^2$,也就是 $f(x)=x^2+\frac{a}{2}$,其中 $a=f(0)$. 再取 $x=y=0$,便得到 $a=2a$,即 $a=0$. 经检验 $f(x)=x^2$ 满足方程,所以 $f(x)=x^2$,因此 $f(201)=40401$.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$,则 $f(x)$的值域是(　　).

(A)$\left[-1,\frac{5}{3}\right]$　(B)$\left[-\frac{1}{3},5\right]$

(C)$\left[-\frac{5}{3},1\right]$　(D)$\left[-5,\frac{1}{3}\right]$

答:(B).

**解**　由于 $x^2-x+1>0$,$f(x)$的自然定义域为全体实数,记 $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$,则 $y(x^2-x+1)=x^2+3x+1$,即$(y-1)x^2-(y+3)x+(y-1)=0$.

若二次项系数 $y-1=0$,则得 $x=0$.

若二次项系数 $y-1\neq0$,则 $\Delta=(y+3)^2-4(y-1)^2$

$\geqslant 0$,化简为 $3y^2-14y-5\leqslant 0$,解为 $\left[-\frac{1}{3},5\right]$,所以,$f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{3},5\right]$.

二、填空题(满分64分,每小题8分)

1. 下面是我国著名数学家王元院士的题词:

如果不同的汉字代表0~9中的不同数字,假设"数学竞赛好"表示的是不同数字组成的五位数中最大的平方数.请你确定这个五位数.

答:96721.

**解** 由于 $300^2=90000$,而 $310^2=96100$;$320^2=102400$ 超过了100000,所以这个数字不同的五位数可能在 $310^2\sim 320^2$ 之间的9个平方数中.$311^2=96721$,$312^2=97344$,$313^2=97969$,$314^2=98596$,$315^2=99225$,$316^2=99856$,$317^2=100489$ 大于100000,所以数字不同的五位数中最大的平方数是96721.

2. 求满足 $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$ 的所有实数 $x$.

答:$\sqrt{2}$.

**解** 设 $y=\log_a(\log_a x)$,则 $a^{a^y}=x$,令对于 $a=2$ 和 $a=4$,根据题意,有

$$2^{2^y}=4^{4^y}=(2^2)^{(2^2)^y}=2^{2^{2y+1}},$$

因而有 $y=2y+1$,即 $y=-1$,$x=\sqrt{2}$.

3. 如图2,正方形 $ABCD$ 的边长为5,点 $E$、$F$ 是正方形外两点,$BE=DF=4$,$AE=CF=3$,求 $EF$ 的值.

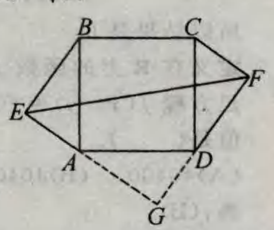


图2

答:$7\sqrt{2}$.

**解** 易知 $\angle AEB=\angle CFD=90°$,延长 $EA$、$FD$ 交于点 $G$,

因为 $\angle ADG=90°-\angle CDF=\angle DCF=\angle BAE$,

$\angle DAG=90°-\angle BAE=\angle ABE$,

所以 $\triangle AGD\cong\triangle BEA$,所以 $EG=FG=7$,所以 $EF=7\sqrt{2}$.

4. 试确定不超过 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$ 的最大整数.

答:3.

**解** 因为 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}=\frac{(\sqrt{14}+2)^2}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)}=\frac{14+4+4\sqrt{14}}{14-4}=\frac{18+4\sqrt{14}}{10}$,

而 $3<\sqrt{14}<4$,进而有 $30<18+4\sqrt{14}<34$,所以 $3<\frac{18+4\sqrt{14}}{10}<3.4$,

所以,不超过 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$ 的最大整数是3.

5. 在立方体的每个面上各写上一个正整数,在每个顶点处写上该顶点所在的三个面上的正整数的乘积,如果8个顶点上写的数之和为2014.问:6个面上写的数的和是多少?

答:74.

**解** 如图3,设在立方体相对的两个面上写的正整数对分别为 $(a,b)$,$(c,d)$,$(e,f)$,则在各顶点写的数之和为 $acf+adf+ace+ade+bcf+bce+bdf+bde=(a+b)(c+d)(e+f)=2014=2\times19\times53$,

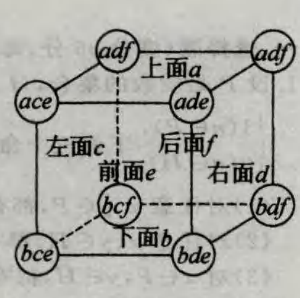


图3

所以在各面上写的数的和是

$$(a+b)+(c+d)+(e+f)=2+19+53=74.$$

6. 如图4,四边形 $ABCD$ 中,$\angle ACB=\angle ADB=90°$,$AC$ 与 $BD$ 相交于点 $E$,$AC=BC$,$AD=4$,$BD=7$.求 $\triangle AEB$ 的面积.

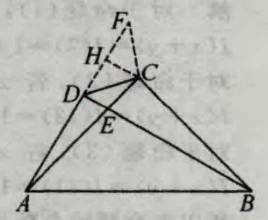


图4

答:$11\frac{63}{77}$.

**解** 由条件可知,$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆,$\angle CBD=\angle CAD$,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,$\angle CBA=45°$.

以 $C$ 为中心,旋转 $\triangle CBD$,使点 $B$ 与点 $A$ 重合,$BD$ 落在 $AD$ 上,得 $\triangle ACF$.有 $AF=7$,$DF=7-4=3$,$\angle FDC=\angle ABC=45°$.自 $C$ 作 $CH\perp DF$ 于 $H$,则 $CH=\frac{1}{2}DF=\frac{3}{2}$,所以 $S_{ACD}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$.

而 $S_{ABC}=\frac{1}{4}\times(4^2+7^2)=\frac{65}{4}$,

所以 $\frac{DE}{EB}=\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{3}{\frac{65}{4}}=\frac{12}{65}$,

即 $\frac{DB}{EB}=\frac{77}{65}$.

又 $\frac{S_{ABD}}{S_{ABE}}=\frac{DB}{EB}$,

且 $S_{ABD}=\frac{1}{2}\times4\times7=14$,

所以,$S_{ABE}=\frac{14\times65}{77}=\frac{910}{77}=11\frac{63}{77}$.

7. 已知 $A$、$B$ 为集合 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中的数字,$r$ 为两位整数 $AB$,$s$ 为两位整数 $BA$,$r$ 和 $s$ 属于集合 $\{00,01,02,\cdots,99\}$,当 $|r-s|=k^2$ 时($k$ 为整数),求有序数对 $(A,B)$ 的个数.

答:42.

**解** 由于 $|(10A+B)-(10B+A)|=9|A-B|=k^2$,则 $|A-B|$ 为完全平方数.

当 $|A-B|=0$ 时,有10个整数对:$(A,B)=(0,0)$,$(1,1)$,$\cdots$,$(9,9)$;(下转第37页)

# 一道竞赛题的探究

安徽省五河第一中学(233300)　张同语　潘嵩

**题目**　(2013年全国高中数学联赛湖北省预赛试题)设$G$为$\triangle ABC$的重心,过点$G$作直线分别交边$AB$、$AC$于点$M$、$N$,已知$AB=2$,$AC=\sqrt{3}BC$,求四边形$MNCB$的面积的最大值.

这道试题内涵丰富,背景深厚,是一道值得玩味的好试题,本文试从以下几方面给予探究.

**1.解法探究**

该试题解法较多,本文试给出一种能够充分体现其试题源头和背景的优美解法.

**解析**　延长$AG$交$BC$于点$D$,则点$D$是边$BC$的中点,故$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,设$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$,则　$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AN}$,

$\because$　$G$为$\triangle ABC$的重心.

$\therefore$　$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

$\therefore$　$\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\frac{1}{m}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AN})$,

即　$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3m}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3n}\overrightarrow{AN}$.

又$\because$　$M$、$G$、$N$三点共线,

$\therefore$　$\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1$,即　$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

又　$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=mn$.

由均值定理有　$3=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{2}{\sqrt{mn}}$,

$\therefore$　$\sqrt{mn}\geqslant\frac{2}{3}$,即　$mn\geqslant\frac{4}{9}$,

$\therefore$　$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant\frac{4}{9}$,即$S_{\triangle AMN}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$,从而$S_{四边形MNCB}\leqslant\frac{5}{9}S_{\triangle ABC}$,当且仅当$m=n=\frac{2}{3}$,即$MN/\!/BC$时取得最大值.

再以$AB$中点$O$为坐标顶点,$AB$边为$x$轴,以$AB$边的中垂线为$y$轴,建立平面直角坐标系,则$A(-1,0)$,$B(1,0)$,设$C(x,y)$且$y>0$.

由条件$AC=\sqrt{3}BC$得　$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,化简得　$(x-2)^2+y^2=3$.

故$C$在以点$O(0,0)$为圆心,$\sqrt{3}$为半径的圆上,所以$0<y\leqslant\sqrt{3}$,

(下转第38页)

(上接第36页)

当$|A-B|=1$时,有18个整数对:$(A,B)=(0,1)$,$(1,2)$,…,$(8,9)$,和它们的逆序数;

当$|A-B|=4$时,有12个整数对:$(A,B)=(0,4)$,$(1,5)$,…,$(5,9)$,和它们的逆序数;

当$|A-B|=9$时,有2个整数对:$(A,B)=(0,9)$,和它的逆序数.

因而,满足条件的有序数对个数为$10+18+12+2=42$.

8.点$P$是边长为$6\sqrt{3}$的正三角形$ABC$的内切圆上的一个动点,求$BP+\frac{1}{2}PC$的最小值.

答:$\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

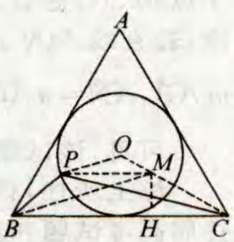


图5

**解**　设$\triangle ABC$内切圆的圆心为点$O$,连接$OC$,

取$OC$上的点$M$,使$OM=\frac{1}{4}OC$,由于正三角形$ABC$的边长为$6\sqrt{3}$,所以$OC=6$,$OP=3$,$OM=\frac{3}{2}$,$\frac{OM}{OP}=\frac{OP}{OC}=\frac{1}{2}$,所以,$\triangle OPM\backsim\triangle OCP$.

所以,$\frac{PM}{PC}=\frac{OM}{OP}=\frac{1}{2}$,得$PM=\frac{1}{2}PC$,所以,$PB+\frac{1}{2}PC=PB+PM\geqslant BM$.

自$M$作$MH\perp BC$于$H$,$MH=\frac{1}{2}MC=\frac{1}{2}(OC-OM)=\frac{9}{4}$,$BH=BC-CH=6\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{15}{4}\sqrt{3}$.

所以$BM=\sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{756}}{4}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

所以$BP+\frac{1}{2}PC=PB+PM\geqslant BM=\frac{3\sqrt{21}}{2}$,即$BP+\frac{1}{2}PC$的最小值为$\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

事实上,当动点$P$取$BM$与内切圆的交点时,恰可得到最小值$\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

(北京数学会普及委员会提供)