



2012年北京市中学生数学竞赛 高一年级初赛试题及参考解答

2012年4月15日

试题

一、选择题(满分36分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x>0, \\ 5, & x=0, \\ 2^x, & x<0. \end{cases}$ 则 $f(-2)+f(0)$

+ $f(1)+f(3)$ 的值为().

- (A)8 (B)11 (C)13 $\frac{1}{4}$ (D)15 $\frac{1}{2}$

2. 一个锐角的正弦和余弦恰是二次三项式 ax^2+bx+c 的不同的根, 则 a, b, c 之间的关系是().

- (A) $b^2=a^2-4ac$ (B) $b^2=a^2+4ac$
(C) $b^2=a^2-2ac$ (D) $b^2=a^2+2ac$

3. 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)=x^2-2x$, 则 $f(x)$ 在 $x \in [-4, -2]$ 上的最小值为().

- (A) $-\frac{1}{9}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{9}$

4. 定义在正整数集 Z^+ 上的函数 f , 对于每一个 $n \in Z^+$ 和无理数 $\pi=3.14159265358\dots$ 满足

$$f(n) = \begin{cases} k^2 \text{ 的末位数字, } (\pi \text{ 的小数点后第 } n \text{ 位数字 } k \neq 0 \text{ 时}); \\ 3, & (\pi \text{ 的小数点后第 } n \text{ 位数字 } k=0 \text{ 时}). \end{cases}$$

若函数 $f(f(n))$ 的值域记为 M , 则().

- (A) $1 \notin M$ (B) $5 \notin M$
(C) $6 \notin M$ (D) $9 \notin M$

5. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=30^\circ, \angle C=90^\circ$, 以 C 为圆心, CB 为半径作圆交 AB 边于 M , 交 AC 边于 N , CM 与 BN 交于点 P . 若 $AN=1$, 则 $S_{\triangle CPN} - S_{\triangle BPM}$ 等于().

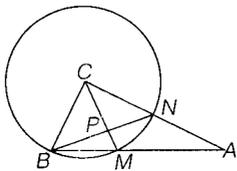


图1

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x) - f(y) = f(\frac{x-y}{1-xy})$; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0$, 若 $P = f(\frac{1}{4})$

+ $f(\frac{1}{5}), Q = f(\frac{1}{6}), R = f(0)$; 则 P, Q, R 的大小关系为().

- (A) $R > P > Q$ (B) $R > Q > P$
(C) $P > R > Q$ (D) $Q > P > R$

二、填空题(满分64分)

1. 求 $\log_2 \sin \frac{\pi}{3} + \log_2 \tan \frac{\pi}{6} + \log_2 \cos \frac{\pi}{4}$ 的值.

2. 已知 $f(x)$ 是四次多项式, 且满足 $f(i) = \frac{1}{i}, i=1, 2, 3, 4, 5$, 求 $f(6)$ 的值.

3. 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求满足方程 $[n \lg 2] + [n \lg 5] = 2012$ 的自然数 n 的值.

4. 如图2, 半径为1的两个等圆相交, 在两圆的公共部分作一内接正方形 $ABCD$, 如果圆心距 O_1O_2 等于1, 试求正方形 $ABCD$ 的面积.

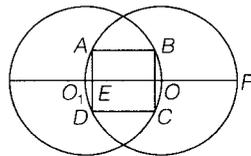


图2

5. 求 $\frac{1^2}{1^2 - 1 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{3^2}{3^2 - 3 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{5^2}{5^2 - 5 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{7^2}{7^2 - 7 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \dots + \frac{2011^2}{2011^2 - 2011 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2}$ 的值.

6. 在单位正方形 $ABCD$ 中, 分别以 A, B, C, D 四点为圆心, 以1为半径画弧, 如图3所示. 交点为 M, N, L, K , 求阴影部分的面积.

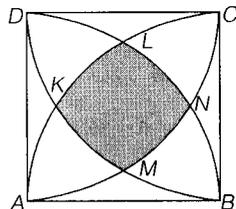


图3

7. 已知二次函数



$f(x)$ 满足 $f(-10)=9, f(-6)=7, f(2)=-9$, 求 $f(100)$ 的值.

8. 上底 $BC=2$, 下底 $AD=3$ 的梯形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 彼此外切于点 O 的两个圆分别切直线 AD 于点 A 和 D , 交 BC 分别于点 K 和 L (如图 4), 求 AK^2+DL^2 的值.

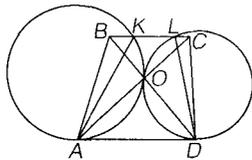


图 4

参考答案

一、选择题

1. 解 $f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)=2^2+5+3+5=13\frac{1}{4}$. 答:(C).

2. 解 因为 $a \neq 0$, 由韦达定理得 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c}{a}$ 和 $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$,

因为 $(\frac{b}{a})^2 (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\frac{c}{a}$,

所以 $b^2 = a^2 + 2ac$. 答:(D).

3. 解 由 $f(x+2)=3f(x)$, 可得 $f(x+4)=3f(x+2)=9f(x)$, 所以 $x \in [-4, -2]$ 上的图像, 是由 $x \in [0, 2]$ 时的图像向左平移 4 个单位, 再将纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{9}$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in [-4, -2]$ 上的最小值为 $x \in [0, 2]$ 上最小值的 $\frac{1}{9}$, 即 $\frac{1}{9}f(1) = -\frac{1}{9}$. 答:(A).

4. 解 易知 $f(n)$ 的值域为 $\{1, 3, 4, 5, 6, 9\}$, $f(f(n))$ 的值域 $M = \{1, 4, 5, 9\}$. 答:(C).

5. 解 设 $CB=x$, 则 $CN=x, AC=1+x$. 因为 $\angle C=90^\circ, \angle A=30^\circ$, 所以 $1+x=\sqrt{3}x$, 所以 $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle CBN} = \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2 = \frac{\sqrt{3}+2}{4},$$

$$S_{\triangle CBM} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{8},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle CPN} - S_{\triangle BPM} = S_{\triangle CBN} - S_{\triangle CBM} = \frac{1}{8}.$$

答:(A).

6. 解 由 $f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$,

令 $x=y$, 得 $f(0)=0$,

令 $x=0$, 得 $-f(y)=f(-y)$, 即 $f(x)$ 是奇函数, 又由已知, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0$, 设 $-1 < x < y < 0$, 可证得 $-1 < \frac{x-y}{1-xy} < 0$, 而 $f(\frac{x-y}{1-xy}) > 0$, 所以 $f(x) - f(y) = f(\frac{x-y}{1-xy}) > 0$, 于是 $f(x) < f(y)$. 在 $(-1, 0)$ 上 $f(x)$ 单调递减, 又 $f(x)$ 是奇函数, 可知在 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$ 也单调递减, 所以在 $(-1, 1)$ 上 $f(x)$ 单调递减.

$$\text{又 } f(x) = f(y) + f(\frac{x-y}{1-xy}),$$

$$\text{得 } P = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{5}) = f(\frac{3}{7}),$$

又因为 $\frac{3}{7} > \frac{1}{6} > 0$, 所以 $R > Q > P$. 答:(B).

二、填空题

1. 解 $\log_2 \sin \frac{\pi}{3} + \log_2 \tan \frac{\pi}{6} + \log_2 \cos \frac{\pi}{4} = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{4} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$.

2. 解 设 $g(x) = xf(x) - 1$, 则 $g(i) = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 因为 $f(x)$ 是四次多项式, 所以 $g(x)$ 为五次多项式, 则可设 $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$,

所以

$$f(x) = \frac{a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1}{x},$$

且是四次多项式, 所以

$$a(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)+1=0, \text{ 得 } a = \frac{1}{5!},$$

$$\text{所以 } f(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. 解 因为 $n\lg 2$ 和 $n\lg 5$ 是无理数, 那么可以表示 $n\lg 2 = x + y$, 其中 $x = [n\lg 2], y = \{n\lg 2\} \neq 0$.

$$\text{而 } n\lg 5 = n\lg \frac{10}{2} = n - n\lg 2 = n - x - y = n - x - 1 + (1 - y).$$

因为 $0 < y < 1$,

所以 $0 < 1 - y < 1$, 因此 $[n\lg 5] = n - x - 1$, 由此得到



$$2012 = [n \lg 2] + [n \lg 5] = x + (n - x - 1) = n - 1,$$

所以 $n = 2013$.

4. 解 如图2所示的字母,由相交弦定理得 $AE^2 = O_1E \cdot EF$, 设 $AE = \frac{x}{2}$, 则 $O_1E = \frac{1-x}{2}$,

$$EF = O_1F - O_1E = 2 - \frac{1-x}{2} = \frac{3+x}{2}.$$

因此, $(\frac{x}{2})^2 = \frac{1-x}{2} \cdot \frac{3+x}{2}$, 即 $2x^2 + 2x - 3 = 0$,

解得 $x = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ (负根舍).

所以, 正方形 $ABCD$ 的面积 $= x^2 = (\frac{\sqrt{7}-1}{2})^2 = \frac{1}{2}(4-\sqrt{7})$.

5. 解 设加项的通项为 $f(n) = \frac{n^2}{n^2 - 2 \times 1006n + 2 \times 1006^2} = \frac{n^2}{(n-1006)^2 + 1006^2}$,

$n = 2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots, 1006$. 则

$$f(n) + f(2012 - n) = \frac{n^2 + (2012 - n)^2}{(n - 1006)^2 + 1006^2} =$$

$$\frac{[1006 + (n - 1006)]^2 + [1006 - (n - 1006)]^2}{(n - 1006)^2 + 1006^2} = 2.$$

这 1006 项按照 $f(n)$ 与 $f(2012 - n)$ 配对, 503 对, 每对的和为 2.

所以, 所求的值为 $2 \times 503 = 1006$.

6. 解 根据对称性, 如图5所表示的, 阴影部分的面积为 u , 其余部分是 4 个 x 和 4 个 y , 于是, 等腰曲边形

$$ABL \text{ 的面积} = u + 2y + x = 2 \times \frac{\pi}{6} \times 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

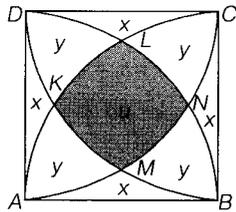


图5

同理, 等腰曲边形 ADN 的面积 $= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

因此, 曲边形 ANL 的面积 $= u + y = 2 \times (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) - \frac{\pi}{4} \times 1^2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

而枣核形 AC 的面积 $= 2y + u = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 - 1^2 = \frac{\pi}{2} - 1$,

所以, 阴影部分 $MNLK$ 的面积 $= 2 \times$

$$(\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}.$$

7. 解 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则由已知条件得关于 a, b, c 的方程组:

$$\begin{cases} 9 = 100a - 10b + c & \text{①} \\ 7 = 36a - 6b + c & \text{②} \\ -9 = 4a + 2b + c & \text{③} \end{cases}$$

由①减③得 $3 = 16a - 2b$

由②减③得 $4 = 8a - 2b$

由④减⑤得 $a = -\frac{1}{8}$,

以 $a = -\frac{1}{8}$ 代入⑤, 解得 $b = -\frac{5}{2}$.

再以 $a = -\frac{1}{8}, b = -\frac{5}{2}$ 代入③得 $c = -\frac{7}{2}$,

所以 $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$,

$$f(100) = -\frac{100^2}{8} - \frac{5 \times 100}{2} - \frac{7}{2} = -1503.5.$$

8. 解 过点 O 作两圆的公切线交 AD 于 P , 则 $PO = AP = DP$, 这意味着 $\triangle AOD$ 是直角三角形,

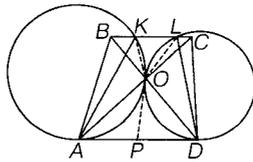


图6

显然 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 其相似比 $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$.

因为 $\angle ACK = \angle CAP = \angle AOP = \angle AKO$, $\angle KAO = \angle KAO$,

所以, $\triangle ACK \sim \triangle AKO$,

所以, $\frac{AK}{AO} = \frac{AC}{AK}$, 因此

$$AK^2 = AO \cdot AC = AO^2 \frac{AO + OC}{AO} = \frac{5}{3} \cdot AO^2.$$

同理可得, $DL^2 = \frac{5}{3} \cdot OD^2$. 所以

$$\begin{aligned} AK^2 + DL^2 &= \frac{5}{3} \cdot AO^2 + \frac{5}{3} \cdot OD^2 \\ &= \frac{5}{3} \cdot AD^2 \\ &= \frac{5}{3} \times 3^2 = 15. \end{aligned}$$

(北京数学会普及委员会提供)