



2011年北京市中学生数学竞赛 高一年级决赛试题及参考解答

试题

一、选择题(满分40分,每小题8分)

1. 二次三项式 $x^2 + ax + b$ 的根是实数, 其中 a, b 是自然数, 且 $ab = 2^{2011}$, 则这样的二次三项式共有 _____ 个.

2. 如图1, 在半径为1的圆 O 中内接有锐角三角形 ABC , H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 角平分线 AL 垂直于 OH , 则 $BC =$ _____.

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = 2x + 2m$, 若 $F(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$, 则 $m =$ _____.

4. $\tan 37.5^\circ =$ _____.

5. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-3x}$, 定义 $f_1(x) = f(f(x)), f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) (n = 2, 3, \dots), f_{2011}(2011) =$ _____.

二、(满分15分) D 是正 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, 设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心分别为 I_1, I_2 , 外心分别为 O_1, O_2 , 求证: $(I_1O_1)^2 + (I_2O_2)^2 = (I_1I_2)^2$.

三、(满分15分) n 是正整数, 记 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$, 如 $1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, 又记 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 求方程 $\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] + \dots + \left[\frac{x}{10!}\right] + \left[\frac{x}{11!}\right] = 2011$ 的所有正整数解.

四、(满分15分) 平面上的 n 个点, 若其中任3个点中必有2个点的距离不大于1, 则称这样的 n 个点为“标准 n 点组”. 要使一个半径为1的圆纸片, 对任意“标准 n 点组”都能至少盖住其中的25个点, 试求 n 的最小值.

五、(满分15分) 已知函数 $f: R \rightarrow R$, 使得对任意实数 x, y, z 都有 $\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$, 求 $[1 \times f(1)] + [2 \times f(2)] + [3 \times f(3)] + \dots + [2011 \times f(2011)]$ 的值. 其中对于实数 $a, [a]$ 表示不超过 a 的最大整数.

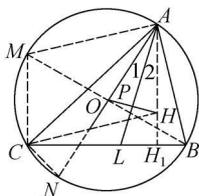


图1

参考答案

1. 解 我们发现, 实际上, 数 a 和 b 是2的非负整数指数的幂, 即 $a = 2^k, b = 2^{2011-k}$, 则判别式 $\Delta = a^2 - 4b = 2^{2k} - 4 \cdot 2^{2011-k} = 2^{2k} - 2^{2013-k} \geq 0$, 得 $2k \geq 2013 - k$, 因此 $k \geq \frac{2013}{3} = 671$, 但 $k \leq 2011$, 所以 k 能够取 $2011 - 671 + 1 = 1341$ 个不同的整数值. 每个 k 恰对应一个所求的二次三项式, 所以这样的二次三项式共有1341个.

2. 解 易知, 圆心 O 及垂心 H 都在锐角三角形 ABC 的内部, 延长 AO 交圆于 N , 连接 AH 并延长至 H_1 与 BC 相交, 连接 CN , 在 $Rt\triangle CAN$ 和 $Rt\triangle AH_1B$ 中, $\angle ANC = \angle ABC$, 于是有 $\angle CAN = \angle BAH_1$, 再由 AL 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 得 $\angle 1 = \angle 2$.

由条件 $AP \perp OH$, 得 $AH = AO = 1$.

连接 BO 交圆于 M , 连接 AM, CM, CH ,

可知 $AMCH$ 为平行四边形,

所以 $CM = AH = AO = 1, BM = 2$,

因为 $\triangle MBC$ 是直角三角形,

由勾股定理得 $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

4. 解1 作 $Rt\triangle ADB$, 使得 $\angle ADB = 90^\circ, AD = 1, AB = 2$,

则 $\angle B = 30^\circ, BD = \sqrt{3}$.

延长 BD 到 C , 使 $BC = 2$, 则 $DC = 2 - \sqrt{3}$.

连接 AC , 则 $\angle ACB = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$.

作 $\angle ACD$ 的平分线交 AD 于 E ,

则 $\angle ECD = 37.5^\circ$.

由于 $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$= 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } AC = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{12} + 2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

由三角形的角平分线定理, 得 $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{DC}$,

$$\text{于是 } \frac{AE + ED}{ED} = \frac{AC + DC}{DC},$$

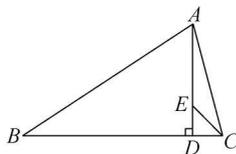


图2



$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{ED}{DC} &= \frac{AD}{AC+CD} = \frac{AD}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \tan 37.5^\circ &= \frac{ED}{DC} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \\ &= \sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

解2 作等腰直角三角形 ABC ,

使 $\angle C = 90^\circ, AC = BC = 1$,

则 $AB = \sqrt{2}$.

作 $\angle CAD = 30^\circ$,

则 $CD = \frac{\sqrt{3}}{3}, AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

则 $\angle DAB = 15^\circ$.

作 $\angle BAD$ 的平分线 AE ,

记 $CE = x$,

$$\text{则 } BE = 1-x, DE = x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \text{整理得 } x &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} \\ &= \sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\tan 37.5^\circ = \frac{CE}{AC} = \frac{x}{1} = \sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

5. 解 记 $f(x) = f_0(x) = \frac{1+x}{1-3x}$,

$$\text{则 } f_1(x) = f(f(x)) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}} = -\frac{1-x}{1+3x};$$

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+3x}}{1 + 3 \cdot \frac{1-x}{1+3x}} = x;$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{1+x}{1-3x} = f(x) = f_0(x);$$

接下来有 $f_4(x) = f_1(x), f_5(x) = f_2(x), f_6(x) = f_3(x), \dots, f_n(x)$ 的表达式是循环重复的, 以3项为一周期.

$$\text{所以, } f_{2011}(x) = f_{3 \times 670 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{1+3x},$$

$$f_{2011}(2011) = \frac{2011-1}{1+3 \times 2011} = \frac{2010}{6034} = \frac{1005}{3017}.$$

二、证明 作以 A 为中心、逆时针旋转 60° 的变换

$R(A, 60^\circ)$, 使 $\triangle ABD$ 到 $\triangle ACD_1$, 由于 $\angle ADC + \angle AD_1C = \angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$, 所以 A, D, C, D_1 共圆, 因此 O_2 是 $\triangle AD_1C$ 的外心, 也就是 O_1 的 $R(A, 60^\circ)$ 像, 因此 $AO_1 = DO_1 = AO_2 = DO_2 = O_1O_2$,

所以 $\angle O_1AO_2 = \angle O_1DO_2 = 60^\circ$.

由 $\angle AO_1O_2 + \angle ACB = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$,

O_1 在 $\triangle ACD$ 的外接圆 $\odot O_2$ 上.

由于 $\angle AI_1D = \angle ABD + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABD)$

$$= 60^\circ + \frac{1}{2} \times 120^\circ = 120^\circ,$$

所以 I_1 在 $\odot O_2$ 上, 因此 $\angle O_1I_1D = 180^\circ - \angle O_1AD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,

$\angle I_1O_1D + \angle I_1DO_1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

同理可证, I_2 在 $\triangle ABD$ 的外接圆 $\odot O_1$ 上,

所以 $\angle DI_2O_2 = 150^\circ$.

由于 $\angle I_1DI_2 = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$,

$$\begin{aligned} \angle I_2DO_2 + \angle I_1DO_1 &= \angle I_1DI_2 - \angle I_1DO_1 \\ &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \end{aligned}$$

比较可得 $\angle I_1O_1D = \angle I_2DO_2$.

在 $\triangle O_1I_1D$ 与 $\triangle DI_2O_2$ 中,

因为已证 $O_1D = DO_2$,

$\angle O_1I_1D = \angle DI_2O_2 = 150^\circ$,

又 $\angle I_1O_1D = \angle I_2DO_2$.

因此 $\triangle O_1I_1D \cong \triangle DI_2O_2$.

所以 $I_1O_1 = DI_2$,

$DI_1 = I_2O_2$.

由于 $\angle I_1DI_2 = 90^\circ$, $\triangle I_1DI_2$ 是直角三角形.

根据勾股定理, 有 $(DI_1)^2 + (DI_2)^2 = (I_1I_2)^2$,

而 $I_1O_1 = DI_2, DI_1 = I_2O_2$.

因此 $(I_1O_1)^2 + (I_2O_2)^2 = (I_1I_2)^2$.

三、解 由于当 x 是正整数时, $[\frac{x}{1!}] = [x]$,

$$[\frac{x}{2!}] = [\frac{x}{2}] \geq \frac{x-1}{2}, [\frac{x}{3!}] = [\frac{x}{6}] > \frac{x}{6} - 1,$$

$$\text{所以 } x + \frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} - 1 < 2011, \text{ 即 } \frac{5x}{3} < 2012 \frac{1}{2},$$

得方程的正整数解 x 满足 $0 < x < 1207.5$.

由于 $6! = 720, 7! = 5040$,

所以方程的正整数解 $x < 7!$, 即

$$[\frac{x}{7!}] = [\frac{x}{8!}] = [\frac{x}{9!}] = [\frac{x}{10!}] = [\frac{x}{11!}] = 0.$$

因此, 方程 $[\frac{x}{1!}] + [\frac{x}{2!}] + [\frac{x}{3!}] + [\frac{x}{4!}] + [\frac{x}{5!}] +$

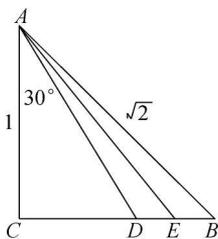


图3

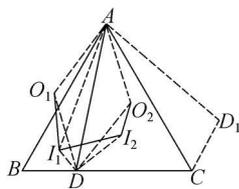


图4



$[\frac{x}{6!}] = 2011$ 的解与原方程的解是一样的.

设小于 $7!$ 的正整数 x 为上述方程的解, 我们写出 $\frac{x}{k!} (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 的带余除法表达式:

$$\text{设 } \frac{x}{6!} = a + \frac{r_1}{6!}, 0 \leq r_1 < 6!, (0 \leq a \leq 6, a \in \mathbb{N});$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{6!}] = a \quad \text{①}$$

$$\frac{x}{5!} = 6a + \frac{r_1}{5!} = 6a + b + \frac{r_2}{5!}, 0 \leq r_2 < 5!, (0 \leq b \leq 5, b \in \mathbb{N}),$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{5!}] = 6a + b \quad \text{②}$$

$$\frac{x}{4!} = 30a + 5b + \frac{r_2}{4!} = 30a + 5b + c + \frac{r_3}{4!}, 0 \leq r_3 < 4!, (0 \leq c \leq 4, c \in \mathbb{N}),$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{4!}] = 30a + 5b + c \quad \text{③}$$

$$\frac{x}{3!} = 120a + 20b + 4c + \frac{r_3}{3!} = 120a + 20b + 4c + d + \frac{r_4}{3!}, 0 \leq r_4 < 3!, (0 \leq d \leq 3, d \in \mathbb{N});$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{3!}] = 120a + 20b + 4c + d \quad \text{④}$$

$$\frac{x}{2!} = 360a + 60b + 12c + 3d + \frac{r_4}{2!} = 360a + 60b + 12c + 3d + e + \frac{r_5}{2!}, 0 \leq r_5 < 2, (e = 0, 1, 2);$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{2!}] = 360a + 60b + 12c + 3d + e \quad \text{⑤}$$

$$\frac{x}{1!} = 720a + 120b + 24c + 6d + 2e + \frac{r_5}{1!} = 720a + 120b + 24c + 6d + 2e + f, (f = 0, 1);$$

$$\text{因此 } [\frac{x}{1!}] = 720a + 120b + 24c + 6d + 2e + f \quad \text{⑥}$$

①~⑥相加得 $1237a + 206b + 41c + 10d + 3e + f = 2011$.

显然 $a = 1$, 因此 $206b + 41c + 10d + 3e + f = 2011 - 1237 = 774$;

易知 $b = 3$, 因此 $41c + 10d + 3e + f = 774 - 206 \times 3 = 156$;

易知 $c = 3$, 于是 $10d + 3e + f = 156 - 41 \times 3 = 33$;

类似求得 $d = 3, e = 1, f = 0$.

所求的 $x = 1 \times 720 + 3 \times 120 + 3 \times 24 + 3 \times 6 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 1172$.

$$x = 1172 \text{ 是方程 } [\frac{x}{1!}] + [\frac{x}{2!}] + [\frac{x}{3!}] + \dots + [\frac{x}{10!}]$$

$+ [\frac{x}{11!}] = 2011$ 的唯一正整数解.

四、解 首先证明, $n_{\min} > 48$.

如图 5, 在平面上画长为 5 的线段 AB , 分别以 A, B 为圆心, 画半径为 0.5 的两个圆, 在每一个圆内, 取 24 个点, 则平面上有 48 个点满足题设条件(其中任意 3 点中必有 2 点的距离不大于 1), 显然, 不可能画出一个半径为 1 的圆, 其包含有 25 个所选的点, 所以 $n > 48$.

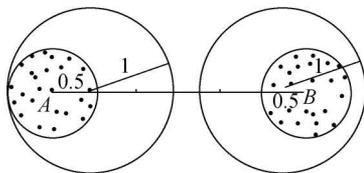


图 5

下面证明 $n_{\min} = 49$.

若 $n = 49$, 设 A 是其中的一点, 作以 A 为圆心半径为 1 的 $\odot A$, 若所有的点都在圆 A 中, 那么就满足题设条件.

若不是所有的点都在圆 A 中, 则至少有一点 B 不在圆 A 中, 再作以 B 为圆心、半径为 1 的 $\odot B$, 则 A, B 的距离大于 1 (如图 6), 除 A, B 外, 余下的 47 个点中每一点 P 都与 A, B 组成 3 点组, 必有两个点的距离不大于 1, 所以要么 $PA \leq 1$, 要么 $PB \leq 1$, 即点 P 要么在 $\odot A$ 中, 要么在 $\odot B$ 中, 根据抽屉原理, 必有一个圆至少包含了这 47 个点中的 24 个点, 不妨设这个圆就是 $\odot A$, 再加上圆心 A 点, 就有不少于 25 个点在这个半径为 1 的 $\odot A$ 中(圆内或圆周上).

所以 n 的最小值是 49.

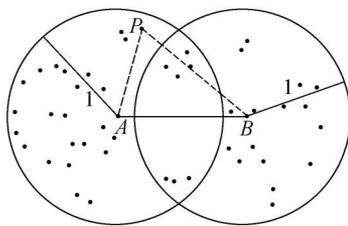


图 6

五、解 由于已知函数 $f: R \rightarrow R$, 使得对任意实数 x, y, z 都满足 $\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$, 可令 $x = y = z = 0$,

$$\text{有 } \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - (f(0))^2 \geq \frac{1}{4},$$





$$\text{即 } \left[f(0) - \frac{1}{2} \right]^2 \leq 0,$$

由于 $f(0)$ 是一个实数, 所以 $f(0) = \frac{1}{2}$.

再令 $x = y = z = 1$,

$$\text{有 } \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(1) - (f(1))^2 \geq \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } \left[f(1) - \frac{1}{2} \right]^2 \leq 0,$$

由于 $f(1)$ 是一个实数, 所以 $f(1) = \frac{1}{2}$.

又令 $y = z = 0$,

$$\text{有 } \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(x)f(0) \geq \frac{1}{4},$$

代入 $f(0) = \frac{1}{2}$ 得

$$\text{对任意实数 } x, \text{ 都有 } f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

又令 $y = z = 1$,

$$\text{有 } \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - f(x)f(1) \geq \frac{1}{4},$$

代入 $f(1) = \frac{1}{2}$ 得

$$\text{对任意实数 } x, \text{ 都有 } f(x) \geq \frac{1}{2} \quad \textcircled{2}$$

综合①、②可得, 对任意实数 x , 都有 $f(x) = \frac{1}{2}$.

验证: 函数 $f(x) = \frac{1}{2}$ 满足题设条件, 取的是等

号, 所以满足题设条件的函数的唯一解为 $f(x) = \frac{1}{2}$.

于是

$$\begin{aligned} & [1 \times f(1)] + [2 \times f(2)] + [3 \times f(3)] + \dots + \\ & [2011 \times f(2011)] \\ &= \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{2}{2} \right] + \left[\frac{3}{2} \right] + \left[\frac{4}{2} \right] + \dots + \left[\frac{2011}{2} \right] \\ &= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 1005 + 1005 \\ &= 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 1005) \\ &= (1 + 1005) \times 1005 \\ &= 1011030. \end{aligned}$$

(北京数学会普及委员会提供)

(上接第43页)

为此, 我们用穷举的方法, 把各种排列写出来: (前面已讨论过 1, 2 排在最前面的情形, 这里可以略去.)

3, 1, 2, 4, 3, 1, 4, 2, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 4, 1, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 2, 1;
4, 1, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1.

不难看出用第二种方法能找到最好旅馆的排列, 除了前面所说“2 排在最前面”的 6 种外, 还有这里的下述排法: 3, 1, 2, 4, 3, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 共 5 种. 因此, 用第二种方法找到最好旅馆的概率是 $\frac{11}{24}$.

用第三种方法能找到最好旅馆的排列是: 3, 2, 1, 4, 3, 2, 4, 1, 3, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 共 6 种. 因此, 第三种方法找到最好旅馆的概率, 和第一种方法找到旅馆的概率一样, 也是 $\frac{1}{4}$.

如果排列是 4, 3, 2, 1, 那么上述三种方法都无法找到最好旅馆.

第二种方法找到最好旅馆的概率最大.

(北京高中数学知识应用竞赛组委会提供)

欢迎投稿

来稿须知

1. 稿件的内容要新颖、形式要活泼, 以适合中学生阅读, 应避免写成教学交流文章.
2. 提倡短小精悍的文章, 讲清一、两个问题, 不要追求“大而全”. 稿一般不超过 1500 字, 中学生习作栏目的稿件更要注意求简求精.
3. 来稿请用 300 或 400 字稿纸誊清, 打印稿应留有一定的行距、字距(每行 40 个字); 文稿中的外文字母要分清语种、大写、小写、正体、斜体; 数学符号、图形要清楚、规范, 容易混淆的字母、符号在第一次出现时请用铅笔注明; 文稿中的计算要准确.
4. 来稿请在左上方注明文稿适合初中生还是高中生阅读, 标题下方请写明作者的通讯地址、邮编、作者姓名.
5. 来稿切忌一稿多投, 如发现抄袭现象我们将作出公开批评. 来稿一律不退, 请作者自留底稿.