2009 年北京市中学生数学竞赛高一年级决赛试题及参考解答

一、填空题(满分 40 分,每小题 8 分)

1. 已知$\vec{a}$和$\vec{b}$都是单位向量,并且向量$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$与$\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$互相垂直,则$\vec{a}$和$\vec{b}$之间的角$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$______.

答:$\frac{\pi}{3}$.

解　设$\vec{a}$和$\vec{b}$之间的角$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\theta$,则根据向量垂直的条件得:

$$0=\vec{c}\cdot\vec{d}=(\vec{a}+2\vec{b})(5\vec{a}-4\vec{b})$$
$$=5(\vec{a})^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8(\vec{b})^2$$
$$=5+6\cos\theta-8=6\cos\theta-3,$$

由此$\cos\theta=\frac{1}{2}$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.

2. $\frac{1}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$的值是______.

答:$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

解　$\frac{1}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$

$$=\frac{1}{\cos 70^\circ}-\frac{1}{\sqrt{3}\sin 70^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin 70^\circ-\cos 70^\circ}{\sqrt{3}\sin 70^\circ\cos 70^\circ}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 70^\circ-\frac{1}{2}\cos 70^\circ\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 140^\circ}=\frac{2(\sin 70^\circ\cos 30^\circ-\cos 70^\circ\sin 30^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 140^\circ}$$

$$=\frac{4\sin(70^\circ-30^\circ)}{\sqrt{3}\sin 40^\circ}=\frac{4\sqrt{3}\sin 40^\circ}{3\sin 40^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

3. 如图 1,过$\odot O$外一点M引圆的切线切圆于点B,连接MO交圆于点A,已知$MA=4$厘米,$MB=4\sqrt{3}$厘米. N为$\overset{\frown}{AB}$的中点. 曲边三角形(阴影部分)的面积等于______平方厘米.

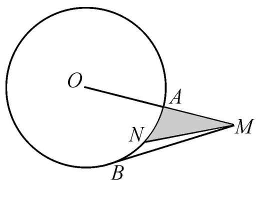

图 1

答:$\frac{4(6-\pi)}{3}$.

解　如图 2,根据条件,延长MO交圆于C,

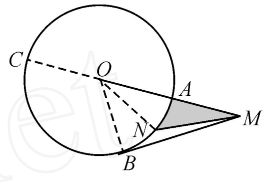

图 2

设圆的半径为r,

$MC=4+2r$,

由切割线定理得

$MB^2=MA\cdot MC$,

即$48=4(4+2r)$,

解得$r=4$cm, $OC=OA=AM=4$cm.

连接OB,在直角$\triangle OBM$中,

$$\sin\angle MOB=\frac{MB}{OM}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以$\angle MOB=60^\circ$,因此$\overset{\frown}{AB}$为60°,而N为$\overset{\frown}{AB}$的中点,$\overset{\frown}{AN}=30^\circ$,连接$ON$,则$\angle MON=30^\circ$,所以$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot ON\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\frac{1}{2}=8(\mathrm{cm}^2)$.

而扇形AON的面积$=\pi 4^2\times\frac{30}{360}$

$$=\frac{4\pi}{3}(\mathrm{cm}^2),$$

所以阴影图形的面积$=8-\frac{4\pi}{3}=\frac{24-4\pi}{3}$

$$=\frac{4(6-\pi)}{3}(\mathrm{cm}^2).$$

4. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$的值是______.

答:4.

解　设$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$则

$$x^3=20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\times(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})+20-14\sqrt{2}$$
$$=40+6x,$$

即 $x^3-6x-40=0$,

观察之,4 为方程的一个根,

所以 $(x-4)(x^2+4x+10)=0$.

由 $\Delta=4^2-4\times10=-24<0$,

方程 $x^2+4x+10=0$ 无实根.

所以,方程 $x^3-6x-40=0$ 只有唯一的实根 $x=4$,

即得 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x=4$.

5. 在平面直角坐标系中,不论 m 取何值时,抛物线 $y=mx^2+(2m+1)x-(3m+2)$ 都不通过的直线 $y=-x+1$ 上的点的坐标是______.(写出全部符合条件点的坐标)

答:$(1,0)$,$(-3,4)$,$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

解 由 $y=mx^2+(2m+1)x-(3m+2)=m(x+3)(x-1)+(x-2)$,可知抛物线一定过点 $A(1,-1)$,$B(-3,-5)$. 过点 A、B 分别作 y 轴的平行线交直线 $y=-x+1$ 于点 $C(1,0)$,$D(-3,4)$. 过 A、B 两点的直线与直线 $y=-x+1$ 交于点 $E(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$. 则 C、D、E 三点满足条件.

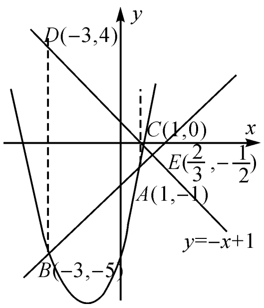

图 3

二、(满分 15 分) 直角 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r,直角的平分线的长为 t. 求证:直角 $\triangle ABC$ 的两条直角边的长 a 和 b 是关于 x 的一元二次方程 $(t-2\sqrt{2}r)x^2+2\sqrt{2}r^2x-2tr^2=0$ 的根.

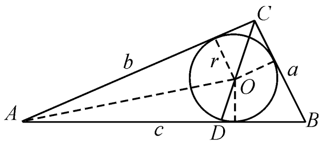

图 4

证明 设直角 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,边长 $AB=c$,$AC=b$,$CB=a$,$\angle C$ 的平分线 $CD=t$,内切圆的圆心为 O,内切圆半径为 r. 连接 OA,OB,OC,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab \quad ①$$

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}$

$$=\frac{1}{2}bt\sin45°+\frac{1}{2}at\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}t(a+b),$$

所以 $ab=\frac{1}{\sqrt{2}}t(a+b)$ ②

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB}$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r(a+b+a+b-2r)$$
$$=r(a+b-r)=(a+b)r-r^2,$$

与①比较得 $ab=2(a+b)r-2r^2$ ③

联立②与③解得 $a+b$,ab 得

$$a+b=\frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t},\quad ab=\frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t},$$

所以根据韦达定理,以 a 和 b 为根的一元二次方程为 $x^2-\frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t}x+\frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t}=0$,

即方程 $(t-2\sqrt{2}r)x^2+2\sqrt{2}r^2x-2tr^2=0$.

三、(满分 15 分) 求函数 $f:Z^+\to Z^+$,使得

(1) $f(1)=1$;

(2) 对于所有 $x,y\in Z^+$,$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 都成立.

解 设函数 $f:Z^+\to Z^+$,满足

(1) $f(1)=1$;

(2) 对于所有 $x,y\in Z^+$,$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$,

对于正整数 n,m,下列的等式成立

$f(2n)=2f(n)+n^2$,

$f(3n)=f(n)+f(2n)+2n^2$,

$f(4n)=f(n)+f(3n)+3n^2$,

…… …… …… ……

$f(mn)=f(n)+f((m-1)n)+(m-1)n^2$.

将上面的等式相加,得

$f(mn)=mf(n)+(1+2+3+\cdots+(m-1))n^2$.

由于 $1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$,

所以 $f(mn)=mf(n)+\frac{m(m-1)}{2}n^2$,对所有的正整数 m 和 n 都成立.

特别是,当 $n=1$ 时 $f(m)=\frac{m(m+1)}{2}$ (*)

等式(*)定义了在正整数集合上的函数 f.

因为 $f(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$,

$$
\begin{aligned}
f(x+y)&=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\\
&=\frac{(x^2+x)+(y^2+y)+2xy}{2}\\
&=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}+xy\\
&=f(x)+f(y)+xy,
\end{aligned}
$$

所以 $f(m)=\frac{m(m+1)}{2}$ 是问题的唯一解.

四、(满分 15 分)如图 5 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 M,交 DC 的延长线于点 N,$\triangle CMN$ 的外心为 O,$\triangle CMN$ 的外接圆与 $\triangle CBD$ 的外接圆的另一交点为 K.证明:

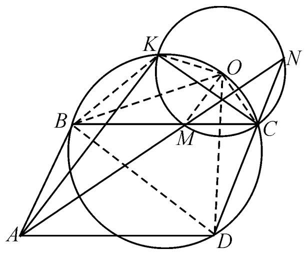

图 5

(1) 点 O 在 $\triangle CBD$ 的外接圆上;

(2) $\angle AKC=90°$.

证明 (1) 由于平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 M,交 DC 的延长线于点 N,所以 $\angle BMA=\angle MAD=\angle BAM$,因此 $BA=BM$,同理可得 $MC=CN$.连接 OC,则 OC 平分 $\angle NCM$.连接 OB,OM,OD,设 $\angle BAD=\theta$,则

$$\angle OCD=\angle BCD+\angle OCM=\theta+\frac{1}{2}(180°-\theta)=90°+\frac{\theta}{2},$$

$$\angle BMO=180°-\angle OMC=180°-\angle OCM=90°+\frac{\theta}{2},$$

所以 $\angle BMO=\angle OCD$.

因此,$\triangle OBM\cong\triangle ODC$,所以 $\angle OBC=\angle ODC$.于是 B,O,C,D 四点共圆,也就是点 O 在 $\triangle CBD$ 的外接圆上.

(2) 由(1)知 $BO=OD$,又 $KO=OC$,因为 B,K,O,C 和 D 都在同一个圆上,则 K,C 关于 BD 的中垂线对称,$BK=CD=AB$,又 $\angle KBD=\angle CDB=\angle ABD$,所以点 K 与点 A 是关于 BD 的对称点,即 $AK\perp BD$,而 $KC/\!/BD$,所以 $AK\perp KC$,即 $\angle AKC=90°$.

五、(满分 15 分)证明,在任意给出的 7 个实数中,一定能找到两个实数 x,y,使得

$$0\le\frac{x-y}{1+xy}\le\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

证明 设任意给出的 7 个实数为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$,在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在 7 个实数 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6,\theta_7$,使得 $\tan\theta_i=a_i$ 其中 $(i=1,2,3,4,5,6,7)$.

将 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 等分为 6 个长为 $\frac{\pi}{6}$ 的区间:$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$,$\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$,$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$,$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.根据抽屉原理,必存在 θ_i,θ_j 属于同一个长为 $\frac{\pi}{6}$ 的小区间,

不妨设 $\theta_i\ge\theta_j$,则 $0\le\theta_i-\theta_j\le\frac{\pi}{6}$,

因此 $0\le\tan(\theta_i-\theta_j)\le\tan\frac{\pi}{6}$,

即 $0\le\frac{\tan\theta_i-\tan\theta_j}{1+\tan\theta_i\tan\theta_j}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $x=a_i$,$y=a_j$,这样,我们从任意给出的 7 个实数中,找到了两实数 x,y,使得

$$0\le\frac{x-y}{1+xy}\le\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(北京数学会普及委员会提供)